1 LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

1-1 Aussagen-Logik

Hier wird die Aussagen-Logik als *2-wertige* Logik vorgestellt, die keineswegs auf *Aussagen* limitiert werden darf. Von besonderer Bedeutung sind die Analyse der *Paradoxien der Implikation* und die genaue Darstellung der *Positiv-Implikation* als Alternative zur herkömmlichen Implikation.

1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Die Quantoren-Logik wird als *4-wertige* Logik vorgestellt, welche die Werte „alle", „alle nicht", „einige", „einige nicht" behandelt. Sie schließt die Aussagen-Logik mit ein. Es wird das Verhältnis zwischen *Quantoren-Logik* und *Prädikaten-Logik* erläutert, welches man als Äquivalenz oder Definition deuten kann. Als Erweiterung wird u. a. eine auf der Quantoren-Logik basierende *Modal*-Logik präsentiert.

1-3 Quantitative Logik

Die Vorstellung einer *∞-wertigen Quantitäts-Logik* ist der wichtigste Teil in diesem Kapitel 1. *Logische* Ausdrücke werden in *mathematische* Formeln übersetzt, so dass man z. B. sagen kann, welche *empirische Wahrscheinlichkeit* eine Implikation ausdrückt. M. W. sind diese Formeln bisher noch von niemandem aufgestellt oder publiziert worden.

1-4 Quantitative Aussagen-Logik

Die Aussagen-Logik mit ihren 2 Werten erweist sich als *Grenzbereich* der quantitativen Logik, sie beinhaltet (implizit) nur die Werte $p = 1$ oder $p = 0$.

1-5 Quantitative Quantoren-Logik

So wie die quantitative Aussagen-Logik die 2 Werte der Aussagen-Logik numerisch bestimmt, so werden in der quantitativen Quantoren-Logik die 4 Werte der Quantoren-Logik in Zahlenwerte übersetzt. Sie arbeitet mit den Größen: 1, < 1, 0 und > 0.

Wie schon erläutert, gehe ich im Kapitel 1: „Synthetische Relationen" – wie in den nächsten Kapiteln 2, 3 und 4 – in den *Unter-Kapiteln* (also von 1-1 bis 4-5) immer nach der gleichen *Inhaltsstruktur* vor, um möglichst eine gute Übersichtlichkeit bzw. Vergleichbarkeit zu gewährleisten:

Das bedeutet z. B. in der Zählung für Kapitel 1:

1-1 Aussagen-Logik
1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik
1-3 Quantitative Logik
1-4 Quantitative Aussagen-Logik
1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Auch die *Unter-Kapitel* (der Kap. 1 bis 4) sind *gleich unterteilt*, in folgende *Unter-Unter-Kapitel*:

1 Einführung	z. B. für 1-1:	1-1-1	Einführung
2 Implikation		1-1-2	Implikation
3 Positiv-Implikation		1-1-3	Positiv-Implikation
4 Systematik		1-1-4	Systematik
5 Erweiterungen		1-1-5	Erweiterungen

Insgesamt ergibt sich (normalerweise) eine Hierarchie über *vier* Ebenen, von 1-1-1-1 bis 4-5-5-5.

Ich verwende auch schon hier, im synthetischen Teil, *analytische* Relationen, nämlich vor allem die analytische *Implikation* $\Rightarrow$ und die analytische *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$. Aber dies geschieht im Wesentlichen nur zur Definition der Junktoren bzw. Relatoren. Im Einzelnen werden die analytischen Relationen erst im Kapitel 2 dargestellt.

1 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

1-1-1 Einführung

1-1-1-1 TERMINOLOGIE
Die herkömmliche Aussagen-Logik arbeitet nur mit:

1. *Aussagen* wie A, B bzw. A_1, A_2, ... , A_n
2. *Junktoren* wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$
3. *Negator* $\neg$

Mittels dieser drei Komponenten werden Aussagen-*Modifikationen* wie $\neg$A sowie Aussagen-*Verknüpfungen* wie A $\wedge$ B erzeugt. Man kann dabei zwischen *synthetischen* Verknüpfungen wie A $\rightarrow$ B und *analytischen* Verknüpfungen wie A $\wedge$ B $\Rightarrow$ B unterscheiden.

Natürlich lässt sich dies auch *meta-sprachlich* darstellen, man spricht dann von Aussagen-*Zeichen* wie ‚A', ‚B' u. ä. (bei den Junktoren ist es unbestimmt, ob sie objekt- oder meta-sprachlich zu verstehen sind, beides ist möglich).

Die Aussagen-Logik hat im wesentlichen die Funktion, Aussagen-Verknüpfungen aufzustellen bzw. zu beschreiben, ihre *Wahrheitsbedingungen* zu analysieren und – bei den analytischen Verknüpfungen – nachzuweisen, ob sie *allgemein-gültig* sind oder nicht, genauer, ob es *Tautologien*, *Kontradiktionen* oder nicht streng gültige Verknüpfungen sind.

Erweiterung der Aussagen-Logik
Man kann die sogenannte Aussagen-Logik aber *erweitern* bzw. aufzeigen, dass (wie schon beschrieben) das Wesentliche an ihr gar nicht die *Aussagen* sind. Dies sei hier erläutert:

• Erstens, charakteristisch ist nicht für die Aussagen-Logik, dass es sich um *Aussagen* o. ä. handelt, sondern dass diese *als ganze* – ohne Darstellung ihrer inneren Struktur – verwendet werden. Denn auch z. B. in der Prädikaten-Logik werden Aussagen, allerdings mit ihrer Subjekt-Prädikat-Struktur verwendet.

• Zweitens, man könnte – anstatt Aussagen – genauso gut *Sätze*, *Sachverhalte*, *Urteile* oder *Ereignisse* (wie in der Statistik) zur Grundlage machen und z. B. von einer ‚*Ereignis-Logik'* sprechen. Das Gemeinsame an all diesen ist, dass es sich um *Relationen* handelt – dieser Begriff ist für die generelle Verwendung geeigneter als der *Verknüpfungs*-Begriff (vgl. 0-2-5-3). A $\rightarrow$ B muss man nicht als *Aussagen-Relation* sehen, man kann es z. B. auch als *Sachverhalt*-Relation begreifen. Komplexe Relationen zwischen einfacheren Relationen nenne ich, wie schon erläutert, *Molekular-Relationen*.

• Drittens, man kann aber die Variablen ‚A' und ‚B' sowie die Junktoren – auch über Relationen hinaus – auf *Mengen*, *Individuen* und *Begriffe* (oder Eigenschaften) anwenden. Ich bevorzuge hier allerdings, allgemein die Variablen ‚X' und Y' zu verwenden sowie statt von ‚Junktoren' von ‚*Relatoren'* zu sprechen. Z. B. ‚X $\rightarrow$ Y' kann also u. a. stehen für:

eine Relation zwischen den Aussagen ‚X' und ‚Y'
eine Relation zwischen den Sachverhalten X und Y
eine Relation zwischen den Mengen X und Y oder Individuum X und Menge Y
eine Relation zwischen eine Relation zwischen den Begriffen X und Y

Wenn man auch Relationen zwischen *strukturierten* Relationen, z. B. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \vee Y)$ erfassen will, darf man die Einzelrelationen allerdings nicht mit ‚X' und ‚Y' bezeichnen, weil es nicht sicher ist, dass diese logisch voneinander unabhängig sind. Hier schreibt man, wenn man die Einzel-Relationen nicht nennt, generell ‚$\Phi \rightarrow \Psi$' bzw. noch genereller ‚Φ R Ψ'.

• Viertens, und das ist entscheidend: Es geht bei der Aussagen-Logik letztlich allein darum, dass man nur zwischen *2 Werten* unterscheidet, bei Aussagen zwischen *wahr* und *falsch*.
Man spräche daher besser von ‚*zwei-wertiger Logik*' und nicht von ‚Aussagen-Logik'. Die Aussagen-Logik im engeren und eigentlichen Sinn ist nur ein kleiner Teil einer *generellen 2-wertigen Logik*.

Belegung
Ich unterscheide primär nicht zwischen *wahr* und *falsch*, sondern allgemein zwischen *positiv* (+) und *negativ* (–) bzw. zwischen *belegt* und *nicht belegt* oder *gültig* und *ungültig*; ich beschränke also ‚(un)gültig' nicht wie sonst häufiger auf logische *Schlüsse*. Die Termini 'positiv' und 'negativ' sind etwas missverständlich, denn unter einem *positiven Satz* kann man auch einen *bejahten Satz* verstehen, aber auch ein *bejahter* Satz kann *falsch* sein. „Negativ" könnte auch missverstanden werden als < 0, aber Werte < 0 kommen hier grundsätzlich nicht vor. Als *Quantitätsstufen* geht es um die Unterscheidung von 1 = alle und 0 = keiner.

Markierung
In der normalen Sprache wie in der Logik ist die *Negation markiert* (logisch durch ¬), die *Position* (Bejahung) aber nicht. Dies erklärt sich so, dass der *wahre Satz* als *Normalfall* gilt, der nicht gesondert *markiert* sein muss. Systematischer wäre aber:

Neutral:	Sachverhalt X	formal: (X)
Bejaht:	Sachverhalt X besteht	formal, z. B. !(X)
Verneint:	Sachverhalt X besteht nicht	formal: ¬(X)

Um aber so weit wie möglich bei den eingeführten Begriffen zu bleiben, schreibe ich für „Sachverhalt X besteht" bzw. für „die Aussage ‚X' ist wahr" einfach ‚X' und verwende auch vorrangig den eigentlich unglücklichen Terminus 'Aussagen-Logik'.

1-1-1-2 WAHRHEITSTAFEL

Die Zeichen der Aussagen-Logik wurden schon vorgestellt, es sind vor allem die *deskriptiven Variablen* und die *Relatoren*. Zu den deskriptiven Variablen zählen (im engeren Modell) ‚A', ‚B' usw., im weiteren Modell ‚X', ‚Y' bzw. generell ‚Φ', ‚Ψ'. Am wichtigsten sind dabei die *Relatoren*; sie sind keine Variablen, sondern *Konstanten*. Logische *Relatoren* bzw. *Junktoren* – das ist gleichbedeutend – werden durch die *Wahrheitstafel* definiert (vgl. 0-2-5-4: Logik-Komponenten / Relationen). Diese sei noch einmal am Beispiel der *Implikation* dargestellt:

	X	→	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

Man kann die oberste Zeile *unterstreichen* und / oder den *Wahrheitsverlauf* unter dem Relator *fett* schreiben (siehe unten).

Ich kürze die Wahrheitstafel einer logischen Formel oft mit einer *waagerechten* Aufzählung der entscheidenden Wahrheitswerte ab.

Für $\underline{X \rightarrow Y}$ z. B. schreibe ich auch kurz: $X \rightarrow Y$: $+ - + +$

X	→	Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

D. h. es werden hier nur die Wahrheitswerte, die *unter dem Relator* stehen, angeführt.
Diese können auch in *Klammern* gesetzt sein: $X \rightarrow Y$ $(+ - + +)$

1-1-1-3 ALTERNATIVE WAHRHEITSTAFELN

Man kann die Wahrheitstafel auch wie folgt darstellen, speziell zur *Definition* eines Relators.

X	Y	X → Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

oder kürzer:

X	Y	→
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Diese Darstellungsweise zeigt, wie die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ *primär* zu deuten ist: nämlich als $X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$ (in der 1. Zeile, die anderen Zeilen entsprechend). Da hier aus der *Konjunktion* von Vorder-Glied (X) und Nach-Glied (Y) auf die Gesamt-Relation ($X \rightarrow Y$) geschlossen wird, spreche ich von ‚*konjunktiver Deutung*'. Hierfür lassen sich drei alternative *konjunktive Wahrheitstafeln* aufstellen:

- vollständige Wahrheitstafel

	X	∧	Y	⇒	X	→	Y
1.	+	+	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	+	−	−
3.	−	−	+	+	−	+	+
4.	−	−	−	+	−	+	−

Hier werden von allen *Variablen* (X, Y) und von allen *Relatoren* (∧, ⇒, →) die Wahrheitswerte (+, −) genannt.

- tafel-orientierte Wahrheitstafel

	X ∧ Y	⇒	X → Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Hier werden nur von den *Relationen* (∧, ⇒, →) die Wahrheitswerte genannt. Es ist eine *verkürzte* Wahrheitstafel, die aber legitim ist, weil die Werte von X (+ + − −) und Y (+ − + −)

stets gleich sind und als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Letztlich kommt es in der *Wahrheitstafel* nur auf die Wahrheitswerte der Relationen an. Und diese werden in der obigen Darstellung besonders deutlich. Man sieht z. B. in der 1. Zeile auf einen Blick: wenn die Konjunktion (Prämisse) $X \wedge Y$ gültig (+) ist und die Implikation (Konklusion) $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann ist die Gesamtrelation gültig (+).

• zeilen-orientierte Wahrheitstafel

	X	∧ Y	⇒	X → Y
1.	+	+	+	+
2.	+	−	+	−
3.	−	+	+	+
4.	−	−	+	+

Auch hier liegt eine *verkürzte* Darstellung vor. Es werden jetzt bei $X \wedge Y$ die Wahrheitswerte der *Variablen* X und Y genannt, aber nicht die der Konjunktion $\wedge$. Das hat folgenden Grund: Man kann die einzelnen *Zeilen* der Wahrheitstafel wiederum als *Relationen* schreiben. Dabei sind aber nur die Werte von X und Y relevant, nicht der Gesamtwert der Konjunktion $X \wedge Y$. Bei $X \rightarrow Y$ dagegen interessiert nur die Gesamtrelation, nicht die Werte von X und Y.

Die Zeilen sind:

1. $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\quad + - - - \Rightarrow + - + +$
2. $X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$ $\quad - + - - \Rightarrow - + - -$
3. $\neg X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\quad - - + - \Rightarrow + - + +$
4. $\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\quad - - - + \Rightarrow + - + +$

Diese Zeilen geben die *primäre Interpretation* der Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ wieder.

1-1-1-4 SPEZIELLE DARSTELLUNGEN

Man kann die Wahrheitstafel auch in einer *Tabelle* darstellen:

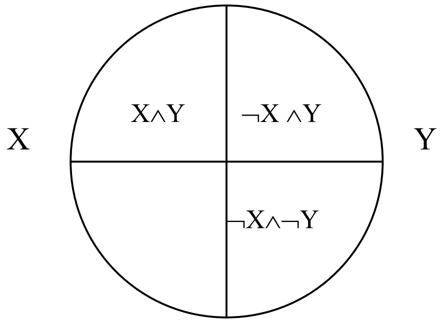
$X \rightarrow Y$

	X	¬X
Y	X ∧ Y	¬X ∧ Y
¬Y		¬X ∧ ¬Y

Hier werden nur die Felder ausgefüllt, die in der Wahrheitstafel ein + aufweisen.
Eine alternative Darstellung ist noch die folgende Tabellenform:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Kreis-Darstellung
Man kann die Wahrheitstafel graphisch auch durch *Kreise* symbolisieren, z. B. *Euler-Kreise* oder *Venn-Diagramme*. Eine bessere Kreisdarstellung für X → Y ist die folgende:



1-1-1-5 WAHRHEITSTAFEL UND RELATION

Wir müssen bezüglich Wahrheit oder Falschheit klar unterscheiden zwischen:
1) einer *Relation* (bzw. einem Satz) und 2) der *Wahrheitstafel* dieser Relation

1) Relation / Satz
Wir unterscheiden *bejahte* und *negierte* Sätze.
• bejahter Satz, z. B. X → Y
Ein Satz wie X → X enthält eine *Wahrheits- bzw. Gültigkeits-Behauptung*. Diese ist eben nur *implizit* bzw. *unmarkiert*. Bei einem Satz in der *normalen Sprache* ist es selbstverständlich, dass er (normalerweise) mit Wahrheitsbehauptung geäußert wird, aber man sollte auch in der Logik davon ausgehen. Der Satz ‚X → Y' lässt sich somit formulieren als: „'X → Y' ist wahr" oder „es ist wahr, dass X → Y". Die Wahrheitsbehauptung kann allerdings falsch sein.
• negierter Satz, z. B. ¬(X → Y)
Der *negierte* Satz wird dagegen durch die *Negation* gekennzeichnet, also *explizit* und *markiert*: ¬(X → Y). Ihm entspricht die Behauptung „'X → Y' ist falsch".
Insofern Sätze ihre Wahrheit oder Falschheit implizieren, kann man z. B. auch sagen, der Satz ‚X → Y' macht die *Aussage* X → Y. Ansonsten würde es nahe liegen, nur zu sagen: Wie ein *Wort* eine Sache o. ä. *bezeichnet*, so *bezeichnet* ein *Satz* einen Sachverhalt. Aber da der Satz eben darüber hinaus ausdrückt, dass der Sachverhalt *besteht* (oder nicht), macht er eine Aussage. Allerdings kann man auch eine *Wort*-Bezeichnung so begreifen, dass sie bereits implizit eine Aussage über *Existenz / Nicht-Existenz* beinhaltet, denn man kann nur etwas *bezeichnen*, das irgendwie existent ist (vgl. 0-4-4: Kopula / Funktionale Logik).

2) *Wahrheitstafel / Wahrheitsbedingungen*
Anders in der Wahrheitstafel: Hier bleibt notgedrungen offen, ob der Satz *wahr* oder *falsch* ist, denn es geht ja gerade darum, die *Bedingungen* anzugeben, unter denen ein Satz wahr oder falsch ist. Dabei gibt es drei Stufen zu unterscheiden:
• Einzelne Wahrheitsbedingung
Es lassen sich einzelne Wahrheitsbedingungen z. B. für X → X angeben. So gilt:
Wenn X falsch ist, dann ist X → Y wahr: ¬X ⇒ X → Y. Und:
Wenn Y wahr ist, dann ist X → Y wahr: Y ⇒ X → Y
• Vollständige, kombinierte Wahrheitsbedingungen
Diese werden von der Wahrheitstafel geliefert, die für *alle* Welten angibt, ob X → Y darin wahr ist oder falsch, z. B.: Wenn X und Y wahr sind, dann ist X → Y wahr.

• Konkrete Wahrheit
Bei einem *formalen* Satz lässt sich aber erst angeben, ob er empirisch wahr ist, wenn man die *Variablen* ‚X' und ‚Y' durch konkrete Begriffe ersetzt. So ist $X \rightarrow Y$ bei folgender Einsetzung wahr: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse nass'. Und bei folgender Einsetzung falsch: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse blau'. Anders sieht es bei einer Tautologie aus wie $X \Rightarrow X$. Sie ist immer – logisch – wahr, unabhängig davon, ob X empirisch wahr ist.

Wir müssen aber auch die *Deutung* der *Wahrheitstafel* und die eines *Satzes* unterscheiden.
Die *primäre* Deutung der Wahrheitstafel ist die *konjunktive*, für $X \rightarrow Y$ die Ableitungen aus den *Konjunktionen*: $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$, $\neg X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$, $\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow Y$.
Aber die *primäre* Deutung für einen (implikativen) Satz ist die *implikative*. Mit dem Beispiel-Satz $X \rightarrow Y$ wollen wir ja vorrangig nicht sagen: ‚wenn X und Y wahr sind, dann ist auch $X \rightarrow Y$ wahr', ‚wenn X falsch und Y wahr ist, dann ist auch $X \rightarrow Y$ wahr' usw. Sondern wir wollen sagen: ‚Wenn X wahr ist, dann ist auch Y wahr'. Dies entspricht der *zentralen*, normalerweise der *ersten Zeile* der Wahrheitstafel.

1-1-2 Implikation

1-1-2-1 DEFINITION DER IMPLIKATION
Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ steht wie beschrieben für die *Kopula*-Struktur, auch wenn sie normalerweise nicht mit der klassischen Kopula-Formulierung „X ist ein Y" ausgedrückt wird.
Im Punkt „Implikation" behandle ich nicht nur die eigentliche Implikation, sondern alle *implikativen Relationen*, d. h. solche, die mit einem *Pfeil* symbolisiert werden; das sind neben der Implikation vor allem die *Replikation* $\leftarrow$ und die *Äquivalenz* $\leftrightarrow$. Ein häufig verwendeter, einfacher Beispielsatz für die Implikation ist:
‚Wenn es regnet, ist die Straße nass'. Dabei gilt:
X: es regnet
Y: die Straße ist nass
$\rightarrow$: wenn – dann.

Eine Basis-Relation bzw. ein Relator wird wie gesagt durch eine *Wahrheitswertetafel* dargestellt bzw. definiert. Man kann auch kurz von '*Wahrheitstafel*' sprechen (korrekter und neutraler wäre in meinem Sinne allerdings der Begriff '*Gültigkeitstafel*').

	$X \rightarrow Y$	äquivalent: $\neg(X \wedge \neg Y)$
1.	+ + +	
2.	+ – –	
3.	– + +	
4.	– + –	

Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist nur dann *ungültig*, wenn X belegt ist und Y nicht belegt ist (2. Zeile). In allen anderen Fällen ist sie *gültig*. Die Hauptdeutung ist: „(Immer) wenn X gültig ist, dann ist auch Y gültig". Diese Deutung ist wie beschrieben (wahrheitswert-)*funktional*.

Allgemeine, funktionale Deutungen von $X \rightarrow Y$ sind:
• X impliziert Y / Wenn X belegt ist, dann ist auch Y belegt.
• Wenn X, dann Y / Nur wenn Y, dann X (möglicherweise).
• X ist *hinreichende* Bedingung für Y / Y ist *notwendige* Bedingung für X.

Spezielle, funktionale Deutungen von $X \rightarrow Y$ bzw. $\Phi \rightarrow \Psi$ sind:
• *Individuell*: $x_i \rightarrow F$. Allgemeine Deutung: „x_i impliziert F“ bzw. „Wenn x_i, dann F“.
Beispiel: „Sokrates ist ein Philosoph“. Funktional (z. B.): „Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt“.
• *Klasse*: $F \rightarrow G$. Allgemeine Deutung: „F impliziert G“ bzw. „Wenn F, dann G“.
Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“. Funktional (z. B.): „Wenn die Klasse der Menschen Elemente besitzt, dann besitzt auch die Klasse der Sterblichen Elemente“.
• *Aussage*: $A \rightarrow B$. Allgemeine Deutung: „A impliziert B“ bzw. „wenn A, dann B“.
Beispiel: „Mensch sein heißt sterblich sein“. Funktional (z. B.): „Wenn jemand ein Mensch ist, dann ist er sterblich“.

1-1-2-2 PROBLEME DER IMPLIKATION

Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist wie gesagt nur dann *ungültig*, wenn *X belegt* ist und *Y nicht belegt* ist. In allen anderen Fällen ist sie *gültig*.

Dies führt erstens zu *logischen Paradoxien*, z. B. sind folgende Sätze – unerwartet – *nicht kontradiktorisch*: $X \rightarrow \neg X$: ‚wenn X, dann nicht X'. $\neg X \rightarrow X$: ‚wenn nicht X, dann X'. Oder $(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$. Die Implikation ist *nur* kontradiktorisch, wenn man aus einer Tautologie auf eine Kontradiktion schließt. Zweitens weicht die Implikation vom *normalen Sprachgebrauch* ab, dort versteht man eine *Wenn-dann* Beziehung als nur für die Fälle definiert, in denen *X gültig* (wahr) ist, also die ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel.

Von daher kann man die Implikation mit Recht kritisieren und eine veränderte Implikation einführen, die nur für die Welten definiert ist, in denen X gültig (+) ist. Ich habe hierfür die *Positiv-Implikation* $X *\!\rightarrow Y$ eingeführt. Allerdings kann und soll die Positiv-Implikation die normale Implikation nur *ergänzen*, nicht ersetzen. Denn es gibt auch gute Gründe für die zunächst befremdliche Definition der Implikation. Hier wichtige Diskussionspunkte:

• Zunächst ist zu fragen, warum man nicht, wie bei der Positiv-Implikation, einfach nur die *2* Welten berücksichtigt, in denen das Vorderglied X gültig ist, also $X \wedge Y$ und $X \wedge \neg Y$. Wie aber auch alle anderen Relatoren für *alle möglichen* (hier 4) Welten definiert sind, so benötigt man auch bei der Implikation eine Form, die *vollständig* ist, für *alle möglichen* Welten.

Dies ist gerade auch für *wissenschaftliche* Aussagen notwendig, die oft mittels der Implikation formuliert werden. Man will dabei *alle* Variablenwerte erfassen, also X, $\neg X$, Y und $\neg Y$.

• Die weitere Frage ist: Wenn man $X \rightarrow Y$ für 4 Welten definiert, warum soll denn $X \rightarrow Y$ gültig sein, wenn X ungültig ist, also: $\neg X \Rightarrow (X \rightarrow Y)$? Warum soll $X \rightarrow Y$ nicht in diesen Fällen *ungültig* sein, warum soll nicht gelten $\neg X \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$?

Hier ist Verschiedenes anzuführen. Zunächst sei klargestellt: Aus $\neg X$ folgt nicht, dass Y gültig ist. Es folgt daraus nur, dass $X \rightarrow Y$ gültig ist. Wie man aus der Wahrheitstafel in 1-1-2-1 leicht ersehen kann, gilt $\neg X \Rightarrow (X \rightarrow Y)$ unabhängig davon, ob Y gültig oder ungültig ist. Das bedeutet aber, dass man aus $\neg X$ nichts über Y schließen kann. Der klassische Satz „ex falso quodlibet sequitur“ (aus dem Falschen folgt Beliebiges) bedeutet hier also nicht, dass man aus $\neg X$ z. B. Y bzw. $\neg Y$ ableiten könnte. Anders sieht es allerdings aus, wenn man aus *analytisch* Falschem, d. h. aus einer *Kontradiktion*, Schlüsse zieht. Aus einer Kontradiktion kann man in der Tat *alles* ableiten, z. B.: $(X \wedge \neg X) \Rightarrow Y$, $(X \wedge \neg X) \Rightarrow \neg Y$. Das zeigt allerdings auch die Problematik der Implikation, denn ein solcher Schluss ist wenig plausibel.

In der 2-wertigen Aussagen-Logik gibt es nach herkömmlicher Auffassung nur die Werte wahr/gültig (+) und falsch/ungültig (–).

Man muss sich also entscheiden, ob man $X \rightarrow Y$ bei $\neg X$ als gültig oder ungültig definiert. (man könnte es auch in *einem* Fall als gültig definieren, z. B. bei gültigem Y, im *anderen* Fall als negativ – aber das führt nicht weiter). Und wenn es nur 2 Möglichkeiten gibt, dann spricht einiges dafür, $X \rightarrow Y$ als *gültig* zu bestimmen. Angenommen, man definierte beide Fälle als ungültig (–), dann bekäme die Implikation den Wahrheitsverlauf + – – –, das ist aber genau der Wahrheitsverlauf der *Konjunktion*, der *Und-Verknüpfung*; man könnte dann nicht mehr unterscheiden zwischen Implikation und Konjunktion, was indiskutabel wäre.

• Öfters hört man auch folgendes, allerdings etwas fragwürdiges Argument: Da man aus einer *falschen* Aussage durch logisch korrektes Schließen sowohl zu *wahren* als auch zu *falschen* Aussagen kommen kann, ist es akzeptabel, den Wahrheitswert von $X \rightarrow Y$ immer als wahr = gültig zu bestimmen, wenn der Wahrheitswert von X falsch = ungültig ist.

• Kommen wir noch einmal zu *wissenschaftlichen* Aussagen zurück: Ein wissenschaftliches *Gesetz* (vereinfacht $X \rightarrow Y$) sollte auch gelten, wenn die *Randbedingungen* (hier X, genauer X_i) nicht erfüllt sind; jedenfalls wäre es nicht überzeugend, es dann einfach *falsch* zu nennen.

• $X \rightarrow Y$ ist logisch äquivalent $\neg X \vee Y$, $\neg(X \wedge \neg Y)$ u. a. Greifen wir uns hier $\neg(X \wedge \neg Y)$ heraus. Man könnte argumentieren, dies sei die Definition, die primäre Bedeutung der Relation $X \rightarrow Y$, also: „Es ist nicht wahr, dass zugleich X wahr ist und Y falsch ist". Insofern man sich also von der „*Wenn-Dann*-Interpretation" verabschiedet, lösen sich viele, eventuell alle der genannten Probleme auf. Allerdings hat es sich andererseits durchgesetzt und bewährt, die Relation $X \rightarrow Y$ vorrangig als „Wenn X, dann Y" zu bestimmen – und überhaupt sind *Wenn-dann-Sätze* unverzichtbar in der Sprache wie in der Wissenschaft.

Trotz allem bleiben *berechtigte Zweifel an der Implikation*, wie wir noch oft in diesem Buch sehen werden. Eine Lösungsmöglichkeit ist wie gesagt zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* $X *\!\rightarrow X$ einzuführen, die für $\neg X$ *undefiniert* ist.

Diese Thematik hängt zusammen mit der Frage: Besteht bei $X \rightarrow Y$ ein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen X und Y?

In der *normalen Sprache* versteht man sogenannte *Konjunktionen* (Bindewörter) wie ‚und', ‚oder' vor allem aber ‚wenn – dann' so, dass sie einen *inhaltlichen*, nicht zufälligen Zusammenhang ausdrücken. Z. B. ‚wenn es regnet, ist bzw. wird die Straße nass'. In diesem Fall ist ein *Kausal-Zusammenhang* (oder jedenfalls *Konditional*-Zusammenhang) ausgedrückt.

In der *formalen Logik* liegen die Verhältnisse anders und komplizierter. Grundsätzlich ist zu berücksichtigen, dass es in der Logik nur um *korrelative, funktionale* Relationen geht. Betrachten wir zunächst *synthetische* Relationen, hier vor allem die Implikation $X \rightarrow Y$. In Logik-Büchern wird oft darauf hingewiesen, dass auch eine *zufällige*, sogar für uns sinnlose Beziehung durchaus mit der Implikation ausgedrückt werden kann, z. B.: ‚Wenn Weihnachten an 25. Januar ist, dann ist Kennedy deutscher Bundeskanzler'. Und diese Implikation ist sogar wahr, weil die Implikation eben als wahr gilt, wenn Vordersatz und Nachsatz falsch sind.

Allerdings: Bei einer gesetzmäßigen Relation der Art ‚*immer* wenn – dann' (mit p = 1) besteht statistisch eine *absolute positive Korrelation*; dann ist es kaum denkbar, dass es sich um eine *zufällige* Beziehung handelt. Insofern ist es doch berechtigt, bei den logischen Relatoren *inhaltliche* Zusammenhänge anzunehmen.

Eine andere Lösung wäre, zwischen *materialer* (inhaltlicher) und *formaler* Implikation zu unterscheiden. Die bisher behandelte Implikation $X \rightarrow Y$ ist *formal*, d. h. zwischen X und Y muss *keinerlei inhaltlicher* Zusammenhang bestehen. Dagegen bestände bei einer *materialen Implikation* ein *inhaltlicher* Zusammenhang (ich weise darauf hin, dass die Begriffe ‚materiale Implikation' bzw. ‚formale Implikation' zuweilen in entgegengesetzter Bedeutung verwendet werden).

1-1-2-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

Es gibt vor allem folgende Negationen:

	X	$\rightarrow$	$\neg$	Y
1.	+	–	–	+
2.	+	+	+	–
3.	–	+	–	+
4.	–	+	+	–

äquivalent $X \mid Y$

	$\neg$	$(X$	$\rightarrow$	$Y)$
1.	–	+	+	+
2.	+	+	–	–
3.	–	–	+	+
4.	–	–	+	–

äquivalent $X \wedge \neg Y$

Die doppelte Negation $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – ist äquivalent der Konjunktion $X \wedge Y$.

Hier ergibt sich die Gelegenheit, die *zentrale Zeile* der Wahrheitstafel zu erklären. Die zentrale Zeile ist diejenige, welche die Relation *definiert* bzw. welche der *Bezeichnung* der Relation entspricht. Diese zentrale Zeile wird bei den Beispielen *unterstrichen*.

Bei einer *positiven* Relation ist normalerweise die 1. Zeile *zentral.*

	X	$\rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

Bei einer *negativen* Relation ist das anders, z. B.: $X \rightarrow \neg Y$. Die Relation besagt ja primär: Wenn X gültig (+) ist, dann ist Y nicht gültig (–). Y ist nicht gültig, bedeutet ja aber: $\neg Y$ ist gültig, also muss unter dem Negationszeichen $\neg$ ein + stehen. Somit ist hier die 2. Zeile die *zentrale*. Auch bei $\neg(X \rightarrow Y)$ ist die 2. Zeile die zentrale Zeile.

1-1-2-4 REPLIKATION

Die *Replikation* $X \leftarrow Y$ ist die *Umkehrung* der Implikation. Von daher ist es berechtigt, sie als Unterpunkt der Implikation zu behandeln.
Hauptdeutung: „Nur wenn X, dann auch Y (möglicherweise)“. Zu den anderen möglichen Deutungen verweise ich auf die Implikation.

X	$\leftarrow$	Y
+	+	+
+	+	–
–	–	+
–	+	–

ist äquivalent $\neg X \rightarrow \neg Y$

1-1-2-5 ÄQUIVALENZ

Die *Äquivalenz* bedeutet die Verbindung (Konjunktion) von *Implikation und Replikation*.
Das wird später genauer gezeigt werden.
Hauptdeutung: Wenn X, dann Y, und wenn Y, dann X.
Im Sinne der *Kopula* deutet man: X ist ein Y, und Y ist ein X, also X = Y.

X	↔	Y
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	+	−

ist äquivalent (X → Y) ∧ (X ← Y)

1-1-3 Positiv-Implikation

1-1-3-1 BEGRÜNDUNG DER POSITIV-IMPLIKATION
Die Positiv-Implikation A *→ B wurde schon in 0-2-5-5 eingeführt. In der *normalen Sprache* versteht man einen *Wenn-Dann-Satz* so, dass er nur eine Aussage macht über die Fälle, in denen der Wenn-Satz *wahr* ist. Ebenso in der *Wissenschaft* versteht man eine Hypothese meist in diesem Sinne (wenn sie eben nicht mit der Implikation formalisiert ist). Auch in der mathematischen *Wahrscheinlichkeitstheorie* wird eine Aussage p(A|B) = r/n über *bedingte Wahrscheinlichkeit* so interpretiert, dass sie sich nur auf die Fälle bezieht, in denen B wahr ist (A und B sind hier vertauscht). Dies bedeutet nicht zwangsläufig, dass man nicht *alle* Möglichkeiten berücksichtigt, denn man kann A *→ B ja ergänzen durch: ¬A *→ B.

Die *normale* Implikation A → B berücksichtigt dagegen automatisch auch die Fälle, in denen der Wenn-Satz falsch ist. Daher habe ich zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* eingeführt. Sie berücksichtigt wie gesagt nur die beiden Welten, in denen das Vorderglied gültig (positiv) ist. Die Positiv-Implikation entspricht also viel mehr unserem üblichen Denken und der normalen Sprache, allerdings gibt es auch Nachteile: vor allem ist die Positiv-Implikation im analytischen Bereich, bei logischen Folgen, viel komplizierter als die normale Implikation.

1-1-3-2 ZWEI VARIANTEN DER POSITIV-IMPLIKATION
Die *Positiv-Implikation*, auch *Implikation, wird durch ein * über dem Pfeil gekennzeichnet: *→, also X *→ Y. Relation X *→ Y ist nur für die Welten *definiert*, in denen X gültig ist.

Im Beispiel: Ein Satz ‘Wenn es regnet, ist die Straße nass’ sagt nur etwas aus für den Fall, dass es regnet. Was mit der Straße geschieht, wenn es *nicht* regnet, ist *nicht definiert*.

Man kann die Positiv-Implikation durch zwei verschiedene Wahrheitstafeln darstellen:

X	*→	Y
+	+	+
+	−	−

X	*→	Y
+	+	+
+	−	−
−	□	+
−	□	−

Im ersten Fall werden nur die 2 Welten aufgeführt, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv ist. Ich verspreche hier von ‚verkürzter Positiv-Implikation’.

Im zweiten Fall ist die Implikation zwar für alle 4 Welten ausgeführt, aber in den 2 Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist (also das X ein − hat), steht das Symbol □ unter dem Relator. □ hat die Bedeutung ‘*nicht definiert’*. Diese Lösung der vollständigen Wahrheitstafel, mit 4 Welten, ist jedenfalls für die Individuen-Relation und die Klassen-Relation plausibler, in manchen Fällen ist sie sogar unverzichtbar.

1-1-3-3 NEGATIONEN DER POSITIV-IMPLIKATION

Es sollen vor allem folgende Negationen erwähnt werden:

X *→ ¬Y : − + □ □	¬X *→ Y : □ □ + −
¬X *→ ¬Y : □ □ − +	¬ (X *→ Y) : − + □ □

Ich möchte auf ¬X *→ Y etwas genauer eingehen:

	¬X	*→	Y
1.	− +	□	+
2.	− +	□	−
3.	+ −	+	+
4.	+ −	−	−

Die *negative* Relation ¬X *→ Y ist für die Welten definiert, in denen X *ungültig* ist, also nicht für die Welten, in denen X gültig ist. In der Wahrheitstafel bedeutet das: ¬X *→ Y ist für die 3. und 4. Zeile definiert, in denen das Negationszeichen ¬ ein + hat und X ein −.

Ein Satz wie ‘Wenn es nicht regnet (¬X), bleibt die Straße trocken (Y), sagt bei Verwendung von *→ also nur etwas über das Fall aus, dass X ungültig und nicht X gültig ist.

1-1-3-4 POSITIV-REPLIKATION

X	←*	Y
+	+	+
+	□	−
−	−	+
−	□	−

1-1-3-5 POSITIV-ÄQUIVALENZ

X	↔*	Y
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	□	−

Man könnte kritisieren, dass die Äquivalenz in der 2. und 3. Zeile gar nicht definiert ist, weil auch von − (also negativem X oder negativem Y aus) geschlossen werden kann; ich werde aber später erläutern, warum diese Wahrheitstafeln doch korrekt sind.

1-1-4 Systematik

Die Relatoren und die Wahrheitswertetafel wurden bereits erläutert. Bei 2 Variablen gibt es $2^4 = 16$ ($4 = 2^2$) mögliche Verläufe der Wahrheitswerte-Tafel, von + + + + bis zu − − − −. Bei 3 Variablen gäbe es $2^8 = 256$ ($8 = 2^3$) mögliche Verläufe usw.

Gerade diese beiden letzten Verläufe stehen aber für *analytische* Relationen, für die *Tautologie* oder die *Kontradiktion*. Daher sollte man ihnen nicht (synthetische) Relatoren zuordnen Es gäbe demnach nur 14 Relatoren. Der Vollständigkeit halber zähle ich aber doch – wie es üblich ist – 16 Relatoren auf.

1-1-4-1 GESAMTÜBERSICHT

Name	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y	*Symbol*	*(mögliche) Bedeutung*
1) Tautologie	+	+	+	+	X ⊤ Y	X oder nicht X und Y oder nicht Y
2) Disjunktion	+	+	+	–	X ∨ Y	X oder Y (oder beide)
3) Replikation	+	+	–	+	X ← Y	nur wenn Y, auch X
4) Präpension	+	+	–	–	X ⌋ Y	jedenfalls X (vielleicht Y)
5) Implikation	+	–	+	+	X → Y	immer wenn X, dann Y
6) Postpension	+	–	+	–	X ⌊ Y	jedenfalls Y (vielleicht X)
7) Äquivalenz	+	–	–	+	X ↔ Y	X ist äquivalent Y
8) Konjunktion	+	–	–	–	X ∧ Y	X und Y
9) Exklusion	–	+	+	+	X | Y	X oder Y (aber nicht beide)
10) Kontravalenz	–	+	+	–	X >< Y	entweder X oder Y
11) Postnonpension	–	+	–	+	X ⌈ Y	keinesfalls Y
12) Postsektion	–	+	–	–	X >– Y	X und nicht Y
13) Pränonpension	–	–	+	+	X ⌉ Y	keinesfalls X
14) Präsektion	–	–	+	–	X –< Y	Y und nicht X
15) Rejektion	–	–	–	+	X ∇ Y	nicht X und nicht Y
16) Antilogie	–	–	–	–	X ⊥ Y	X und nicht X und Y und nicht Y

Die hier genannten Bedeutungen sind zwar die wichtigsten, aber es lassen sich auch andere Bedeutungen angeben. Wenn man z. B. eine *mengentheoretische Semantik* wählt, ergeben sich ggf. ganz andere Interpretationen, z. B. für X → Y: X ist Teilmenge von Y (vgl. 0-4).

Grundsätzlich lassen sich *alle* diese Relationen auf *eine einzige* zurückführen, z. B. auf die *Exklusion* X | Y (auch ‘nand’ für non-and genannt) und auf die *Rejektion* X ∇ Y (auch ‘nor’ für non-or genannt). ‘nand’ und ‘nor’ spielen bei der *Computer-Logik* eine besondere Rolle.

1-1-4-2 ÜBERSICHT ÜBER DIE WICHTIGSTEN RELATOREN

Die wichtigsten Relatoren sind wie schon beschrieben:

• *Konjunktion*	und	formal: ∧	X ∧ Y
• *Disjunktion*	oder/und (inklusiv)	formal: ∨	X ∨ Y
• *Kontravalenz*	entweder - oder (exklusiv)	formal: ><	X >< Y
• *Exklusion*	oder (nicht beide)	formal: |	X | Y
• *Implikation*	wenn – dann	formal: →	X → Y
• *Äquivalenz*	nur wenn – dann	formal ↔	X ↔ Y

Die Wahrheitstafeln sind:

X	Y	∧	∨	><	|	→	↔
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

Eine weitere Möglichkeit ist die Einteilung der Relatoren nach *Anzahl der gültigen Welten*:

- 4-Welt-Relator: ⊤
- 3-Welt-Relatoren: → ← ∨ |
- 2-Welt-Relatoren: ↔ >< ⌋ ⌊ ⌉ ⌈
- 1-Welt-Relatoren: ∧ –< >– ∇
- 0-Welt-Relator: ⊥

1-1-4-3 KONJUNKTION

Ich will die Konjunktion ∧ besonders hervorheben, weil sie sich an besten für die Einführung einer *partiellen Wahrheit* eignet.

	X	∧	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	–	+
4.	–	–	–

Man könnte folgendermaßen argumentieren: Wenn X und Y beide falsch (–) sind (4. Zeile), dann ist der *Gesamtsatz falsch*. Wenn aber nur *entweder* X *oder* Y falsch sind (2. bzw. 3. Zeile), dann ist der Gesamtsatz *halb wahr und halb falsch*, man könnte sagen *1/2 wahr*. Als Symbol könnte man wählen: ±. Man hätte ein *3-wertiges System*, mit der Wahrheitstafel:

	X	∧	Y
1.	+	+	+
2.	+	±	–
3.	–	±	+
4.	–	–	–

Dabei ist es zu bedenken: Man kann mit der Konjunktion und der Negation die anderen Relatoren definieren, das wird im Kap. 2 über analytische Relationen genauer erläutert.

Wenn man z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$ mittels Konjunktion darstellt, nämlich als $\neg(X \wedge \neg Y)$, dann ergibt sich als Wahrheitswerteverlauf $\pm - + \pm$ (wenn man $\pm$ negiert, erhält man offensichtlich wiederum $\pm$). Diese Deutung der Implikation ist allerdings nicht sehr plausibel, am besten ließe sich das *Modell der partiellen Wahrheit* nur bei eindeutigen Konjunktionen anwenden, besser allerdings noch in einer quantitativen Theorie (vgl. 1-3-1-2).

1-1-4-4 RELATIONS-KETTEN

Es lassen sich beliebig lange *Ketten* von Relationen herstellen, d. h. *Molekular-Relationen*.

Dabei ist zu unterscheiden:

- Molekular-Relationen mit mehreren, mindestens drei Variablen, wobei jede Variable nur *einmal* vorkommt. Sie sind *synthetisch*.
  z. B.: $(X_1 \leftrightarrow Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2)$.
- Molekular-Relationen mit mehreren Variablen, wobei mindestens eine Variable *mehr als einmal* vorkommt. Es handelt es sich um *(partiell) analytische* Relationen:
  analytisch: z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$
  teil-analytisch : z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

Für die Wahrheitstafel gilt:
Bei 2 Variablen: $2^2 = 4$ Reihen bzw. 4 mögliche Welten
Bei 3 Variablen: $2^3 = 8$ Reihen bzw. 8 mögliche Welten usw.
Bei 4 Variablen: $2^4 = 16$ Reihen bzw. 16 mögliche Welten
Bei n Variablen: 2^n Reihen bzw. mögliche Welten.

Beispiel: die Wahrheitstafel einer *synthetischen* Molekular-Relation mit *3* Variablen X, Y, Z

	$(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
1.	+ + + + +
2.	+ + + – –
3.	+ – – + +
4.	+ – – + –
5.	– + + + +
6.	– + + – –
7.	– + – + +
8.	– + – – –

1-1-4-5 REFLEXIVITÄT, SYMMETRIE UND TRANSITIVITÄT VON RELATOREN

Es gibt verschiedene Kriterien, nach denen man Relatoren (Junktoren) einteilen kann.

- Reflexivität
  - *reflexiv* bedeutet: $X\ {}^{+}R^{+}\ X$, z. B. $X \Rightarrow X$, die Relation ist tautologisch
  - *irreflexiv* bedeutet: $X\ {}^{+}R^{-}\ X$, z. B. $X \wedge X$ (+ + – –), ist nicht tautologisch (man kann irreflexiv auch so interpretieren, dass gilt: $X\ {}^{-}R^{-}\ X$, also eine *Kontradiktion* besteht, aber einen entsprechenden Relator gibt es nicht, wenn man vom problematischen Antilogator absieht)
- Symmetrie
  - *symmetrisch*: $X R Y \Leftrightarrow Y R X$, also z. B. : $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$
    für symmetrische Relatoren gilt somit das *Vertauschungsgesetz*

symmetrisch sind z. B.: $\wedge \vee >< \mid \leftrightarrow$

- *asymmetrisch*: X R Y $\neg\Leftrightarrow$ Y R X
  asymmetrisch sind z. B.: $\rightarrow \leftarrow$
  Für asymmetrische Relatoren gilt das Vertauschungsgesetz nicht,
  z. B. $(X \rightarrow Y) \longleftrightarrow (X \leftarrow Y)$, aber eben *nicht*: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \leftarrow Y)$
  $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$ sind nur partiell analytisch äquivalent.

• Transitivität

- *transitiv*: $(X\ R\ Y) \wedge (Y\ R\ Z) \Rightarrow (X\ R\ Z)$
  z. B.: $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \rightarrow Z)$: $\rightarrow$ ist transitiv
- *intransitiv*: $(X\ R\ Y) \wedge (Y\ R\ Z) \neg\Rightarrow (X\ R\ Z)$
- z. B.: $(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z) \neg\Rightarrow (X \vee Z)$: $\vee$ ist intransitiv

Folgende Symbole wurden hier verwendet, die erst später genauer erklärt werden:

$\Leftrightarrow$ (tauto)logisch äquivalent $\neg\Leftrightarrow$ nicht logisch äquivalent
$\Rightarrow$ (tauto)logisch implikativ $\neg\Rightarrow$ nicht logisch implikativ

Die *Symmetrie* behandle ich ausführlicher, weil sie von besonderer Bedeutung ist.

Die *asymmetrischen* Relatoren sind *dyadisch*, sie sind nur für 2 Variablen definiert (wenn man natürlich auch mehr Variablen damit verbinden kann). Die *symmetrischen* Relatoren sind dagegen für beliebig viele Variablen zu definieren.

Praktisch zeigt sich das folgendermaßen: Für eine *asymmetrische* Implikation mit 3 Variablen $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ist die Wahrheitstafel nicht unmittelbar ersichtlich.

Auch ergibt sich für $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$ eine andere Wahrheitstafel als für $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$.

Dagegen ist bei den *symmetrischen* Relatoren wie $\wedge \vee >< \mid \leftrightarrow$ die Wahrheitstafel für 3 (und beliebig viele) Variablen sofort zu bestimmen:

X Y Z	$\wedge$	$\vee$	$><$	$\mid$	$\leftrightarrow$
+ + +	+	+	–	–	+
+ + –	–	+	+	+	–
+ – +	–	+	+	+	–
+ – –	–	+	+	+	–
– + +	–	+	+	+	–
– + –	–	+	+	+	–
– – +	–	+	+	+	–
– – –	–	–	–	+	+

1-1-5 Erweiterungen

Man kann die Aussagen-Logik, generell die Logik, auf Bereiche anwenden, die zwar eine logische Struktur haben, andererseits aber über die Logik hinausreichen, die *hyper-logisch* sind. Ich möchte hier folgende Bereiche kurz besprechen:

• Modalität
• Kausalität
• Identität
• Zeit
• Raum

1-1-5-1 MODALITÄT

Die primäre Modalität ist die sogenannte *alethische* Modalität: sie hat es mit Begriffen wie *Notwendigkeit*, *Möglichkeit* und *Unmöglichkeit* zu tun. Modalität kann man so verstehen, dass sie auch *außer-logische* Komponenten enthält, z. B. wenn man die Modalität auf *Kausalität* bezieht: *notwendig* ist dann eine *Wirkung* in Bezug auf ihre *Ursache*.

Modalität kann man aber auch allein *innerhalb* der Logik definieren. Einige modal-logische Begriffe, nämlich „notwendig“ (N) und „notwendig nicht“ (N¬) lassen sich dabei rein *aussagen-logisch* ausdrücken, in erster Linie durch die *Implikation*.

Das sei kurz für einen *synthetischen* Ansatz erläutert (an späterer Stelle werden wir den – wichtigeren – analytischen Ansatz besprechen). Beim synthetischen Ansatz geht es um *empirische* Modalitäten, nicht um *logische*. ‚Y ist notwendig in Bezug auf X’ bedeutet also: „Y ist empirisch notwendig in Bezug auf X“.

1) Notwendigkeit

„Y ist *notwendig* in Bezug auf X“ kann man *aussagen-logisch* durch $X \rightarrow Y$ (bzw. $X *\!\!\rightarrow Y$) ausdrücken. *Modal-Logisch* schreibt man dann, bei N = Notwendigkeit: $N(Y, X) =_{df} X \rightarrow Y$. Lies: ‚Y ist notwendig in Bezug auf X’ ist definiert als: $X \rightarrow Y$.

2) Unmöglichkeit

Die Frage ist, wie man „nicht Y ist notwendig in Bezug auf X“ („wenn X, dann notwendig nicht Y“) ausdrückt. Dies setzt man modal-logisch gleich mit „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X“. Ich will zwei Modelle vorstellen:

• $X \rightarrow \neg Y$: – + + +

Man könnte zunächst durch $X \rightarrow \neg Y$ formalisieren. Es ließe sich argumentieren: wenn X nicht-Y impliziert, dann ist es unmöglich, dass X auch Y impliziert. Aber dies ist logisch durchaus möglich: denn $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y)$ ist *keine Kontradiktion*, sondern hat den Wahrheitsverlauf – – + +. Beide Ausdrücke können zugleich wahr sein. Doch es darf ja nicht zugleich gelten: „Y ist n*otwendig* in Bezug auf X“ und „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X“.

Allerdings könnte man sich mit der *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ behelfen, die ja nur für die Welten definiert ist, in denen X wahr ist. Entsprechend gibt diese hier eine *Kontradiktion* an, nämlich: $(X *\!\!\rightarrow Y) \,^{-}\!\wedge^{-} (X *\!\!\rightarrow \neg Y)$.

• $\neg(X \rightarrow Y)$: – + – –

Alternativ mag man „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X“ durch die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ formalisieren. Dann ist die gewünschte Kontradiktion zwischen *notwendig*: $X \rightarrow Y$ und *unmöglich*: $\neg(X \rightarrow Y)$ gewährleistet. Die Formalisierung $\neg(X \rightarrow Y)$ mag zunächst verwundern, man würde das eher übersetzen mit „es ist nicht wahr, dass Y notwendig ist in Bezug auf Y“. Aber $\neg(X \rightarrow Y)$ hat den Wahrheitsverlauf – + – –, es ist nur in dem *einen* Falle wahr, dass X wahr und Y falsch ist; das passt also zu: „wenn X, dann unmöglich Y“. Außerdem ist in einem *2-wertigen* System „unmöglich“ die Negation von „notwendig“. Auch wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ als Lösung nicht völlig überzeugen mag, in der synthetischen Modal-Logik dürfte es keine bessere geben. Modal-logisch schreibt man (bei U = Unmöglich): $U(Y, X) =_{df} \neg(X \rightarrow Y)$.

3) Möglichkeit

Meine These ist, dass sich „möglich“ nicht rein *aussagen-logisch* darstellen lässt. Die Frage ist, ob sich Gegenmodelle finden. Ich will hier nur $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – diskutieren.

„Y ist möglich in Bezug auf X“, formal M(Y, X), wird hier durch die *doppelte Negation* der Implikation gebildet, mit der Bedeutung: „Es ist nicht wahr, dass nicht-Y notwendig auf X folgt“. Aber hier ergibt sich folgendes Problem: Ein wesentliches Gesetz der Modal-Logik ist:

notwendig $\Rightarrow$ möglich bzw. notwendig (X) $\Rightarrow$ möglich (X). Ein strenger Schluss von „notwendig“ auf „möglich“ ist aber nicht gegeben: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow \neg Y)$: + + − −. Es handelt sich also nur um einen *semi-analytischen* Schluss. Schlimmer, umgekehrt ergibt sich ein *strenger* Schluss: $\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$. Dies hieße aber: möglich $\Rightarrow$ notwendig, und das ist inakzeptabel. Generell gilt: $X \rightarrow Y$ impliziert logisch ($\Rightarrow$) überhaupt nur sich selbst, also $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$, oder Tautologien. Auch andere *Gegenmodelle* scheitern.

Fazit: Genau so, wie sich „einige“ und „einige nicht“ nicht *aussagen-logisch* ausdrücken lassen, so auch nicht „möglich“ und „möglich nicht“, welche dieselbe quantitative Struktur besitzen: „möglich“ entspricht „einige“, „möglich (dass) nicht“ entspricht „einige nicht“. „Möglich“ (M) und „möglich nicht“ (M¬) sind nur durch *Quantoren-Logik* bzw. eine höhere Logik darzustellen – gleichgültig, ob in einem *synthetischen* oder einem *analytischen* Ansatz.

1-1-5-2 KAUSALITÄT

Hier sollen die *logischen Strukturen* von *Kausal-Beziehungen* kurz angegeben werden. Zur Kausalität gehört natürlich mehr als die logische Struktur − so geht die Ursache der Wirkung *zeitlich* voraus −, aber eine bestimmte logische Struktur ist notwendige Bedingung für die spezielle Kausalbeziehung.

Bei einer sogenannten *Kausal-Erklärung* gibt man normalerweise ein *Gesetz* an, *quantoren-logisch* ein *All-Satz*, aus dem mit einer zusätzlichen Prämisse (*Randbedingung*) ein singulärer Satz bzw. ein singuläres Ereignis erklärt wird.

Ich beschränke mich hier aber auf die aussagen-logischen Grundstrukturen.

• *Mono-Kausalität*

$X \leftrightarrow Y$ Wahrheitsverlauf : + − − +

‚Mono-Kausalität' bedeutet: es gibt nur *eine* Ursache X für die Wirkung Y. Mono-Kausalität kommt in der Wirklichkeit kaum vor, es bedeutet meistens eine Abstraktion oder Ignorierung von anderen Faktoren. Logisch entspricht dem die Äquivalenz $X \leftrightarrow Y$: Wenn X realisiert ist, muss auch Y gültig sein. Und umgekehrt. X ist *notwendig und hinreichend* für Y und umgekehrt.

• *Multi-Kausalität*

$X \rightarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + − + +

Bedeutet: X ist *hinreichend* für Y (aber nicht notwendig). Es kann auch andere Ursachen für Y geben (man kann Multi-Kausalität allerdings auch im Sinne von *Konditionalität* verstehen d. h. dass mehrere Faktoren zusammen auftreten müssen, um die Wirkung Y hervorzubringen). Dies wird am besten durch die Implikation $X \rightarrow Y$ wiedergegeben, wobei man allerdings die Positiv-Implikation $X *\!\!\rightarrow Y$ vorziehen könnte.

• *Konditionalität*

$X \leftarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + + − +

X ist eine Bedingungen von *mehreren* für Y. X ist also *notwendig* für Y (aber nicht hinreichend). Dies wird durch die Replikation $X \leftarrow Y$ ausgedrückt.

1-1-5-3 IDENTITÄT

Auch bei der Identität läst sich die logische Struktur angeben.

1. *Identität*	$X \leftrightarrow Y$	Wahrheitsverlauf: + – – +
2. *Teilhaftigkeit* (X ist Teil von Y)	$X \rightarrow Y$	Wahrheitsverlauf: + – + +
3. *Nicht-Identität*	$X \rightarrow \neg Y$	Wahrheitsverlauf: – + + +
bzw.	$\neg X \leftarrow Y$	Wahrheitsverlauf: – + + +

1-1-5-4 ZEIT

Zeit ist keine Komponente der Logik, bei logischen Relationen wird gerade von Zeit *abstrahiert*. Dennoch kann man die Logik auf die Zeit anwenden, z. B. von „immer" auf „manchmal" schließen, wie später noch gezeigt wird. Aber Zeit ist eine Komponente von *Kausalität*, hier besteht ein *Zeitverlauf*, die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Von daher kann man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i \rightarrow Y/t_j$$

't' steht für Zeit, i und j sind bestimmte Werte, wobei: i < j, d. h. der Zeitpunkt i geht dem Zeitpunkt j *voraus*. Die Formel wäre also zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i gültig ist, dann ist Y zum Zeitpunkt t_j gültig'. Aber die Bestimmungen von ‚t' gehören dabei nicht zur Logik im eigentlichen Sinn.

1-1-5-5 RAUM

Raum ist ebensowenig wie Zeit eine Komponente der Logik, obwohl sich die Logik auch auf die Dimension Raum anwenden lässt: Z. B. kann man logisch feststellen, es ist unmöglich, dass etwas *überall* (an *allen* Orten) und *nirgends* (an *keinem* Ort) gilt.

Aber *Kausalbeziehungen* – zwischen materiellen Objekten – sind auf den Raum angewiesen. Bei der eigentlichen *Verursachung* wird Materie, Energie oder Information in der Zeit und *durch den Raum übertragen*.

Auch bei der *Identität* – von materiellen Objekten – spielen *Raum* und *Zeit* eine Rolle. Identität setzt nämlich die *Gleichheit* von Ort und Zeit voraus. Im Grunde kann man ein Objekt nur virtuell von sich selbst unterscheiden.

So könnte man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i,o_i \leftrightarrow Y/t_i,o_i$$

Dabei steht 'o' für Ort. Die Formel wäre zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert ist, dann ist Y ebenfalls zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert' (und umgekehrt). Aber auch hier gilt, dies ist keine rein logische Formel mehr.

1 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

1-2-1 Einführung

1-2-1-1 TERMINOLOGIE

In diesem Kapitel wird die synthetische *Quantoren-Logik*, aber auch die mit ihr verbundene *Prädikaten-Logik* dargestellt. Der Terminus *Quantoren-Logik* bezieht sich auf die sogenannten *Quantoren*, das sind Quantitäts-Ausdrücke, in erster Linie:

1. „*alle*“, formal Λ: *All-Quantor* oder *Generalisator*
2. „*einige*“, formal V: *Partikulär-Quantor* oder *Partikularisator*

Mit diesen Quantoren werden Relationen bzw. Strukturen oder Sätze gebildet.
Man kann also unterscheiden:

• *All-Relationen (All-Sätze)*
Sie werden mit dem *All-Quantor* Λ gebildet. Λ bedeutet: „für alle gilt“.
Z. B. Λx(Fx): „für alle x gilt, sie haben die Eigenschaft F“. Genauer:
„für alle *Individuen* (individuellen Objekte) x gilt, sie haben die Eigenschaft F“.

• *Partikulär-Relationen (Partikulär-Sätze)*
Partikulär-Strukturen werden mit dem *Partikulär-Quantor* V gebildet.
V bedeutet: „für einige gilt“ oder „für mindestens ein/e/n gilt“.
Z. B. Vx(Fx): „für einige x gilt, sie haben die Eigenschaft F“.
Statt von *Partikulär-Quantor* spricht man häufiger von *Existenz-Quantor* und statt von Partikulär-Strukturen von Existenz-Strukturen bzw. Existenz-Sätzen.
‚V’ bedeutet dann: „Es gibt einige ...“ oder „es gibt mindestens ein/e/n ...“
Diese *Existenz-Deutung* ist aber sehr problematisch (wie später noch ausführlich gezeigt werden wird).

1-2-1-2 ABGRENZUNG VON DER AUSSAGEN-LOGIK

Vor allem durch die Unterscheidung von *4* Werten unterscheidet sich die Quantoren-Logik von der *Aussagen-Logik*. Die Aussagen-Logik ist eine 2-wertige Logik. Sie differiert gewissermaßen nur zwischen *alle* (= positiv) und *alle nicht* (= negativ). So gesehen wird in der Aussagen-Logik der All-Quantor *implizit* auch verwendet. Denn es steht:

$X \rightarrow Y$ für „Alle X sind Y“
$\neg(X \rightarrow Y)$ für „Alle X sind nicht Y“

Darauf (und auch auf Probleme bei dieser Bestimmung) werde ich noch eingehen.

In der *Quantoren-Logik* wird dagegen zwischen folgenden 4 Größen unterschieden:
1. *alle* 2. *alle nicht* 3. *einige* 4. *einige nicht*
Zwar wären auch andere Begriffe möglich, z. B. „nicht alle“ statt „einige nicht“ (dazu später).

Es sind also hier zu dem 2 Werten der Aussagen-Logik „alle“ und „alle nicht“ noch die Werte „einige“ und „einige nicht“ hinzugekommen. Entsprechend kann man Sätze/Relationen mit „alle“, „einige“ usw. unterscheiden. Die Aussagen-Logik ist also gewissermaßen Teil (oder ein Grenzfall) der Quantoren-Logik.

Man könnte hier einwenden: Die klassische *Aussagen-Logik* behandelt nur *nicht analysierte* Aussagen (‚A'/‚B'), während die *Quantoren-Logik* sich auf Individuen (x, y) und deren Eigenschaften (F, G) bezieht – und dies sei der wesentliche Unterschied zwischen beiden.

M. E. ist dieser Unterschied aber nicht fundamental – ich habe ja bereits gezeigt, dass sich die aussagen-logischen Relatoren durchaus auch auf Individuen, Mengen bzw. Eigenschaften anwenden lassen. Entscheidend ist viel mehr: Bei der Quantoren-Logik liegt eine *mehrwertige* Logik vor, normalerweise eine *4-wertige* Logik.

Der Begriff ‚*Quantoren-Logik*' ist wenig glücklich – genau so, wie der Ausdruck ‚*Aussagen-Logik'* nicht überzeugt. Wesentlich ist, dass bei der Quantoren-Logik normalerweise 4 Größen unterschieden werden; dass diese Unterscheidung mit *Quantoren* geschieht, ist er sekundär. Besser würde man daher den Ausdruck *4-wertige Logik* nutzen. Ich verwende aber dennoch überwiegend den Begriff ‚Quantoren-Logik', weil er eben eingeführt ist.

1-2-1-3 STRUKTUR-EBENEN

Wie die 2-wertige „Aussagen-Logik“ kann sich die 4-wertige Logik („Quantoren-Logik“) prinzipiell auf alle 3 Ebenen bzw. Relationen beziehen. Als Beispiel nehme ich „alle“:

- *Individuen-Relation*: x ist in *allen* Fällen ein F.
- *Klassen-Relation*: *Alle* Elemente von F sind auch Elemente von G.
- *Molekular-Relation*: Wenn die Relation A positiv ist, dann ist in *allen* Fällen bzw. allen Welten auch die Relation B positiv.

Nun ist es aber so, dass in der Quantoren-Logik überwiegend die *Klassen-Relationen* behandelt werden, d. h. Relationen zwischen Klassen F, G usw. (bzw. ihren Elementen, den Individuen). Man kann daher von *Klassen-Logik* sprechen.

1-2-1-4 DARSTELLUNGSFORMEN DER KLASSEN-LOGIK

Um Klassen-Relationen darzustellen, gibt es in der Logik vor allem 3 *Darstellungsmöglichkeiten*. In Klammern nenne ich jeweils die herkömmlichen Bezeichnungen; sie sind wie gesagt nicht sehr sinnvoll, aber da sie eingeführt sind, benutze ich sie auch.

1. *Ganzheits-Darstellung* (‚Mengen-Logik')
   Die Klasse bzw. Menge als ganze wird dargestellt.
2. *Kollektiv-Darstellung (*‚Quantoren-Logik')
   Die Klasse wird durch Quantoren und Individuen dargestellt.
   Man könnte auch von ‚Allgemein-Darstellung' sprechen.
3. *Individual-Darstellung* (‚Prädikaten-Logik')
   Die Klasse wird durch Individuen mit Zahl-Indizes und Relatoren dargestellt.

Genauer:

1. *Ganzheits-Darstellung (Mengen-Logik)*

Die Ganzheitsdarstellung arbeitet mit Mengen-Symbolen wie F, G bzw. Relations-Symbolen aus der *Mengenlehre* wie $\subset$ $\supset$ $\subseteq$ $\not\subset$.

2. *Kollektiv-Darstellung (Quantoren-Logik)*

Die herkömmliche Logik verwendet in erster Linie *Quantoren*, um diese Ausdrücke zu formalisieren, den *All-Quantor* Λ und den sogenannten *Existenz-Quantor* V, außerdem Prädikatoren wie ‚F', ‚G' und Individuenvariablen wie ‚x', ‚y'.

3. *Individual-Darstellung (Prädikaten-Logik)*
Auch der Terminus ‘Prädikaten-Logik' ist sehr unglücklich. Ich spreche hier z. B. von Individual-*Darstellung* und nicht von Individual-*Logik*. Denn der Terminus ‚Individual-Logik' bezieht sich nur auf *singuläre* Individuen-Relationen wie Fx. Es geht hier aber um die Individual-Darstellung einer Klassen-Logik, wobei *Zahl-Indizes* verwendet werden, z. B. $Fx_1, \dots, Fx_n$.

Ich bringe als Beispiel jeweils den Fall „alle“.

1. Ganzheits-Darstellung / Mengen-Logik
   $F \subset G$
   Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G.

2. Kollektiv-Darstellung / Quantoren-Logik
   $\Lambda x\ (x \in F \rightarrow x \in G)$
   Alle Elemente der Klasse F sind auch Elemente von G (vereinfacht)

3. Individual-Darstellung / Prädikaten-Logik
   $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \dots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$ bzw.
   $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \rightarrow x_2 \in G) \wedge \dots \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
   Element x_1 der Klasse F ist auch Element von G usw. bis zum Element x_n

1-2-1-5 MENGEN-LOGIK / GANZHEITS-DARSTELLUNG

Die Mengen-Logik spielt eine untergeordnete Rolle, ich behandele sie nur hier etwas genauer. Es geht um das Verhältnis zweier Klassen oder Mengen (F, G) als ganzer:

• alle	F ist Teilmenge von G	$F \subset G$
• nicht alle	F ist nicht Teilmenge von G	$F \not\subset G$
• einige	F schneidet G	$F \sqcap G$
• nicht einige	F schneidet nicht G	$F \neg\sqcap G$

• alle / F ist Teilmenge von G
(„alle Elemente von F sind Elemente von G“, kürzer: „alle F sind G“ bzw. „alle Fs sind Gs“).
Genauer unterscheidet man:
– F ist *echte* Teilmenge von G: $F \subset G$
  In diesem Fall ist G nicht auch Teilmenge von F, d. h. es gibt mindestens ein Element von G, das nicht Element von F ist: $G \not\subset F$.
  Somit gilt auch: $F \subset G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \not\subset F$. Oder: $F \subset G \Rightarrow G \not\subset F$
– F ist (*unechte*) Teilmenge von G : $F \subseteq G$
  $F \subseteq G$ bedeutet: $F \subset G \vee F = G$
  F ist gleich G, $F = G$, setzt voraus, dass G auch (unechte) Teilmenge von F ist: $G \subseteq F$.
  Es gilt also: $(F \subseteq G \wedge G \subseteq F) \Leftrightarrow (F = G)$

Es gibt auch eine Möglichkeit, solche Relationen zu kennzeichnen, ohne auf Mengen-*Relatoren* wie $\subset$ oder $\subseteq$ Bezug zu nehmen. Z. B. kann man für $F \subset G$ auch sagen: „Die Differenzmenge F \ G ist leer“): $F \setminus G = \varnothing$. Die *leere Menge* symbolisiert man durch $\varnothing$ oder { }.

• nicht alle = einige nicht / F ist nicht Teilmenge von G

Die *übliche* Deutung von F $\not\subset$ G ist:„einige F sind nicht G“ bzw. „mindestens ein Element von F ist nicht Element von G“. Bei dieser Deutung ist über G damit noch nichts festgelegt: Es können alle Elemente von G, einige oder kein Element von G auch Elemente von F sein.

- einige / F schneidet G

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen $\sqcap$, also F $\sqcap$ G. Denn $\cap$ ist schon vergeben für die Verknüpfung „Schnittmenge“. F $\sqcap$ G darf also nicht verwechselt werden mit F $\cap$ G für „die Schnitt-Menge F $\cap$ G“. Bei F $\sqcap$ G besteht eine *Relation*, bei F $\cap$ G wird nur eine *Menge* genannt. Es ist bezeichnend, dass es hier kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein Relator findet, der „einige F sind G“ ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre für das entsprechende „F schneidet G“, da die Mengenlehre, entsprechend der *Aussagen-Logik*, ursprünglich *2-wertig* aufgebaut ist.

Auch hier ist es möglich, auf die *Relatoren* zu verzichten. Indem man nämlich angibt, die *Schnitt-Menge* von F und G ist gefüllt bzw. ist nicht leer. Man würde dann formal schreiben:
F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G $\neq \varnothing$ (somit ist eine Relation formuliert).

- nicht einige = alle nicht / F schneidet nicht G

„F schneidet nicht G“ ist die Verneinung von „F schneidet G“, sowie „nicht einige F sind G“ die Verneinung von „einige F sind G“ ist. Für diese Relation gibt es leider kein vorgegebenes Symbol; in Anlehnung an $\sqcap$ verwende ich $\neg\sqcap$, also mit davor geschriebenem *Negator*. Für „F schneidet nicht G’“, also: F $\neg\sqcap$ G.

F $\neg\sqcap$ G heißt „alle Elemente von F sind nicht Elemente von G“. Daraus folgt aber: „alle Elemente von G sind nicht Elemente von F“. $\sqcap$ und entsprechend $\neg\sqcap$ sind *symmetrische* Relatoren. D. h. es gilt: F $\sqcap$ G $\Leftrightarrow$ G $\sqcap$ F bzw. F $\neg\sqcap$ G $\Leftrightarrow$ G $\neg\sqcap$ F

Auch hier kann man statt Relatoren *Verknüpfungsoperatoren* ($\cap$) verwenden. Indem man nämlich angibt: „die Schnittmenge von F und G ist leer“. F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G = $\varnothing$.

1-2-2 Implikation

Hier geht es nicht nur um die Verwendung der Implikation $\rightarrow$, sondern generell um *Kopula*-Strukturen der Form: X ist (ein) Y, wobei *einfache* und *komplexe* Relationen vorkommen.

1-2-2-1 EINFACHE UND KOMPLEXE RELATIONEN

Man kann *einfache* = atomare und *komplexe* = molekulare *Relationen* bzw. *Strukturen* bzw. *Aussagen* bzw. *Sätze* (ich wechsle diese Begriffe ab) unterscheiden:

- *einfache Relationen* (atomar)
  In einfachen Relationen kommt nur *ein* Prädikator (F) vor. Also z. B.:
  Λx(Fx) oder Vx$\neg$(Fx).
  Man schreibt den Prädikatausdruck mit implizitem Relator Fx (gemischt extensional-intensional) oder x $\in$ F (extensional); so wird der Aussage nur *ein* Wert zugeordnet, wahr oder falsch. Im Sinne einer einheitlichen, *funktionalen* Logik würde man allerdings die Implikation bzw. (Positiv-Implikation) einsetzen. Man schriebe also:
  Λx(x $\rightarrow$ F) oder Vx$\neg$(x $\rightarrow$ F).

Hier wird dann der (Wahrheits-)Wert von $x \rightarrow F$ als *Funktion* der Werte für x und für F ermittelt.

- *komplexe Relationen* (molekular)
Bei komplexen Strukturen kommen 2 oder mehr *Prädikatoren* (F, G. usw.) vor. Die einzelnen Prädikate werden meist durch die Implikation $\rightarrow$, aber auch die Konjunktion o. a. verbunden.
Implikation, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, Konjunktion z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$.
Wie ich allerdings nachher zeigen werde, ist die *Positiv-Implikation* überlegen.
Höher-komplex sind Relationen, bei denen zwei oder mehr *Individuen-Variablen* x, y verwendet werden, es handelt sich um *mehr-stellige* Prädikate, z. B.:
$\Lambda x \Lambda y(F(x,y))$: für alle x, alle y gilt: x steht zu y in der Relation F.
$\Lambda x Vy(F(x,y))$: für alle x gilt, es gibt mindesten ein y, so dass x zu y in der Relation F steht.

Prädikaten-Logik
Die *Quantoren-Logik* setzt die *Prädikaten-Logik* voraus. Der Begriff ‚Prädikaten-Logik' rührt daher, dass man hier nicht mehr Aussagen *als ganze* betrachtet, sondern sie zerlegt in *Subjekt* und *Prädikat* bzw. in Individuatoren und Prädikatoren. Der Begriff ist aber unglücklich, denn es geht darum, dass hier *Individuen* Eigenschaften zugeordnet werden bzw. ihnen das Enthaltensein in einer Klasse zugesprochen wird. Man spräche besser von ‚*Individuen-Logik'* bzw. von ‚Individual-Darstellung der Klassen-Logik'. Ich verwende aber vorwiegend die eingeführte Bezeichnung ‚Prädikaten-Logik'.

Zum *Verhältnis von Quantoren- und Prädikaten-Logik*: Man kann einerseits die Quantoren-Logik als aussagestärker ansehen, quasi als Prädikaten-Logik + Quantoren. Wenn man aber in der Prädikaten-Logik anstatt Quantoren *Zahl-Indizes* (1, 2, n) verwendet, so erhält man *implizit* mehr Präzision als in der Quantoren-Logik. Man könnte das auch so deuten, dass die Quantoren-Logik *Mengen*, die Prädikaten-Logik aber *Folgen* (geordnete Mengen) behandelt.

Quantoren-logische und prädikaten-logische Formeln lassen sich als logisch *äquivalent* ($\Leftrightarrow$) interpretieren. Aber es dürfte präziser sein, hier von *Definitionen* auszugehen. Für 'ist definiert' kann man schreiben: ‚$=_{df}$' (oder auch ‚$\leftrightarrow_{df}$').

So kann man die quantoren-logische All-Relation wie folgt in Prädikaten-Logik übersetzen:

- *Einfache Relation*
$\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge ... \wedge Fx_n$
- *Komplexe Relation*
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) =_{df} (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Man beachte die graphische *Ähnlichkeit* von *Quantoren* und *Junktoren:* V und $\vee$, Λ und $\wedge$. Diese Ähnlichkeit ist natürlich gewollt. Denn der All-Quantor Λ wird prädikaten-logisch durch die *Konjunktion* $\wedge$ ausgedrückt, der *Partikulär-Quantor* V dagegen durch die Disjunktion $\vee$. Die Ähnlichkeit zeigt sich allerdings nicht, wenn man die gebräuchlichsten Symbole verwendet. Denn die häufigsten Symbole sind:

$\forall$ für den All-Quantor
$\exists$ für den Existenz-Quantor (Partikulär-Quantor).

1-2-2-2 EINFACHE RELATIONEN

Zunächst eine Übersicht über die beiden positiven Relationen $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$:

• *All-Relationen (bzw. All-Sätze)*
Alle x sind F
- Intensional
formal: $\Lambda x(Fx)$ „Für alle x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F“
- Extensional
formal: $\Lambda x(x \in F)$ „Für alle x gilt: sie sind Elemente der *Klasse* F“
- Funktional
formal: $\Lambda x(x \rightarrow F)$ „Für alle x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist auch F belegt“

• *Partikulär-Relationen (bzw. Partikulär-Sätze)*
einige x sind F
- Intensional
formal: $Vx(Fx)$ „Für einige x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F“
- Extensional
formal: $Vx(x \in F)$ „Für einige x gilt, sie sind Elemente der *Klasse* F“
- Funktional
formal: $Vx(x \rightarrow F)$ „Für einige x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist F belegt“

Was hier als „*intensional*“ angegeben wird, ist streng gesehen „*gemischt extensional-intensional*“, weil Objekten (extensional) Eigenschaften (intensional) zugesprochen werden.

Um möglichst *einfache Formalisierungen* zu verwenden, schreibe ich auch:

Normal	Vereinfacht
$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda(X)$
$Vx(Fx)$	$V(X)$
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Lambda(X \rightarrow Y)$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$V(X \rightarrow Y)$

Nur bei bestimmten komplexen Aussagen muss man *Individuenvariablen* verwenden und die *Klassenzeichen* ‚F’ und ‚G’ verwenden.

Übersicht über alle 4 Strukturen der Quantoren-Logik, auch in Prädikaten-Logik

	Intensional	Extensional	Kurz-Form
1. alle x sind F			
Quantoren-Logik:	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n$	$x_1 \in F \wedge ... \wedge x_n \in F$	$X_1 \wedge ... \wedge X_n$
2. alle x sind nicht F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \wedge ... \wedge x_n \notin F$	$\neg X_1 \wedge ... \wedge \neg X_n$
3. einige x sind F			
Quantoren-Logik:	$Vx(Fx)$	$Vx(x \in F)$	$V(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \vee ... \vee Fx_n$	$x_1 \in F \vee ... \vee x_n \in F$	$X_1 \vee ... \vee X_n$
4. einige x sind $\neg$F			
Quantoren-Logik:	$Vx\neg(Fx)$	$Vx(x \notin F)$	$V\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \vee ... \vee \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \vee ... \vee x_n \notin F$	$\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_n$

Für "alle x gilt: sie sind nicht Elemente von F" könnte man auch $\Lambda x \neg(x \in F)$ statt $\Lambda x(x \notin F)$ schreiben – und entsprechend.

1-2-2-3 KOMPLEXE RELATIONEN

• *All-Strukturen (All-Sätze)*
alle x, die F sind, sind auch G (kurz: alle F sind G)
- intensional
  formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  „Für alle x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, haben sie auch die Eigenschaft G"
- extensional
  formal: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
  „Für alle x gilt: wenn sie Elemente der Klasse F sind, sind sie auch Elemente von G"
- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $\Lambda x((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  "Für alle x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G"

Die Negationen sind keineswegs trivial: z. B. wäre zwischen $\Lambda x \neg(Fx \rightarrow Gx)$ oder $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ zu wählen (vgl. dazu die spätere Diskussion).

• *Partikulär-Strukturen (Partikulär-Sätze)*
einige x, die F sind, sind auch G / bzw.: *es gibt* einige x ... (kurz: einige F sind G)
- intensional
  formal: $Vx(Fx \wedge Gx)$
  „Es gibt einige x, für die gilt: sie besitzen die Eigenschaft F und die Eigenschaft G"
- extensional
  formal: $Vx(x \in F \wedge x \in G)$
  „Es gibt einige x, für die gilt: sie sind Elemente der Klasse F und Elemente der Klasse G"
- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $Vx((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  "Für einige x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G"

Die obigen Formalisierungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ für komplexe Strukturen sind die gängigsten. Danach werden *All-Relationen* mit dem *Implikator* $\rightarrow$ und *Partikulär-Relationen* mit dem *Konjunktor* $\wedge$ geschrieben (zur Kritik: u. a. 1-2-2-5: Existenz-Problem).

1-2-2-4 WAHRHEITS-TAFELN

Wie überprüft man die *Wahrheitsbedingungen* einer quantoren-logischen Relation? Der sicherste Weg wäre die *Wahrheitstafel*. Die Frage ist aber: Lassen sich in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufstellen? Damit verbunden: Sind quantoren-logische Relationen streng *wahrheitswert-funktional*?

Ich werde nachfolgend die verschiedenen Möglichkeiten durchspielen, vor allem für Experten. Eins ist aber klar: Es lassen sich für *quantoren-logische* Relationen nicht so einfach Wahrheitstafeln aufstellen wie für *aussagen-logische*. Ich werde mich hier zur Demonstration auf $\Lambda x(Fx \to Gx)$ beschränken, für $Vx(Fx \to Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ ergäben sich grundsätzlich ähnliche, aber durchaus auch abweichende Ergebnisse.

• *quantoren-logische Analyse*
Für $\Lambda x(Fx \to Gx)$ lässt sich nicht ohne weiteres eine Wahrheitstafel aufstellen. Denn wie soll man den Quantor behandeln, ihm einen *eigenen* Wahrheitswert geben?

Es ließe sich aber sehr gut eine Wahrheitstafel aufstellen, wenn man $\Lambda x(Fx \to Gx)$ umformte in $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$. Dann ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$\to$	$\Lambda x(Gx)$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

(Tafel 1)

Hier lässt sich z. B. schließen: $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$

Aber sind $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$ gleichzusetzen, sind sie logisch äquivalent? Man kann diese Aussagen folgendermaßen übersetzen (andere Übersetzungen sind möglich):

$\Lambda x(Fx \to Gx)$: „Für alle x gilt: wenn sie F sind, dann sind sie auch G“

$\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$: „Wenn für alle x gilt, sie sind F, dann gilt für alle x auch, sie sind G“.

Offensichtlich liegt *keine Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ vor, denn es gilt nur $\Rightarrow$:

$\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$, vgl. unten die prädikaten-logische Analyse.

Wir wollen dennoch mit $\Lambda x(Fx \to Gx)$ weiterarbeiten, da uns dieser Ausdruck vor allem interessiert, denn so formalisiert man normalerweise All-Sätze. Allerdings ist es problematisch, $\Lambda x(Fx \to Gx)$ in der Wahrheitstafel auf $\Lambda x(Fx)$ und $\Lambda x(Gx)$ zurückzuführen.

Dazu wählen wir aber besser eine *andere*, schon eingeführte Form der Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

(Tafel 2)

Die 4 Zeilen sind in einem ersten Schritt – konjunktiv – wie folgt zu deuten (das – in der Wahrheitstafel wird hier durch den Negator $\neg$ ersetzt):

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x\neg(Fx \to Gx)$
3. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
4. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$

Da es sich aber um eine *quantoren-logische* Wahrheitstafel lautet, ist es adäquater, für + das Zeichen Λ und für – das Zeichen $\neg\Lambda$ einzusetzen (käme der Partikulär-Quantor V vor, würde man den in der Wahrheitstafel einsetzen). Somit ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$
1.	Λ	Λ	Λ
2.	Λ	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$
3.	$\neg\Lambda$	Λ	Λ
4.	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	Λ

(Tafel 3)

Die Zeilen der Wahrheitstafel 3 werden primär folgendermaßen interpretiert:

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
3. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Zwischen Tafel 2 und Tafel 3 bestehen folgende Unterschiede:

In Tafel 3 wird Λ durch $\neg\Lambda$ negiert (*kontradiktorische* Negation), und das ist die primäre, korrekte *quantoren-logische Negation*. In diesem Fall besteht aber in der 4. Zeile nur ein *semi-analytischer*, d. h. *partieller* Schluss; bei der obigen konjunktiven Interpretation der *Wahrheitstafel* verlangt man jedoch für *alle* Zeilen *strenge* Schlüsse der Form $\Phi \Rightarrow \Psi$.

In Tafel 2 wurde Λ (entsprechend +) durch $\Lambda\neg$ (entsprechend –) negiert (*konträre* Negation). Das entspricht der *Aussagen-Logik*. Hier gelten in allen 4 Zeilen *strenge* Schlüsse.

Die Frage ist, ob man daraus folgenden Schluss ziehen könnte (wie es häufig behauptet wird): Dass nämlich die Wahrheitstafel im engeren Sinn nicht für die *Quantoren-Logik*, sondern nur für die *Aussagen-Logik* konzipiert ist und nur dort volle Gültigkeit erreicht. Das hieße aber auch, dass der *wahrheitswert-funktionale* Ansatz quantoren-logisch nur bedingt verwendbar ist; nicht bei Sätzen mit mehrfachem $\neg\Lambda$ (entsprechend V oder V$\neg$).

Nun zeigt sich aber, wenn man den alternativen Ausdruck $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ verwendet, sind *alle* Zeilen der Wahrheitstafel korrekt, auch die letzte (4.). Hier gilt der *strenge* Schluss:

$$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \;\Rightarrow\; \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$$

D. h. aber, wenn die *Prämissen* ganz *genau* der *Konklusion* entsprechen, erhält man vollständig richtige Resultate. Wie Wahrheitstafel ist also offensichtlich doch in der Quantoren-Logik ohne Einschränkungen einzusetzen.

• *prädikaten-logische Analyse*

Die beste Möglichkeit, in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufzustellen, ist aber, auf die *Prädikaten-Logik* zurückzugreifen, den *quantoren-logischen* in einen *prädikaten-logischen* Ausdruck übersetzen: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$.

Eine *vollständige* Wahrheitstafel lässt sich hier zwar normalerweise nicht aufstellen (weil n dafür zu groß oder sogar unendlich groß ist), aber um nur die Wahrheits-*Struktur* der Relation zu erkennen genügt es, von n = 2 auszugehen, also von: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$.

Wir können *prädikaten-logisch* jetzt auch nachweisen, dass die 4. Zeile in der obigen Wahrheitstafel kein *strenger* Schluss ist. Ich will allerdings nicht die gesamte Wahrheitstafel darstellen, sondern nur den entscheidender Werteverlauf (für n = 2):

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$

Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$): + + + + + + – – + – + – + + + +

Dagegen ergibt sich für $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ ein strenger Schluss:

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$

Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2) \rightarrow (Gx_1 \wedge Gx_2)$

Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\Rightarrow$): + + + + + + + + + + + + + + + +

Die Prädikaten-Logik lässt sich *strukturell* weitgehend auf die Aussagen-Logik reduzieren. Daher kann man für $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$ strukturell äquivalent auch schreiben (ohne Prädikatoren und Individuen-Zeichen): $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$. Oder noch einfacher, *rein aussagen-logisch*: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$.

Allerdings gibt es *keine vollständige strukturelle Reduzierbarkeit* von *Prädikaten-Logik* auf *Aussagen-Logik*. Denn mit den *Indizes* 1, 2, ... , n kann man *explizit* „alle“ und insbesondere auch „einige“ ausdrücken, was in der reinen Aussagen-Logik nicht möglich ist.

1-2-2-5 EXISTENZ-PROBLEM

Bei der Quantoren-Logik stellt sich das *Existenz-Problem*, und zwar in doppelter Weise:

Erstens, wir kennen es bereits von der *Implikation* in der *Aussagen-Logik*: Die Implikation ist auch dann gültig, wenn ihr Vorderglied nicht gültig (falsch) ist.

Das bedeutet hier in der *Quantoren-Logik*: Der *All-Satz* $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ ist auch wahr, wenn $\Lambda x(Fx)$ falsch ist. Es geht um die *konträre* Negation $\Lambda x\neg(Fx)$, nicht um die *kontradiktorische* Negation $\neg\Lambda x(Fx)$. $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Im Beispiel: Der Satz Λx(Mensch x $\rightarrow$ sterblich x) – ‘alle Menschen sind sterblich’ – ist auch dann wahr, wenn es gar keinen Menschen gibt.

Zweitens, noch komplizierter wird die Sache aber dadurch, dass vielfach behauptet wird, *Partikulär*-Sätze beinhalteten sehr wohl eine *Existenz-Behauptung*, anders als *All*-Sätze. Denn ein Satz wie z. B. ‘einige Lehrer sind klug’ gilt nur als wahr, wenn es auch Lehrer gibt.
Zugespitzt, nach der üblichen Darstellung der Quantoren-Logik gilt:
- ‚Alle Lehrer sind klug’: setzt *keine* Existenz von Lehrern voraus.
- ‚Einige Lehrer sind klug’: setzt die Existenz von Lehrern voraus.

Um das zu betonen, formuliert man: ‚Es gibt einige Lehrer, die klug sind’.

Diese behauptete *Existenz-Asymmetrie* von All- und Partikulär-Sätzen ist m. E. zu kritisieren. Es ist schon problematisch, wenn die Implikation so interpretiert wird, dass sie auch wahr ist, wenn der Vordersatz falsch ist. Dass dies aber auch bei einem All-Satz gelten soll, widerspricht völlig unserer Intuition und dem normalsprachlichen Gebrauch von All-Sätzen (eine mögliche Lösung ist die Positiv-Implikation, vgl. später). Gar nicht einzusehen ist aber zunächst die *Asymmetrie*, dass Sätze mit „einige“ die Existenz voraussetzen sollen. Einige wichtige Punkte hierzu werden nachfolgend diskutiert.

- „Alle“ entspricht 100%, es ist eine *relative Größe*. „Einige“ kann aber in der normalen Sprache sowohl eine *absolute* wie eine *relative* Größe sein. Quantitativ kann „einige“ sowohl 0 wie 0 % bedeuten (was äquivalent ist). Der Unterschied zeigt sich z. B. wie folgt: Man kann sagen: „Es gibt *einige* Lehrer, die klug sind“. Man kann aber nicht sagen: „Es gibt *alle* Lehrer, die klug sind“. Solche Zufälligkeiten der normalen (deutschen) Sprache dürfen aber nicht dazu dienen, eine folgenschwere Unterscheidung in der Logik zu treffen.
- Ein wesentlicher Schluss in der Quantoren-Logik ist der *Schluss von „alle“ auf „einige“*: was für alle x gilt, soll auch für (mindestens) einige x gelten. Setzt man bei Partikulär-Sätzen Existenz voraus, bei All-Sätzen aber nicht, dann ist dieser zentrale Schluss ungültig.
- Ein große Rolle spielt dabei, dass man üblicherweise *All-Sätze* mit der *Implikation* $\rightarrow$ formalisiert werden, z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, und *Partikulär-Sätze* mit der *Konjunktion* $\wedge$, z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$, eine unterschiedliche Strukturierung, die sehr problematisch ist. Denn die Konjunktion setzt, anders als die Implikation, die Wahrheit / Existenz beider Glieder voraus.

1-2-3 Positiv-Implikation

Eine mögliche *Lösung des Existenz-Problems* ist, dass man die *Positiv-Implikation* verwendet, und zwar sowohl bei den All-Relationen wie bei den Partikulär-Relationen.

1-2-3-1 ALLGEMEIN

Das Problem mit der Implikation $X \rightarrow Y$, dass sie bei falschem Vordersatz ($\neg X$) als wahr gilt, ist letztlich unabhängig von All-Sätzen- und Partikulär-Sätzen.

Und ich habe schon hingewiesen, dass man dieses Problem der Implikation $X \rightarrow Y$ vermeiden kann, wenn man die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\!\rightarrow Y$ verwendet. Denn die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen der Vordersatz X wahr ist.

1-2-3-2 ALL-RELATIONEN

Bei All-Relationen bzw. All-Sätzen ergeben sich wichtige Änderungen durch die Ersetzung der Implikation durch die *Positiv-Implikation*, konkret für den All-Satz $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$:

$$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$$

Wenn die Einzelsätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ falsch sind, dann ist der obige Satz *nicht definiert*. Umgekehrt, wenn $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ wahr ist, müssen alle Einzel-Sätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ wahr sein; eventuell muss auch nur $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ wahr sein (das wird im quantitativen Teil diskutiert). Somit enthält $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ jedenfalls eine *Existenz-Behauptung*, es wird ausgesagt, dass F existiert, dass die Klasse F nicht leer ist; dies gilt ebenso für die Klasse G.

1-2-3-3 PARTIKULÄR-RELATIONEN

Man kann den *Partikulär-Satz* ebenfalls unproblematisch mit dem Positiv-Implikator formalisieren: $Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$. Daraus folgt: $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ müssen wahr sein, d. h. es reicht, dass *einer* von diesen Sätzen wahr ist, und das wird ja genau durch 'mindestens einer' ausgedrückt. Auch hier besteht eine *Existenz-Garantie*: Die Klasse F ist „gefüllt", sie hat mindestens 1 Element. Somit ist die gewünschte *Symmetrie* zu All-Sätzen gegeben.

1-2-3-4 NEGATIONEN

Wie ist ein negierter Satz der Form $\neg X \ast\!\!\rightarrow Y$ zu interpretieren? Ich habe erläutert, die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) gültig bzw. wahr ist. Das ist hier folgendermaßen zu verstehen: $\neg X$ muss wahr sein, also muss X falsch sein. Es werden also nur die Welten berücksichtigt, in denen $\neg X$ wahr ist.

Entsprechend bedeutet das für All- und Partikulär-Sätze:
Bei $\Lambda x(\neg Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ muss $\neg F$ wahr sein, F also falsch. Bei $Vx(\neg Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ gilt dasselbe.

1-2-3-5 MODELL POSITIV-IMPLIKATION

Nachfolgend wird ein Modell der Positiv-Implikation vorgestellt.

1. alle F sind G	Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G	Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
3. einige F sind G	Quantoren-Logik: $Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G	Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$

1-2-4 Systematik

Man kann die *Quantoren* natürlich auch auf andere Relationen anwenden, z. B. auf die *Disjunktion* $Vx(Fx \vee Gx)$, auf $\Lambda\neg(Fx \mid Gx)$ usw. Aber das wichtigste ist die *Kopula*-Funktion, die überwiegend mittels der *Implikation* oder auch mittels der *Konjunktion* realisiert wird.

Und hierfür werde ich jetzt verschiedene Modelle vorführen und diskutieren (wobei ich die *gemischt extensional-intensionale* Form wähle, also z. B. ‚Fx' und nicht ‚$x \in F$' schreibe).

1-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

Ein besonders *systematisches* Modell ist das folgende: dabei werden *alle* Strukturen mit der *Implikation* formalisiert; die *Negation der Implikation* wird durch Setzung des Negators $\neg$ vor der Klammer vorgenommen.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Diskussion

Hier ergeben sich folgende Verhältnisse:

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ setzt keine Existenz von F (oder G) voraus.
- $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur ist äquivalent mit $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$.
  Das wird später genauer erläutert. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide (alle) Glieder wahr sind. Insofern wird die Existenz von F vorausgesetzt (aber nicht von G).
- $Vx(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur setzt wiederum keine Existenz voraus.
- $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$ ist äquivalent der Konjunktion $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$. Somit wird hier wieder die Existenz von F vorausgesetzt.

Dieses Ergebnis ist unbefriedigend. Es ist wenig plausibel, dass gelten soll:
„Alle F sind G" impliziert nicht die Existenz von F. Aber:
„Alle F sind nicht G" impliziert die Existenz von F.
(Entsprechendes gilt bei den partikulären Strukturen.) Auch dieses fast paradoxe Ergebnis geht auf die Definition der Implikation zurück.

1-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell bietet sich zunächst einmal an, weil es ebenfalls sehr systematisch ist. Es wird immer *derselbe Relator*, der Implikator $\rightarrow$ verwendet. Aber man stößt wie schon angedeutet auf das *Existenz-Problem*, hier allerdings gleichermaßen für All-Relationen und Partikulär-Relationen, für beide wird *keine Existenz-Behauptung* aufgestellt.

1-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik:$(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Bei diesem Modell gibt es *bei allen 4 Fällen* eine Existenz-Behauptung (für F).Das Modell ist aber sehr unplausibel. So würde „alle F sind G“ übersetzt als „alle x sind F und G“. Im Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“ würde übersetzt in: „Alle Objekte sind Menschen und sterblich“. Das wäre absurd, denn dann wären ja alle Dinge auf der Welt sterbliche Menschen.

1-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Dieses Modell ist am weitesten verbreitet. Danach werden All-Sätze und Partikulär-Sätze unterschiedlich formalisiert, *All-Sätze mit Implikation* und *Partikulär-Sätze mit Konjuktion*.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Hier ergibt sich das anfangs genannte Ergebnis. Die *All-Strukturen* behaupten *keine Existenz*, die *Partikulär-Strukturen* dagegen *ja*. Wie ich erläutert habe, ist das wenig überzeugend.

1-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell ist ohne Zweifel das überzeugendste und eleganteste: es ist systematisch, macht bei All-Sätzen wie Partikulär-Sätzen eine *Existenz-Behauptung*, und es erfüllt – wie später gezeigt werden wird – auch die gewünschten *analytischen Relationen*. Man könnte dem Modell allenfalls vorwerfen, dass es nicht *alle möglichen Welten* mit einbezieht.

1-2-5 Erweiterungen

1-2-5-1 INKLUSIV - EXKLUSIV
Ich habe die Unterscheidung von *inklusiv* vs. *exklusiv* (*einschließend* vs. *ausschließend*) schon eingeführt, aber bezogen auf die *oder*-Konjunktion. Es wurde unterschieden zwischen:
- der *Disjunktion* $\vee$ als inklusivem „oder“
- der *Kontravalenz* $><$ als exklusivem „oder“

Daneben gibt es wie beschrieben die sogenannte Exklusion | bzw. (X | Y).

Die Disjunktion X ∨ Y heißt *inklusiv*, weil sie die Möglichkeit *einschließt*, dass auch X und Y beide gültig sind (also X ∧ Y gültig ist). Das *exklusive* „entweder – oder" *schließt* X ∧ Y dagegen *aus*, es kann nur *entweder* X *oder* Y gültig sein.

Entsprechend kann man in der *Quantoren-Logik* zwischen *inklusiv* und *exklusiv* unterscheiden. Und zwar geht es hier um den Partikulär-Quantor „einige". Das inklusive „einige" schließt auch die Möglichkeit ein, dass „alle" gültig ist. Der Satz (bzw. die Relation) „einige Menschen sind neugierig" schließt die Möglichkeit ein, dass gilt: „Alle Menschen sind neugierig". Dagegen schließt das exklusive „einige" aus, dass auch „alle" richtig sein kann.

Als Symbole wähle ich:

- inklusives „einige": V
- exklusives „einige": ∃

Z. B. ∃x(Fx) oder ∃x(Fx ∧ Gx) oder ∃x(Fx → Gx) oder ∃x(Fx *→ Gx).

Die Unterscheidung „inklusiv – exklusiv" bezieht sich nur auf den *Partikulär-Quantor* V, der All-Quantor Λ bleibt davon unberührt.

Die Verbindung zwischen „oder" und „einige" zeigt sich auch dadurch, dass man das inklusive „einige" prädikaten-logisch mit dem inklusiven „oder" ∨ formalisiert, das exklusive „einige" dagegen mit dem exklusiven „oder" (><).

	inklusiv	*exklusiv*
oder	oder: ∨	entweder – oder: ><
einige	mindestens einer: V	genau einige: ∃

Die *inklusive* Quantoren-Logik führt wie beschrieben zu *4* Größen: Λ, Λ¬, V, V¬.

In der exklusiven Quantoren-Logik gilt aber: ∃x ⇔ ∃x¬, z. B. ∃x(Fx) ⇔ ∃x¬(Fx).
So kommt man hier zu einer 3-fachen Unterscheidung: Λ, Λ¬, ∃x (⇔ ∃x¬)

Aber die (inklusiven) Quantitätsstufen bzw. die Werte „alle / alle nicht / einige / einige nicht" lassen sich noch ergänzen, vor allem durch:

- *die meisten*
- *die meisten nicht (bzw. die wenigsten)*

Man käme auf diese Weise zu einer *6-wertigen* Logik (inklusiv) bzw. zu einer *5-wertigen* Logik (exklusiv). Allerdings gibt es in der herkömmlichen Logik für die (normalsprachlichen) Ausdrücke '*die meisten*' und *'die meisten nicht'* keine Quantoren. Man könnte zusätzliche Quantoren einführen. Aber ich verzichte darauf, weil im Rahmen der nachfolgend vorgestellten *quantitativen* Logik „die meisten" usw. gut darzustellen sind und überhaupt viel genauere quantitative Abstufungen vorgenommen werden können.

1-2-5-2 DIMENSIONEN

Man kann die Quantoren „alle" und „einige" auf andere *Dimensionen* wie *Raum* oder *Zeit* beziehen. So ergibt sich z. B. „alle"/Raum: *überall*, „einige"/Raum: *mancherorts*. Systematisch:

	Zeit	*Raum*
alle	immer	überall
die meisten	meistens	meistenorts
einige	manchmal	manchenorts
die wenigsten	selten	(seltenenorts)
alle nicht	niemals	nirgendwo

Aber dies führt aus der Logik im engeren Sinn hinaus.

Die *Quantifizierung von Zeit* darf nicht so verstanden werden, als beinhalte eine logische Relation selbst einen Zeitfaktor, Entsprechendes gilt für den *Raum*.

1-2-5-3 MODAL-LOGIK

Im Gegensatz zu einer Raum- oder Zeit-Logik lässt sich eine sogenannte *alethische Modal-Logik* im streng logischen Sinn aufbauen. Dabei wird unterschieden zwischen *notwendig* (nicht) und *möglich* (nicht). Zwar kann man die Modal-Logik *über-logisch*, z. B. in Bezug auf *Kausalität* definieren, aber die Modalbegriffe sind auch in *rein logische* Begriffe zu übersetzen. Dabei gibt es folgende Entsprechungen (Einteilung wie in der Quantoren-Logik):

alle	notwendig	N	⇔	¬M¬	nicht möglich nicht
alle nicht	notwendig nicht	N¬	⇔	¬M	unmöglich
einige	möglich	M	⇔	¬N¬	nicht notwend. nicht
einige nicht	möglich nicht	M¬	⇔	¬N	unnotwendig

Man könnte auch *nur* vom Begriff „notwendig“ ausgehen und dessen Variationen als *Basis* nehmen (bzw. nur vom Begriff „möglich“ ausgehen). Aber es bewährt sich, jeweils die *einfachsten* Formen zu nehmen, und dann erhält man als Ausgangsbasis eine *Kombination* von Notwendigkeits-Begriffen und Möglichkeits-Begriffen. Entsprechend habe ich bei der *Quantoren*-Logik „alle“ und „einige“ als Basis-Begriffe verwendet. Ich gebe in der obigen Übersicht rechts aber auch die *alternativen* Notwendigkeits- bzw. Möglichkeits-Begriffe an; genauer wird deren Verhältnis aber erst im Teil über *analytische* Modal-Logik erörtert.

Wenn man *vier verschiedene* Begriffe verwendet, erhält man:

notwendig – möglich – unnotwendig – unmöglich.

Anstatt *unnotwendig* wird häufig *zufällig* oder *kontingent* angegeben, aber besser definiert man *zufällig* anders: zufällig (x) ⇔ unnotwendig (x) ∧ möglich (x). Denn *unnotwendig* schließt auch Unmöglichkeit als Grenzfall ein, was für den Zufallsbegriff nicht erwünscht ist.

Für *einfache Relationen* ergibt sich quantoren-logisch (im analytischen Teil, Kapitel 2, wird das weiter differenziert):

Λx(Fx)	$N(Fx_i)$	‘Fx_i ist notwendig’	‚nicht-Fx_i ist unmöglich’
Λx¬(Fx)	$N\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx_i ist notwendig’	‚Fx_i ist unmöglich’
Vx(Fx)	$M(Fx_i)$	‘Fx_i ist möglich’	‚nicht-Fx_i ist unnotwendig’
Vx¬(Fx)	$M\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx_i ist möglich’	‘Fx_i ist unnotwendig’

Wenn *alle* x (als Klasse) die Eigenschaft F haben, bedeutet dies also: Es ist *notwendig*, dass jedes individuelle x die Eigenschaft F hat. Hier bieten sich zwei Alternativen an:

– logische *Äquivalenz*: $\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow N(Fx_n)$.
  Hier sind beide Ausdrücke analytisch äquivalent bzw. definieren sich wechselseitig.
  Man verwendet dann am besten x_n, das für *jedes beliebige* x steht.

– logische *Folge*: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$
  Hier folgt ein Ausdruck aus dem anderen.
  Man verwendet am besten x_i, das für ein *bestimmtes x* steht.

Bzw. für „möglich“:

– logische Äquivalenz: $Vx(Fx) \Leftrightarrow M(Fx_i)$

– logische Folge: $Vx(Fx) \Rightarrow M(Fx_i)$

1-2-5-4 ERWEITERTE QUANTOREN-VERWENDUNG

Ich habe mich in diesem Punkt 1-2 bisher auf quantoren-logische Ausdrücke mit nur *einer* Individuen-Variable ‚x' beschränkt. Denn wie schon erläutert: Mir geht es primär darum, die *fundamentalen, wesentlichen Strukturen* der Logik darzustellen, diese aber ausführlich, detailliert und mit vielen Erweiterungen und Erneuerungen. Dazu reichen die *einfachen* quantoren-logischen Sätze aus, ja man kann an ihnen sogar am besten und übersichtlichsten die Grundstrukturen erklären.

Natürlich ist es aber auch möglich, *komplexere* quantoren-logische Ausdrücke zu bilden:

- mit mehreren Individuen-Variablen
  z. B. $\Lambda x\ \Lambda y(Fx \rightarrow Gy)$
  „Für alle x, alle y gilt: Wenn x die Eigenschaft F hat, dann hat y die Eigenschaft G"

- mit Identität
  z. B. $\Lambda x(x = x)$
  „Für alle x gilt: x ist identisch mit x"

Dabei wird die *Identität* normalerweise mit dem ‚=' ausgedrückt. Die Identität wird in vielen quantoren-logischen Darstellungen als etwas Besonderes und Kennzeichen einer höheren Quantoren-Logik herausgestellt. Man kann aber i. allg. das ‚=' durch den Äquivalenz-Relator ‚↔' ersetzen. Es geht also um eine ganz normale logische Relation $\Phi \leftrightarrow \Psi$, die durchaus im Rahmen der einfachen Quantoren-Logik abgehandelt werden kann. Einmal davon abgesehen, dass Identität eigentlich auch *raum-zeitliche* Übereinstimmung verlangt, die Logik abstrahiert aber von Raum und Zeit, sie kann also Identität gar nicht vollständig abbilden.

- Anwendung der Quantoren auf Eigenschaften bzw. Klassen
  z. B. $VF(Fx_i)$
  „Für einige Eigenschaften F gilt: x_i besitzt diese Eigenschaften"
  oder:
  z. B. $VF(x_i \in F)$
  „Für einige Klassen F gilt: x_i ist Element dieser Klassen"

Dies darf nicht mit der *intensionalen Quantifizierung*, der Angabe des *Grades* einer Eigenschaft verwechselt werden, wie sie im folgenden Punkt 1-2-5-5 beschrieben wird.

- Kombinationen

Selbstverständlich gibt es auch Kombinationen der obigen Ansätze:
  z. B. $\Lambda x\ \Lambda y[x = y \leftrightarrow \Lambda F(x \in F \rightarrow y \in F)]$

1-2-5-5 INTENSIONALE QUANTOREN-LOGIK

Ich habe bisher nur eine *extensionale* Quantoren-Logik dargestellt, die sich auf *Klassen* oder Mengen bezieht, wie dies auch der gängigen Darstellung entspricht. Man kann aber auch eine *intensionale* Quantoren-Logik formulieren, die *Eigenschaften* quantifiziert, also die Quantoren auf Eigenschaften anwendet. Aber nicht in der in 1-2-5-4 beschriebenen Weise: „Für alle Eigenschaften gilt ...", sondern so, dass der *Grad* einer Eigenschaft angeben wird.

Zunächst sei auf die *Prädikaten-Logik* zurückgegriffen. Sie unterscheidet nur zwischen:

- x kommt eine Eigenschaft F zu: Fx
- x kommt die Eigenschaft F *nicht* zu: $\neg Fx$

Die *Prädikaten-Logik* ist also intensional *2-wertig*, es wird nur zwischen „ja" und „nein" unterschieden: z. B: ‚x ist klug' versus ‚x ist nicht klug'.

Die normale extensionale *Quantoren-Logik* knüpft daran an, sie unterscheidet intensional z. B. nur zwischen $\Lambda x(Fx)$ versus $\Lambda x(\neg Fx)$: allen x kommt die Eigenschaft F zu – oder nicht.

Man kann aber entsprechend den extensionalen Quantoren weiter differenzieren und so eine intensionale Quantoren-Logik konstruieren; dabei teilt man folgendermaßen ein.

Alle	x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*
Alle nicht	x besitzt die Eigenschaft F *überhaupt nicht*
Einige	x besitzt die Eigenschaft F *partiell*
Einige nicht	x besitzt die Eigenschaft F *partiell nicht*

„x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*" ist zu verstehen als „x besitzt *alle* Einheiten von F". Wenn die maximale Intelligenz, also der maximale Intelligenz-Quotient I.Q. z. B. 180 betrüge, dann wäre x vollständig intelligent, wenn es einen I. Q. von 180 besäße.

Man kann diese *intensionale* Größenangabe formal so schreiben, dass man dieselben Quantoren Λ und V verwendet: z. B. ΛFx, im Sinne von: „x kommt die Eigenschaft F vollständig zu". Allerdings besteht hier eine Verwechslungsgefahr mit: „Für alle Eigenschaften F gilt, x besitzt diese Eigenschaften". Besser schreibt man intensional mit hochgestelltem V: $^{\Lambda}Fx$.

Natürlich lassen sich die extensionale und intensionale Quantoren-Logik verbinden, z. B.:

„alle x besitzen die Eigenschaft F vollständig": $\Lambda x(\Lambda Fx)$ oder $\Lambda x(^{\Lambda}Fx)$

„kein x besitzt die Eigenschaft F partiell: $\neg Vx(VFx)$ oder $\neg Vx(^{V}Fx)$

Fuzzy Logik

Gegen die Theorie einer *intensionalen Quantoren-Logik* lässt sich allerdings einwenden: Man kann eine *intensionale* Quantifizierung wie „x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*" auch *extensional* umdeuten, als: „x gehört der Klasse F *vollständig* an". Hier wird gewissermaßen der *Grad* angegeben, zu dem ein Objekt x Element der Klasse F ist, somit eine extensionale Kennzeichnung vorgenommen. Diese Deutung wird in der *Fuzzy-Logik* vorgenommen (vgl. zur Fuzzy Logik u. a. 1-3-5-5).

Grundsätzlich besteht eine gewisse Verwandtschaft der intensionalen Quantoren-Logik zur Fuzzy Logik. Denn erstens überschreitet auch die Fuzzy-Logik die *2-Wertigkeit* der Prädikaten-Logik, gehört zu den *mehr-wertigen* Logiken. Zweitens ist die Fuzzy Logik aber normalerweise nicht als streng quantitative Logik, mit genauen Zahlenwerten konzipiert. Typisch ist vielmehr für die Fuzzy Logik, dass sie mit Zwischenstufen arbeitet, z. B. *groß*, *sehr groß*; *ein bisschen groß*, *klein*, *sehr klein* usw.; wenn man diese Begriffe streng quantifiziert, entsprechen sie eher einem *Intervall* von Werten.

Allerdings verweisen diese Abstufungen doch eher auf *absolute* Werte, nicht auf *relative* Werte wie bei der intensionalen Quantoren-Logik; so entspricht z. B. „vollständig" genau 100%, einer relativen Größe. Und kritisch ist zu fragen: Kann ich z. B. einen (intensional quantifizierten) Satz wie ‚Peter ist vollständig intelligent' wirklich gleichsetzen mit der extensionalen Form ‚Peter gehört vollständig der Klasse der Intelligenten an'?

1 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

1-3-1 Einführung

Die *Quantifizierung* gehört nicht zur Logik im eigentlichen Sinne, aber es gibt heute verschiedene *quantitative* bzw. *mehrwertige* Ansätze zur Weiterentwicklung der Logik. Der bekannteste ist sicher die *Fuzzy Logik*, die aber völlig anders strukturiert ist als mein Modell.

Ich habe den vorliegenden Ansatz schon während des Studiums zu entwickeln begonnen, dann über Jahre weiter ausgebaut. Es wird sich noch zeigen, wie fruchtbar diese Theorie ist. Durch Quantifizierung gerät die Logik in die Nähe von *Statistik* und *Mathematik*, aber die Logik wird so dennoch nicht zur Statistik, sondern behält ihre Eigenständigkeit. In der Statistik werden *spezialisierte* und *hochkomplexe* quantitative Methoden entwickelt, aber den Methoden haftet teilweise eine gewisse Willkürlichkeit an. Die Logik behandelt dagegen primär die *fundamentalen Strukturen unseres Denkens und Schlussfolgerns*. Andererseits intendiert mein Ansatz der *Integralen Logik* eine Verbindung von Logik und Statistik, wobei er sich in eine *deduktiv-deterministische* und eine *induktiv-statistische* Logik differenziert.

Jede Relation beinhaltet auch eine *quantitative* Struktur, obwohl diese oft *implizit* ist. Die quantitative Logik beschreibt zum einen neue Quantifizierungen logischer Strukturen. Aber sie zeigt auch die verborgene, *implizite* Struktur von herkömmlicher logischen Relationen oder von normal-sprachlichen Sätzen auf, macht sie *explizit*.

1-3-1-1 ABSOLUTE QUANTITÄT

Angenommen, ich formuliere die Relation: „50 Menschen sind Genies“. 50 ist dann die *absolute Quantität* (oder *absolute Häufigkeit*) der Relation. Es wird einer solchen Relation eine *natürliche Zahl* n bzw. r zugewiesen. Ich verwende für die *absolute Quantität* das Symbol ‚q’.

Beispiel: 50 F haben die Eigenschaft G. Formal: $q(F \rightarrow G) = 50$

Man kann allgemein schreiben: $q(X \rightarrow Y) = r$

Ich lasse dabei die *Individuenvariable* ‚x’ weg, weil sie nicht notwendig ist.

Mit einer *Individuenvariablen* ‚x’ kann man schreiben: $q(Fx \rightarrow Gx) = 50$.

Oder mehr in Anlehnung an die Quantoren-Logik: $50x(Fx \rightarrow Gx)$.

Zu lesen: ‚Für 50 x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, dann haben sie auch die Eigenschaft G’. Man kann auch sagen: Es wird die *Anzahl* der Genies oder die *Mächtigkeit der Menge* der Genies angegeben (vorausgesetzt, nur Menschen können Genies sein).

Den *Wert der absoluten Quantität* berechnet man nach der *Wahrheitstafel*, indem man die Anzahl der *Fälle* in den verschiedenen *logischen Welten* angibt bzw. addiert, in denen die Relation (der Satz) gültig ist, also ein + hat.

	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$q(X \wedge Y)$	= a
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y$	= b
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y)$	= c
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y)$	= d

Bei $X \to Y$ gibt es in der 1., 3. und 4. Welt ein + (plus), in der 2. Welt ein – (minus). So ergibt sich: $q(X \to Y) = a + c + d$

Zurück zum Beispiel: 50 Menschen sind Genies.

Man könnte das halb-formal schreiben: q(Mensch → Genie) = 50

Beispielzahlen: $a = 10$, $b = 15$, $c = 18$, $d = 32$. Dann: $q(X \to Y) = 10 + 18 + 32 = 50$.

Diese Zahlen ganz unrealistisch (vor allem d), aber so lässt sich der Fall besser darstellen.

Nun zeigt sich hier wieder die *Paradoxie der Implikation*, von der wir schon mehrfach gesprochen haben. Wenn wir sagen, 50 Menschen sind Genies, dann erwarten wir, dass $a = 50$, denn a ist die Anzahl der Objekte, die Mensch und zugleich Genie sind. Aber $q(X \to Y) = 50$ ist z. B. auch wahr, wenn $a + b + d = 0$, nur $c = 50$; das hieße allerdings, es gäbe gar keine Menschen. Ja, $q(X \to Y) = 50$ ist sogar wahr, wenn $a + b + c = 0$, nur $d = 50$, das hieße aber, es gäbe weder Menschen noch Genies. Für die *normale Sprache* würden wir so eine Quantifizierung als untauglich ablehnen, aber für die logische Implikation ist sie adäquat, sie entspricht genau der Aufteilung der Wahrheitstafel. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Implikation primär durch eine *relative Quantität* bestimmt ist, wie gleich gezeigt wird.

1-3-1-2 RELATIVE QUANTITÄT

Die Logik im eigentlichen Sinn bezieht sich aber nicht auf die *absolute,* sondern primär auf die relative *Häufigkeit (*bzw. *Quantität)* oder *Wahrscheinlichkeit*. Man berechnet also wie üblich die Anzahl der *günstigen Fälle* im Vergleich zu *allen Fällen*. Die relative Quantität symbolisiert man mit p (für *probability* = Wahrscheinlichkeit).

Allgemein kann man sagen: Es geht um die Struktur $p(X) = r/n$ oder noch allgemeiner um $p(\Phi) = r/n$. Dabei gilt: r = Anzahl der *günstigen* Fälle, n = Anzahl *aller* Fälle.

Grundsätzlich kann man $p(X) = r/n$ so lesen: ‚Die Wahrscheinlichkeit von X ist r/n'.

Für die *Implikation* schreibt man: $p(X \to Y) = r/n$. Nehmen wir als Beispiel $p(X \to Y) = 7/10$. Bedeutung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass X auch Y ist, beträgt 7/10".

Genauer kann man, neben anderen, vor allem folgende, spezielle und allgemeine *Deutungen* für die Implikation (bzw. entsprechend für andere logische Relationen) unterscheiden:

1) *relative Quantität* bzw. *relative Häufigkeit*
   - Beispiel: 7 von 10 X implizieren Y / 70% der X sind Y
   - allgemein: r von n X implizieren Y / r von n X sind auch Y
2) *Wahrscheinlichkeit*
   - Beispiel: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt 0,7
     wenn X, dann mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% auch Y
   - allgemein: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt r/n
3) *relative Wahrheit*
   - Beispiel: die Relation $p(X \to Y) = 10/10$ ist zu 70% wahr.
   - allgemein: Die Relation $p(X \to Y) = 1{,}0$ ist mit einem Grad von r/n wahr

• *Relative Quantität bzw. relative Häufigkeit*

Relative Quantität: Ausgang sei eine bestimmte, reale V*erteilung*. Man untersucht z. B. alle Bücher eines Autors ($n = 10$) und stellt fest, dass 2 von ihnen autobiographisch sind. Die relative Quantität ist dann: 2 von 10. Also 2 von 10 Büchern sind autobiographisch ($p = 2/10$).

Relative Häufigkeit: Davon spricht man eher bei *Ereignissen*. Man stellt z. B. fest, dass John bei 8 Kinobesuchen 4mal zu spät kommt ($p = 4/8$). Man kann allerdings auch allgemein von ‚relativer Häufigkeit' bzw. ‚Häufigkeitsverteilung' sprechen.

• *Empirische und theoretische Wahrscheinlichkeit*
Es ist zu unterscheiden zwischen *empirischer* und *theoretischer* Wahrscheinlichkeit. Daneben gibt es auch eine *subjektive* Wahrscheinlichkeit, von der ich aber hier absehe.

Erstens, die *empirische Wahrscheinlichkeit:* Sie richtet sich nach *empirischen Verteilungen.* Dabei wird die *relative Häufigkeit* auf den *Einzelfall* übertragen. Am obigen Beispiel:
– *Menge/relative Häufigkeit*: 2 von 10 Büchern (= 20%) eines Autors sind autobiographisch.
– *Individuum/Wahrscheinlichkeit*: Ich habe ein (beliebiges) Buch des Autors vorliegen, dann ist es mit einer *Wahrscheinlichkeit* von 2/10 = 1/5 = 0,2 (oder 20%) autobiographisch.

Diese Wahrscheinlichkeit nennt man auch *statistische* oder *faktische* Wahrscheinlichkeit. In der Statistik wird normal zwischen *relativer Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* unterschieden und es werden dafür auch unterschiedliche Symbole verwendet, für die *relative Häufigkeit* (einer Stichprobe) z. B. h_r und für die *Wahrscheinlichkeit* p. Ich verwende hier jedoch gleichermaßen für relative Häufigkeit und (empirische) Wahrscheinlichkeit das *Symbol* ‚p'. Das scheint mir aus Gründen der Vereinfachung legitim, zumal in diesem Text auch keine statistischen Untersuchungen vorgenommen werden.

Zweitens die *theoretische Wahrscheinlichkeit* (oder *Zufalls-Wahrscheinlichkeit*):
Sie bezieht sich auf *Zufallsverteilungen* wie z. B. beim Glücksspiel: Bei einem Würfel mit 6 Seiten gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/6$, dass ich mit einem Wurf z. B. die Zahl 3 würfele. Wenn ich nur 6mal würfele, ist keinesfalls sicher, dass dann 1mal die Zahl 3 darunter ist. Doch je größer die Anzahl der Würfe, desto mehr ist zu erwarten, dass die 3 zu 1/6 auftritt. Und wenn man *unendlich* mal würfeln würde, dann träte die 3 genau zu 1/6 = 16,7 % auf; bzw. 1/6 ist der *Grenzwert* der relativen Häufigkeit, wenn n gegen *unendlich* geht.

So oder so ähnlich wird es jedenfalls oft behauptet. Aber erstens ist der Ausgleich bei *großen Zahlen* ein *relativer, prozentualer* Ausgleich, es muss damit nicht ein Ausgleich in *absoluten* Zahlen verbunden sein. Und zweitens, um es ganz klar zu sagen: Es ist *extrem unwahrscheinlich* (die Wahrscheinlichkeit geht gegen 0), aber *nicht unmöglich*, dass bei einer Folge von *unendlichen* Würfen die Zahl 3 keinmal oder sogar ausschließlich die Zahl 5 auftritt.

Auch beim Würfeln kann man *die relative Häufigkeit* berechnen. Man macht z. B. eine Serie von Würfen und gibt dann *empirisch* an, wie oft die 1, 2, 3, 4, 5 und 6 aufgetreten sind. Aber die theoretische Wahrscheinlichkeit wird nicht aus der relativen Häufigkeit empirisch ermittelt, sondern nach Gesetzen der *Kombinatorik* berechnet. Die theoretische Wahrscheinlichkeit ist somit *analytisch* und wird deshalb hier nicht weiter behandelt. Vor allem diese *theoretische* Wahrscheinlichkeit kommt in Kapitel 3 und 4 noch ausführlich zur Sprache.

• *Gesamtheit und Stichprobe*
Hier ist eine weitere wichtige Unterscheidung zu treffen: zwischen *Gesamtheit* (All-Menge) und *Stichprobe* (Teilmenge). Wenn man eine empirische Untersuchung macht, kann man normalerweise nur eine *Teilmenge* untersuchen; eine *unendliche* Menge ist prinzipiell nicht vollständig zu untersuchen, eine *endliche*, aber große Menge aus praktischen Gründen nicht.

Angenommen, man macht eine Untersuchung über die Lehrer in Deutschland. Nehmen wir weiter an, es gäbe 100.000 Lehrer. Es wäre viel zu aufwendig, diese *alle* zu untersuchen. Man macht nur Untersuchungen einer *repräsentativen Stichprobe*, sagen wir: 1.000 Lehrer. Man stellt z. B. fest: 700 von den 1.000 Lehrern sind Zeitungsleser. Dieser Wert 700/1000 lässt sich die *relative Häufigkeit* der Stichprobe nennen. Ich schreibe dafür:

p/Stichprobe(Lehrer $\rightarrow$ Zeitungsleser) = 700/1000.

Nun kann man aber nicht voraussetzen, dass sich in der *Gesamtheit* aller Lehrer genau dieselbe Häufigkeitsverteilung findet. Wenn die Stichprobe nicht ganz repräsentativ ist, könnte für die Gesamtheit z. B. gelten: von 100.000 Lehrern sind 80.000 Zeitungsleser. Es wäre zu schreiben: p(Lehrer $\rightarrow$ Zeitungsleser) = 80.000/100.000 = 0.8 = 80 %. Die *Dezimalangabe* (0,8) bzw. die *Prozentangabe* (80%) darf man streng genommen allgemein nur verwenden, wenn man die *Gesamtheit*, also *alle* Elemente der Menge untersucht hat. Und auch nur dann darf man allgemein sagen: ‚Die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein *beliebiger* Lehrer auch Zeitungsleser ist, beträgt 80%'. Ansonsten muss man immer die Einschränkung auf die Stichprobe vornehmen. Von daher wird in der Statistik genau zwischen Stichprobe und Gesamtheit unterschieden, was ich aber hier bei meinen Beispielen vernachlässigen kann.

• *Wahrheitsgrad*

Hier soll zunächst auf das Verhältnis von *Wahrheit* und *Wahrscheinlichkeit* eingegangen werden. Etwas ist *wahr-scheinlich* heißt wörtlich: „es *scheint* wahr zu sein". „Es ist wahrscheinlich, dass A" heißt im Grunde soviel wie „es ist wahrscheinlich, dass A *wahr* ist". Man könnte daher annehmen, dass Wahrscheinlichkeit und Wahrheit strukturell übereinstimmen. Es sind aber wesentliche Unterschiede zu konstatieren:

– Die Wahrscheinlichkeit wird meist *quantitativ* angegeben, z. B. in Prozent: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A" heißt: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A wahr ist". Die Wahrheit wird dagegen normalerweise *qualitativ* (2-wertig) angegeben: wahr oder falsch.

– Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die *Objekt-Ebene*, z. B. auf einen realen Sachverhalt. Wahrheit bezieht sich auf eine *Meta-Ebene*, man gibt an, ob ein Satz (oder ein Urteil, ein Gedanke usw.) mit der Realität übereinstimmt (= wahr) oder nicht übereinstimmt (falsch).

– Damit hängt zusammen: Die Wahrscheinlichkeit (als relative Häufigkeit) ist erst einmal ein *objekt-sprachlich,* z. B: 75% aller F sind G; man kann das allerdings auch *meta-sprachlich* ausdrücken: ‚Der Satz A hat eine Wahrscheinlichkeit von 75%'. Dagegen wird Wahrheit überwiegend *meta-sprachlich* verwendet, bezogen auf *Sätze*.

Obwohl man also bei der Wahrheit normalerweise nur wahr und falsch unterscheidet, lässt sich aber doch ein *Wahrheitsgrad* konstruieren. Dieser ist klar von der Wahrscheinlichkeit abzugrenzen, wird aber aus ihr hergeleitet. Genauso wie es hier um *empirische* Wahrscheinlichkeit geht, geht es hier auch um *empirische* Wahrheit.

Mit dem Wahrheitsgrad wird der *Grad* angegeben, zu dem ein Satz *mit der Wirklichkeit übereinstimmt*. Ich schreibe den Wahrheitsgrad mit ‚w'. Zwei unterschiedliche Fälle:

<u>Reale p: 1, ausgesagte p: r/n, Wahrheitsgrad w: r/n (bzw. Dezimal- oder Prozentwerte)</u>

Angenommen die *Realität* sei: 100 % aller Menschen sind sterblich. (Sachverhalt: $p = 1$)
Jemand macht aber die *Aussage*: ‚40% aller Menschen sind sterblich'. (Satz: $p = r/n$)
Dann ist seine Aussage zu 40% (0,4) wahr bzw. zu 60% (0,6) falsch. (Wahrheit: $w = r/n$)
Man berechnet also einen *Wahrheitsgrad* w, für den gilt (wie für ‚p'): $0 \leq w \leq 1$.
Hier gilt ganz einfach: w = *ausgesagte* p. Allgemein: $p(\Phi) = 1 \Rightarrow w[‚p(\Phi) = r/n'] = r/n$.

<u>Reale p: r/n, ausgesagte p: 1, Wahrheitsgrad w: r/n</u>:

Z. B.: Real: 60% aller Sportler sind gesund. Satz: ‚100% aller Sportler sind gesund'.
Wahrheitsgrad des Satzes: 60%. Allgemein: $p(\Phi) = r/n \Rightarrow w[‚p(\Phi) = 1'] = r/n$.

Dies gelingt nicht bei *individuellen* Sätzen. Angenommen, es gilt: 70% aller x sind klug. Ich betrachte nun ein beliebiges Individuum x_i. Dann darf ich sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' gilt *mit* 70 % Wahrscheinlichkeit. Aber ich kann nicht sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' ist *zu* 70% wahr'.

Allgemein lässt sich am Beispiel der Implikation $X \rightarrow Y$ definieren:

$w(X \rightarrow Y) = 1$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) wahr
$w(X \rightarrow Y) = 0$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) falsch
$0 < w(X \rightarrow Y) < 1$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist partiell wahr bzw. partiell falsch.

Auf der *empirischen* Ebene gilt also:
Der *Wahrheitsgrad* ist nicht identisch mit der *Wahrscheinlichkeit*, aber aus ihr abzuleiten.

Wir werden später sehen, dass dagegen auf der *theoretischen* Ebene gilt:
theoretischer Wahrheits-Grad (Tautologie-Grad) = *theoretische Wahrscheinlichkeit*.

Die Wahrheits-Interpretation stelle ich aber einmal zurück, sie trifft nicht wirklich die Intention der logischen Relationen.

1-3-1-3 BERECHNUNG DER RELATIVEN QUANTITÄT

Die konkrete Berechnung soll am Beispiel der *Implikation* p(X → Y) = r/n erläutert werden.
p(X → Y) = r/n ist z. B. zu lesen als: ‚Die Wahrscheinlichkeit von p(X → Y) beträgt r/n'.
Die Berechnung von ‚p' vollzieht sich anhand der *Wahrheitstafel:*

	X → Y		
1.	+ + +	q(X ∧ Y)	= a
2.	+ − −	q(X ∧ ¬Y)	= b
3.	− + +	q(¬X ∧ Y)	= c
4.	− + −	q(¬X ∧ ¬Y)	= d

• *Zähler*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in den *belegten* Welten, d. h. in den *+Welten*, in denen + unter dem Relator → steht. Im Beispiel: a + c + d.
• *Nenner*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in *allen* Welten, d. h. in den *+Welten* und *−Welten*. Der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.
• *Wahrscheinlichkeit p*: Zur Berechnung von p dividiert man also (vereinfacht) die günstigen Fälle durch alle Fälle.

$$\frac{Fälle:(+)Welten}{Fälle:(+)Welten + Fälle:(-)Welten}$$

Für die (relative Häufigkeit der) Implikation ergibt sich daher folgende Formel:

$$\mathrm{p}(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Bei der Quantifizierung von solchen Relationen gilt grundsätzlich:

a + b + c + d > 0. Denn mit a + b + c + d sind eben alle möglichen Welten erfasst.
r = 0, 1, ... , n. Anders formuliert: $0 \leq r \leq n$
n = 1, 2, ... Und: n = a + b+ c + d
$0 \leq p \leq 1$

Die Herleitung der Formel für die Implikation soll noch ausführlicher erläutert werden. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

• Bezug auf die *absoluten* Größen q(X ∧ Y) = a, q(X ∧ ¬Y) = b usw.

$$\mathrm{p}(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}$$

Den Nenner kann man einfacher schreiben:

$$\mathrm{p}(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X) + q(\neg X)}$$

Mit Verwendung von a, b, c, und d lässt sich die Formel aber noch einfacher schreiben:

$$\mathrm{p}(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

• Bezug auf die *relativen* Größen p(X ∧ Y), p(¬X ∧ Y) und p(¬X ∧ ¬Y)

$$p(X \to Y) = \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Zur Erläuterung folgendes Beispiel (die Zahlen sind willkürlich gewählt):
„70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß“, halbformal:
$p(X \to Y)$: p(deutsche Apfelsorte → schmeckt süß) = 70/90 = 7/9 = 0,78

X = deutsche Apfelsorte, Y = schmeckt süß
a = Anzahl der deutschen Apfel, die süß schmecken: 25
b = Anzahl der deutschen Äpfel, die nicht süß (sauer) schmecken: 20
c = Anzahl ausländischer Äpfel, die süß schmecken: 15
d = Anzahl ausländischer Äpfel, die nicht süß schmecken: 30

• *Absolute Quantität*
Beispiel: „70 deutsche Apfelsorten schmecken süß“
z. B.: a = 25, b = 20, c = 15, d = 30 (n = 90)
Die absolute Quantität der Beispiel-Relation ist hier a + c + d = 70

• *Relative Quantität*
Beispiel: „70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß“.
Hierbei werden auch die nicht-deutschen Apfelsorten im Nenner wie im Zähler hinzugezählt (also c + d). Das mag unserer Intuition widersprechen, dieses Resultat ergibt sich aber eben aus der logischen Definition der *Implikation*. Die Problematik wird also nicht erst durch die *Quantifizierung* erzeugt; genauso erscheint es unserem normalen Sprachverständnis wenig plausibel, dass ein Wenn-dann-Satz auch als wahr gilt, obwohl der Wenn-Satz falsch ist.

Es ergibt sich also der Satz: „x_i ist eine deutsche Apfelsorte → x_i schmeckt mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 7/9 süß“.

Dieser Satz ist auch wahr, wenn es gar keine deutschen Apfelsorten gibt (a + b = 0), er schließt eben nur aus, dass deutsche Apelsorten zu einem anderen Prozentsatz süß schmecken.

Man kann diese Problematik umgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* verwendet (dazu später); der Vorteil der normalen Implikation ist allerdings, dass sie alle *möglichen* Welten mit einbezieht und eindeutige Gültigkeits-Zuordnungen vornimmt. Besondere Probleme für die Implikations-Formel entstehen bei Relationen, die sich auf *unendliche* Mengen beziehen, wie im nächsten Punkt gezeigt werden wird.

• *Zahlentheorie*
Zur numerischen Darstellung *absoluter* Größen seien nur *natürliche* Zahlen (n = 0, 1, 2, ...) verwendet.

Bei der numerischen Darstellung *relativer* Größe bzw. Wahrscheinlichkeit sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:
- *Bruchdarstellung*: Die hier verwendeten Brüche sind *rationale Zahlen*. Rationale Zahlen sind Quotienten aus ganzen Zahlen, d. h. alle *positiven und negativen Brüche* ± r/n, wobei r und n *natürliche Zahlen* sind. Die Menge der natürlichen Zahlen N ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen Q, also: $N \subset Q$. Andererseits sind die beiden Mengen N und Q äquivalent. Somit ist auch die Menge der rationalen Zahlen *abzählbar unendlich*. Die in der quantitativen Logik verwendeten Brüche sind aber nur eine *Teilmenge* der rationalen Zahlen, weil hier nur positive Brüche ($r \geq 0$) vorkommen und nur Brüche ≤ 1, d. h. $r \leq n$.
- *Dezimaldarstellung*: Bei der Dezimaldarstellung bzw. den Dezimalbrüchen muss differenziert werden. Einem Bruch wie 1/2 entspricht eine *endliche* Dezimalzahl, hier 0,5. Dagegen entspricht z. B. dem Bruch 1/3 eine *unendliche* Dezimalzahl, nämlich 0,333333 ... = $0,\overline{3}$. Wir

können aber auch 1/2 als unendliche Dezimalzahl schreiben, nämlich als 0,499999 ... = $0,\overline{49}$. Alle diese unendlichen Dezimalzahlen sind *periodisch*, d. h. es tauchen in Folge oder im Wechsel immer dieselben Zahlen auf. Solche unendlichen periodischen Dezimalbrüche gelten als rationale Zahlen. Davon zu unterscheiden sind unendliche *nicht-periodische* Dezimalzahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, z. B. $\sqrt{5}$ = 2,2360679 ... (hier gibt es keine periodische Zahlenwiederholung). Diese Zahlen nennt man *irrational*, die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die (überabzählbar unendlichen) *reellen* Zahlen.

Man könnte die *rationale* Dezimalzahl 1 als 1,00 (mit 2 Stellen hinterm Komma) schreiben, um sie deutlich von der *natürlichen* Zahl 1 abzugrenzen, der Einfachheit halber verzichte ich aber normalerweise darauf. Entsprechendes gilt für 0,00 vs. 0.

Wichtig ist, dabei folgendes im Blick zu halten: Auch wenn die *absoluten* Größen r und n *infinite* Werte sein können, die relative Größe (Wahrscheinlichkeit) einer Relation oder Aussage ist immer *finit*, denn es gilt wie gesagt: $0 \leq p \leq 1$, p hat maximal den Wert 1. Obwohl der Wertebereich 0 bis 1 also *abgeschlossen* ist, gibt es dennoch innerhalb dieses Wertebereichs *unendlich* viele rationale Zahlen.

1-3-1-4 ENDLICHKEIT UND UNENDLICHKEIT

• *Arten von Unendlichkeit*

Die Quantität einer Relation / eines Satzes kann *finit* sein (endlich) oder *infinit* (unendlich).

Im Einzelnen unterscheidet man bei *unendlich* zwischen:

– *abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *natürlichen* Zahlen)

– *überabzählbar* bzw. *nicht abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *reellen* Zahlen).

Des Weiteren unterscheidet man zwischen

– *aktual* unendlich, d. h. unendlich *seiend* (z. B. die Menge der natürlichen Zahlen)

– *potentiell* unendlich, d. h. unendlich *werdend* (z. B. Zahlenfolgen oder Funktionen), wie es vom *Grenzprozess* bzw. Grenzwert bekannt ist.

Genauer kann auf die verschiedenen Unendlichkeitsbegriffe hier nicht eingegangen werden.

Die Unterscheidung zwischen *endlich* und *unendlich* ist durchaus auch für die Logik von Bedeutung. Quantoren- bzw. prädikaten-logisch kann man z. B. zwischen *finiten* und *infiniten* All-Relationen folgendermaßen unterscheiden:

– endlich: $\Lambda x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$

– unendlich : $\Lambda^{\infty} x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots$

oder: $= Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge \ldots$

Diese Schreibweise erklärt sich wie folgt: Auch wenn die Menge der natürlichen Zahlen *unendlich* ist, steht das *n* doch dafür, dass eine *letzte* natürliche Zahl als Index eingesetzt wird, also eine *endliche Folge* vorliegt. Bei einer *unendlichen Folge* gibt man gar *keine letzte Zahl* an (allerdings wäre eine andere Notation wohl überzeugender). In der Mathematik hat man es vor allem mit *Zahlen-Folgen* zu tun: $a_n = a_1, a_2, \ldots, a_n$. In der Logik haben wir es vor allem mit Verknüpfungen (z. B. Konjunktionen) von *Aussagen-Folgen* zu tun.

• *Probleme infiniter Relationen*

Ich bin bisher stillschweigend von *finiten* (*endlichen*) Mengen bzw. Relationen ausgegangen. Denn *infinite* Relationen oder Aussagen werfen besondere Probleme auf. So kann man infinite All-Aussagen nicht *verifizieren*, da man nicht eine unendliche Anzahl von Objekten überprüfen kann. Und aus einer unendlichen Menge kann man auch keine *Stichprobe* ziehen. Dies ist allerdings primär ein Problem der Wissenschaftstheorie, weniger der Logik.

Die Unendlichkeit spielt aber auch in der Logik, vor allem in der *quantitativen Logik* eine Rolle. Dabei ergibt sich folgendes Problem: Wenn man den Objektbereich von logischen Re-

lationen nicht einschränkt, so beziehen sie sich (und entsprechend auch die Formeln) auf *alle Objekte der Welt*. Nehmen wir zur Analyse die Implikation X → Y:
Z. B. „Alle Menschen sind Erdbewohner“, also: Mensch (=X) → Erdbewohner (=Y).
Es gibt folgende 4 Möglichkeiten bzw. Welten:

q(Mensch ∧ Erdbewohner) = a
q(Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = b
q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner) = c
q(Nicht-Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = d

Wir prüfen das auf *endlich* oder *unendlich*:

– Menschen: vermutlich gibt es (zu allen Zeiten) nur *endlich* viele Menschen
– Erdbewohner: gibt es zwar ein Vielfaches von der Anzahl der Menschen (nämlich alle irdischen Lebewesen), aber wohl *endlich* viele Erdbewohner
– Nicht-Menschen: das sind alle Objekte, die keine Menschen sind, dies könnte durchaus eine *unendliche* Menge sein (wenn das Universum räumlich oder zeitlich unendlich ist)
– Nicht-Erdbewohner: das könnte auch eine *unendliche* Menge sein, wenn es z. B. auf unendlich vielen anderen Planeten andere Lebewesen gibt

Dann lassen sich daraus die Un-/Endlichkeits-*Vermutungen* für die Konjunktionen ableiten:

q(Mensch ∧ Erdbewohner)	a	finit
q(Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner)	b	finit
q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner)	c	finit
q(Nicht-Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner)	d	infinit

Bei ‚c’ kommt man zu der Einschätzung „finit“, obwohl die Menge der Nicht-Menschen infinit sein mag; denn wenn die Menge der Erdbewohner finit ist, kann die Größe der Konjunktion q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner) auch nur finit sein; entsprechendes gilt für ‚b’.

Dies bedeutet (vermutlich) für die Formel der Implikation:

$$p(X \to Y) = \frac{a(finit) + c(finit) + d(\neg finit)}{a(finit) + b(finit) + c(finit) + d(\neg finit)} = \frac{r}{n}$$

Dann steht im Zähler wie im Nenner eine *infinite* ’Zahl’, nämlich ‚d’. ‚d’ steht wie gesagt für q(¬X ∧ ¬Y). Damit sind die endlichen Werte vernachlässigbar, weil jeder endliche Wert verschwindend gering ist im Vergleich zu einer infiniten ‘Zahl’. Man könnte vermuten, dass der Wert der Gleichung nahe 1 oder auch genau 1 ist; denn zwei unendliche Mengen gelten als *gleich groß*, es sei denn, eine ist *abzählbar* unendlich, die andere aber *überabzählbar*, somit größer. Dies würde bedeuten, dass für alle derartigen Formeln, bei fast jeder Implikation, sich ein Wert von (annähernd) 1 ergibt. Das ist natürlich ganz unerwünscht. Man erfährt nichts über das *Verhältnis des spezifischen X zu dem spezifischen Y.*

• Mathematische Behandlung der Unendlichkeit
Nun gilt aber ein Bruch ∞/∞ in der Mathematik als *nicht definiert*. Stattdessen verwendet man *Grenzwert*-Berechnungen.

Für die Implikation $p(X \to Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n}$ gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: r = n, b = 0. Hier könnte man folgende Formel aufstellen:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ oder $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \to 1$ Auf diese Weise erhält man auch den Wert 1.

2. Möglichkeit: r < n, b > 0. Diese Möglichkeit ist interessanter; wir können aber nicht generell angeben, wie groß b und damit r genau ist. Nehmen wir hier nur folgendes Beispiel: $r = \sqrt{n}$. Dann können wir schreiben: $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$ bzw. allgemein $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$
Mit der Grenzwertberechnung erhalten wir also ein anderes Ergebnis als oben angegeben: Dort hatten wir gesagt, der Größenunterschied zwischen zwei unendlichen Mengen ist vernachlässigbar, danach erhielte man immer: $\infty/\infty = 1$. Hier haben wir es mit zwei unendlichen Mengen n und n^2 zu tun, es ergibt sich aber als Grenzwert für den Quotienten n/n^2 aber nicht der Wert 1, sondern der Wert 0. Wie erklärt sich das? Dazu müssen wir etwas ausholen:
Wir haben es hier mit 2 Mengen zu tun:

der Menge der *natürlichen Zahlen*: N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
die Menge der *Quadratzahlen* X^2 = {1, 4, 9, 16, 25, ...}

Wenn man diese beiden Mengen einander zuordnet, ergibt sich:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
n^2:	1			4					9							16 ...

Dabei zeigt sich einerseits: Die Menge der Quadratzahlen ist *Teilmenge* der Menge natürlichen Zahlen: $X^2 \subset N$; andererseits: Die Menge N und X^2 besitzen die *gleiche Mächtigkeit*, beide sind *abzählbar unendlich*; das erscheint zunächst paradox, ist aber mathematisch beweisbar. Außerdem sieht man, dass n^2 viel schneller steigt als n, eben in der Potenz.

Bei der obigen Rechnung: $\infty/\infty = 1$ waren wir vom Begriff *aktual unendlich* ausgegangen (vgl. oben): zwei unendliche *Mengen* wurden als Quotient dargestellt (was aber wie gesagt mathematisch als nicht definiert gilt). Bei der Grenzwertrechnung geht man vom Begriff *potentiell unendlich* aus. Zwei Zahlen-*Folgen*, nämlich n und n^2, tendieren in Richtung unendlich. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass dies auf den Grenzwert 0 zuläuft, wenn man sich die Quotienten-Folge veranschaulicht:

1/1 (= 1,0), 2/4 (= 0,5), 3/9, 4/16, 5/25, 6/36, 7/49, 8/84, 9/81, 10/100 (= 0,1) usw.

Hier werden also nicht zwei *abgeschlossene* unendliche Mengen in Beziehung gesetzt, sondern es geht um die Entwicklung des Größenverhältnisses von n/n^2.

Weiter werde ich auf diese Problematik nicht eingehen, ohnehin möchte ich nur eine *informelle* Unendlichkeits-Darstellung geben, ich kann hier nicht in die höchst komplizierte *Mathematik der Unendlichkeit* einsteigen. In jedem Fall zeigt sich, dass ein Bruch mit einem *unendlichen* Wert im Zähler und Nenner oder auch nur im Nenner für die uns hier interessierende Berechnung ungeeignet ist.

1-3-1-5 LÖSUNGEN DES UNENDLICHKEITS-PROBLEMS

Ich möchte nachfolgend zwei Lösungen für das *Unendlichkeits-Problem* vorstellen: *Festlegung eines Definitionsbereichs* und *Limitierung der Negation*.

• *Festlegung eines Definitionsbereichs*
Hier wird der *Anwendungsbereich*, der ‘universe of discourse’, auf eine bestimmte Klasse eingegrenzt, es wird ein *Definitionsbereich* festgelegt, d. h. die Relation bezieht sich nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums. Z. B. die Aussage: $\Lambda x(\text{Mensch}(x) \to \text{sterblich}(x))$. In der normalen Sprache würde dieser Satz lauten: ‚Alle Menschen sind sterblich’, es ist eine Aussage nur über *alle* Menschen. Durch die Struktur der logischen *Implikation* ergibt sich

aber ein anderes Ergebnis: Es ist eine Aussage über *alle x*, also alle Objekte des Universums, auch über die Nicht-Menschen. Mag die Menge der Menschen *endlich* sein, wenn die Menge aller Objekte des Universums (also aller x) *unendlich* ist, dann handelt es sich dennoch um eine *infinite* Aussage. Mit der *normalen Implikation* gibt es hier kein Entkommen.

Wie sieht es mit der *Positiv-Implikation* aus? Die besagt ja nur: „*Wenn* ein X ein Mensch ist, dann ...“ – und wenn das falsch ist, gilt sie als *undefiniert*. Dies könnte also eine Lösung sein: Man muss hier *nur* die Menschen erfassen, also (vermutlich) eine *endliche* Menge.

Noch sicherer geht man jedoch, wenn ein *Definitionsbereich* festgelegt wird: Man bezieht eine Aussage nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums, sondern direkt auf eine *finite Menge* (Definitionsbereich). Im Beispiel legt man fest: x = Mensch. So gilt z. B.:

$\Lambda x = \text{Mensch}(Fx \rightarrow Gx)$ lies: ‚für alle x = Mensch gilt ...’

Dies ist nur eine Aussage über die Menschen, also eine *endliche* Menge. Das hebelt die Struktur der Quantoren-Logik zwar etwas aus, muss aber erlaubt sein.

Allerdings könnte man eventuell weiterfragen: Muss man, um die x, die Menschen sind, von den anderen abzutrennen, zunächst doch *alle* Objekte untersuchen, also eine *infinite* Menge?

• *Limitierung der Negation*

Auch wenn wir x (auf die Menge der Menschen) *eingeschränkt* haben, bleibt ein weiteres Problem bestehen. Betrachten wir den Satz: ‚Alle Männer sind klug’, halb formal:

$\Lambda x = \text{Mensch}(\text{Mann (x)} \rightarrow \text{klug (x)})$

„Klug“ ist normal-sprachlich eine *Eigenschaft*. Was ergibt sich, wenn man „klug“ *verneint*, also „¬klug“ angibt? Bei *Prädikatoren*, die in der normalen Sprache *Eigenschaften* ausdrücken, also *Adjektive*n, ergibt sich normal-sprachlich automatisch, dass die *Negation* sich nur auf die *betreffende Eigenschaft* bezieht. Wenn man von jemand sagt, er ist nicht klug, dann meint man *nicht*, er ist z. B. groß, dick, reich oder gesund, sondern man meint, er ist dumm. Auch logisch wird dies normalerweise so interpretiert.

Streng betrachtet kann aber „nicht klug“ jede mögliche andere Eigenschaft meinen, also prinzipiell eine *infinite* Menge. Um das Problem zu lösen, müssen wir uns klarmachen, “klug“ und „dumm“ sind nur zwei *Ausprägungen* auf der *Merkmalsdimension* „Intelligenz“. Genauer werden wir auf die quantitativen Ausprägungen noch eingehen, aber man kann sagen: Innerhalb der Dimension „Intelligenz“ bedeutet „dumm“ die Verneinung von „klug“ und umgekehrt. Und wenn wir eine Aussage über kluge Männer machen, dann wollen wir sie eben unterscheiden von dummen Männern, aber nicht von reichen, kleinen oder alten Männern.

Es ist also zunächst zu fragen, ob etwas überhaupt eine Ausprägung von Intelligenz haben kann, z. B. ein Stein ist weder klug noch dumm, diese Begriffe lassen sich nicht auf ihn anwenden. Man könnte sagen, er besitzt keine „Intelligenzfähigkeit“. Man kann festlegen:

intelligenzfähig $\leftrightarrow$ klug >< dumm, als *Definition*: intelligenzfähig $\leftrightarrow_{\text{df}}$ klug >< dumm.

Dann bedeutet: ¬klug = dumm, ¬dumm = klug.

Zusammenfassung

Ich gebe noch einmal eine Übersicht über *absolute* und *relative* Quantität:

p(Klasse) = 1, es sei denn q(Klasse) = 0, dann auch p(Klasse) = 0
p(Teilklasse) $\geq$ 0
p(Teilklasse) $\leq$ 1, da q(Teilklasse) $\leq$ q(Klasse)
bei einer *echten* Teilmenge bzw. Teilklasse gilt:
p(Teilklasse) < 1, da q(Teilklasse) < q(Klasse)

A) absolute Quantität q

1) der Klasse	q(Klasse)	z. B.	800
2) einer Teilklasse	q(Teilklasse)	z. B.	200

B) relative Quantität p

1) der Klasse $\frac{q(Klasse)}{q(Klasse)}$ z. B. 800/800 = 1

2) der Teilklasse $\frac{q(Teilklasse)}{q(Klasse)}$

a) echte relative Quantität z. B. 200/800

b) rechnerische relative Quantität

- Bruchdarstellung
  - beliebiger Bruch z. B. 225/900
  - maximal gekürzter Bruch (mit natürlichen Zahlen) z. B. 1/4
- Prozentdarstellung z. B. 25%
- Dezimaldarstellung z. B. 0,25

1-3-2 Implikation

1-3-2-1 IMPLIKATION

Die Formel für die Implikation wurde bereits in 1-3-1-3 vorgestellt. Es sei daran erinnert, dass man die Implikation als die beste Repräsentation der *Kopula* ansehen kann. Insofern gilt diese Formel auch für die Kopula. Andererseits wurde auf die Probleme hingewiesen, die sich durch Verwendung der normalen Implikation als Kopula ergeben.

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-2 NEGATIONEN

Es lassen sich verschiedene *Negationen* der Implikation angeben. Die wichtigsten sind die folgenden drei; deren Formeln werden wie beschrieben aus den *Wahrheitstafeln* abgeleitet:

$$p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \rightarrow Y) = \frac{b}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \rightarrow \neg Y) = \frac{a}{a+b+c+d}$$

Ganz korrekt müsste man schreiben: $p(\neg(X \rightarrow Y))$ u. ä., aber die Schreibung ohne *zweite Klammer* ist übersichtlicher. Normalerweise verwende ich die vereinfachte Schreibung.

1-3-2-3 REPLIKATION

$$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-4 ÄQUIVALENZ

$$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d} \qquad \text{Doppelte Negation: } p(\neg X \leftrightarrow \neg Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-5 KOMPLEXERE FORMELN

Bisher sind wir von *2 (zwei)* Variablen X, Y ausgegangen; bei denen ergeben sich $2^2 = 4$ Kombinationsmöglichkeiten. Mit *3 (drei)* Variablen X, Y, Z ergeben sich $2^3 = 8$ Möglichkeiten und damit *komplexere Formeln*.

Ich bringe unten eine Übersicht über die möglichen *Kombinationen* der 3 Variablen. Dabei gibt es 2 zwei Möglichkeiten, die *absoluten Größen* mit Buchstaben zu bezeichnen: entweder man verwendet 8 unterschiedliche Buchstaben (a bis h) oder man verwendet wie bisher 4 Buchstaben, gibt ihnen aber jeweils 2 unterschiedliche Indizes, also:

$a_1, a_2, b_1, b_1, c_1, c_2, d_1,, d_2$

X	Y	Z		
+	+	+	a	a_1
+	+	–	b	a_2
+	–	+	c	b_1
+	–	–	d	b_2
–	+	+	e	c_1
–	+	–	f	c_2
–	–	+	g	d_1
–	–	–	h	d_2

Das Modell mit *unterschiedlichen* Buchstaben scheint auf den ersten Blick übersichtlicher als die Kennzeichnung mit *Indizes* (unten), aber das Modell mit Indizes ist systematischer, bietet eine viel bessere Vergleichbarkeit mit 2-Variablen-Relationen und soll deshalb hier bevorzugt werden. Ich notiere also: $q(X \wedge Y \wedge Z) = a_1$, $q(X \wedge Y \wedge \neg Z) = a_2$ usw.

Dann ergibt sich z. B. folgende Formel für die *Implikation* $X \rightarrow Y$:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Die eigentliche Funktion der komplexeren Formeln ergibt sich aber erst, wenn man 3 Variablen in *einem* Implikationsausdruck verwendet. So erhält man aus der Wahrheitstafel z. B.:

$$p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

1-3-3 Positiv-Implikation

Ich habe – zuerst in Kapitel 0 – die modifizierte *Positiv-Implikation* X *→ Y eingeführt. Mit der lassen sich Relationen so formalisieren, dass sie näher an unserer Alltagsaufassung bzw. an unserer Alltagssprache sind. Denn ein *Wenn-dann-Satz* ‚Wenn X, dann Y' wird normal-sprachlich so aufgefasst, dass er nur die Fälle berücksichtigt, in denen der Wenn-Satz ‚X' *wahr* ist. Oder ein *Kopula-Satz*: ‚X ist ein Y' wird so aufgefasst, dass die *Existenz* von X vorausgesetzt wird. Wie das *quantitativ* umgesetzt wird, sei im Folgenden erläutert.

1-3-3-1 FORMEL

Auch hier kann man zunächst wieder von der *Wahrheitstafel* ausgehen:

$$\begin{array}{cccl} X & *\!\!\rightarrow & Y & \\ + & + & + & q(X \wedge Y) \quad = a \\ + & - & - & q(X \wedge \neg Y) = b \end{array}$$

$$p(X *\!\!\rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y)} = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X)} = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$$

Die Werte der Positiv-Implikation entsprechen im Wesentlichen der Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der *Statistik*.

Die Formeln des *quantitativen* Ansatzes beziehen sich aber ausschließlich auf die + und – in der Wahrheitstafel, □ und ? werden nicht berücksichtigt; d. h. auch, die Formeln beziehen sich auf die *verkürzte* Wahrheitstafel. Andererseits ist für manche Analysen die *vollständige* Wahrheitstafel überlegen oder notwendig, hier gibt es eine noch nicht geklärte Diskrepanz.

Zwei Modelle der Positiv-Implikation

Es gilt aber, noch eine weitere Unterscheidung zu treffen: Bei der *normalen Implikation* bzw. überhaupt den 4-Welten-Relatoren hatte ich festgelegt: $a + b + c + d > 0$

Begründung: $a + b + c + d$ umfasst *alle* Fälle in *allen* möglichen Welten (bei 2 Variablen X, Y), die Summe kann daher nicht gleich 0 sein, denn dies wäre ein logischer Widerspruch. Damit ist aber nicht die *Existenz* (d. h. $q > 0$) von X: $q(X) = a + b$ oder Y: $q(Y) = a + c$ gesichert, denn es kann gelten: $q(X) = a + b = 0$ und $q(Y) = a + c = 0$, wenn nämlich nur $d > 0$.

Wesentlich ist: Soll man bei der *Positiv-Implikation* entsprechend fordern $a + b > 0$? *Dagegen* spricht: $a + b$ umfasst ja *nicht* die Fälle in allen möglichen Welten, es könnte ja gelten: $a + b = 0$, aber $c + d > 0$. *Dafür* spricht: Die Positiv-Implikation wird so verstanden, dass sie von der Gültigkeit des Vordergliedes X ausgeht. D. h. aber, es muss gelten $a + b > 0$, denn wenn $a + b = 0$, dann gäbe es gar kein X bzw. X wäre ungültig. Also $a + b > 0$ oder $a + b \geq 0$?

Es lassen sich aus diesen beiden Möglichkeiten *zwei verschiedene Modelle* einer Logik der Positiv-Implikation aufbauen: 1) das *Existenz-Modell*: hier ist die Existenz von X gesichert, da $q(X) > 0$. Und 2) das *Nicht-Existenz-Modell*, hier kann auch gelten: $q(X) = 0$, nämlich wenn $a + b = 0$. Im analytischen Teil werden die beiden Modelle ausführlich dargestellt.

1-3-3-2 NEGATIONEN

Hier werden die Formeln für die wichtigsten *Negationen* der Positiv-Implikation genannt:

$$\begin{array}{ccc} p(X *\!\!\rightarrow \neg Y) & p(\neg X *\!\!\rightarrow Y) & p(\neg X *\!\!\rightarrow \neg Y) \\[1em] \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{c}{c+d} & \dfrac{d}{c+d} \end{array}$$

$p\neg(X *\!\!\rightarrow Y)$ hat dieselbe Formel wie $p(X *\!\!\rightarrow \neg Y)$, also $\dfrac{b}{a+b}$.

1-3-3-3 REPLIKATION

p(X ←* Y) $\frac{a}{a+c}$ Nachfolgend wichtige Negationen:

p(¬X ←* Y) p(X ←* ¬Y) p(¬X ←* ¬Y)

$\frac{c}{a+c}$ $\frac{b}{b+d}$ $\frac{d}{b+d}$

1-3-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

$$p(X *\leftrightarrow Y) = \frac{a}{a+b+c}$$

1-3-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION
Zur Übersicht ein Vergleich einiger Formeln von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X *\!\rightarrow Y) = \frac{a}{a+b}$$

$$p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X *\!\rightarrow \neg Y) = \frac{b}{a+b}$$

$$p\neg(X \rightarrow Y) = \frac{b}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X *\!\rightarrow Y) = \frac{b}{a+b}$$

1-3-4 Systematik

Wir kommen jetzt zu Formeln für andere *Junktoren* bzw. *Relatoren*. Zur Erinnerung: die Aufstellung der jeweiligen Formel erfolgt aus den *Wahrheitstafeln*. Man dividiert die Anzahl der Fälle in den positiven Welten (+) durch die Anzahl der Fälle in allen Welten (+/−).

1-3-4-1 KONJUNKTION

Es ergibt sich für die *Konjunktion* X ∧ Y: $p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

X ∧ Y	
+ + +	a
+ − −	b
− − +	c
− − −	d

Da die Konjunktion zu den wichtigsten Relationen gehört, wird sie hier genauer dargestellt.

- *Absolute* Quantität: q(X ∧ Y) = r oder spezieller: q(Fx ∧ Gx) = r.
  Beispiel: q(Fx ∧ Gx) = 50, zu lesen: ‚für 50x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.
- *Relative* Quantität: p(X ∧ Y) = r/n oder spezieller: p(Fx ∧ Gx) = r/n
  Beispiel: p(Fx ∧ Gx) = 50/100, zu lesen: ‚für 50 von 100 x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.

Negationen der Konjunktion

X ∧ ¬Y	X >– Y	$\frac{b}{a+b+c+d}$
¬X ∧ Y	X –< Y	$\frac{c}{a+b+c+d}$
¬X ∧ ¬Y	X ∇ Y	$\frac{d}{a+b+c+d}$

1-3-4-2 GESETZE DER KONJUNKTION

Man kann durch eine Formel ausdrücken, wie sich die Wahrscheinlichkeit p einer Konjunktion (bzw. der ihr entsprechenden Relation) aus den Wahrscheinlichkeiten der zwei Glieder der Konjunktion berechnen läst.

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) \wedge p(X \leftarrow Y)$

Die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$ bzw. der äquivalenten Relation $(X \leftrightarrow Y)$ wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Konjunktions-Glieder addiert und den Wert 1 subtrahiert.

$$p(X \leftrightarrow Y) = p(X \rightarrow Y) + p(X \leftarrow Y) - 1$$

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} + \frac{a+b+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{2a+b+c+2d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$$

Dieses Gesetz gilt allerdings nicht uneingeschränkt. Das zeigt folgendes Beispiel:

$$X >< Y \Leftrightarrow (X >< Y) \wedge (X \vee Y) \qquad p(X >< Y) = \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

Dies müsste also aus der Berechnung herauskommen. Real ergibt sich aber:

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{a+b+c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{a+2b+2c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{b+c-d}{a+b+c+d}$$

Man kann die oben genannte Rechenregel aber folgendermaßen ergänzen: *negative Summanden werden gestrichen*. So wird also in dem Bruch $\frac{b+c-d}{a+b+c+d}$ das ‚d' gestrichen, womit das gewünschte Ergebnis herauskommt.

1-3-4-3 ANDERE RELATIONEN

Diese Relationen entsprechen X und Y bzw. ¬X und ¬Y.

Präpension (Präpensor) $p(X \rfloor Y) = p(X) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$

Postpension (Postpensor) $p(X \rceil Y) = p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$

Pränonpension (Pränonpensor) $p(X \lfloor Y) = p(\neg X) = \frac{c+d}{a+b+c+d}$

Postnonpension (Postnonpensor) $p(X \lceil Y) = p(\neg Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d}$

1-3-4-4 TAUTOLOGIE UND ANTILOGIE

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass m. E. der *Tautologator* ⊤ und der *Antilogator* ⊥ nicht als normale Relatoren aufgefasst werden dürfen. Da der Tautologator alles zu einer *Tautologie* verbindet und der Antilogator alles zu einer *Kontradiktion*, gehören sie ohnehin in den analytischen und nicht in den synthetischen Bereich. Dennoch seien ihre möglichen Formeln hier genannt:

$$p(X \top Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1 \qquad p(X \perp Y) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

1-3-4-5 QUANTITATIVE WAHRHEITSTAFEL

Erst jetzt sind die Informationen vorhanden, um ein Thema anzugehen, was eigentlich schon vorher einen Platz verdient hätte: die *quantitative Wahrheitstafel*. Und zwar wollen wir 2 Fälle, am Beispiel der Implikation, unterscheiden:

1) *Gesamt-Ausdruck* / 1fache Quantifizierung: $p(X \to Y) = m/n$

2) *Getrennte Komponenten* / 2fache Quantifizierung: $p(X) = r/n \to p(Y) = s/n$

Untersuchen wir diese 2 Fälle gesondert (das ist vor allem für Spezialisten gedacht):

1) *1fache Quantifizierung*: $p(X \to Y) = m/n$

Die zentrale Frage lautet: Lässt sich eine Wahrheitstafel für $p(X \to Y) = m/n$ angeben?

Man könnte zunächst meinen, man übernimmt den Wahrheitsverlauf der *qualitativen Implikation* $X \to Y$. Dies wäre eine einfache und elegante Lösung. Hier gilt:

	X	Y	X → Y		
1.	+	+	+	$X \wedge Y$	$\Rightarrow X \to Y$
2.	+	−	−	$X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow \neg(X \to Y)$
3.	−	+	+	$\neg X \wedge Y$	$\Rightarrow X \to Y$
4.	−	−	+	$\neg X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow X \to Y$

Gilt dann entsprechend für $p(X \rightarrow Y) = m/n$?

	$p(X) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p(X \rightarrow Y) = m/n$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Nach genauer Analyse ist diese Darstellung aber nicht haltbar. Aus folgenden Gründen:
Bei einer Wahrheitstafel wird der Wert einer Relation aus den Werten ihrer *Komponenten* abgleitet, als deren Funktion: d. h. die Relation ist *wahrheitswert-funktional*.

Die *Komponenten* im Beispiel sind offensichtlich X und Y, im quantitativen Modell als p(X) und p(Y) zu fassen. Für p(X) und p(Y) sind allerdings keine Werte ausgewiesen. Wir können ihnen aber welche zuweisen und wählen: $p(X) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ (damit wir haben allerdings indirekt keine 1fache, sondern eine 3fache Quantifizierung).

Es zeigt sich, dass keine strengen, *genauen* Schlüsse von $p(X) \wedge p(Y)$ auf $p(X \rightarrow Y)$ möglich sind. Man findet nur *partielle, semi-analytische* Schlüsse wie:

$$p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n.$$

Anders als im *qualitativen* Modell, wo aus X und Y bzw. deren Negationen *strenge* Schlüsse auf $X \rightarrow Y$ möglich sind (vgl. die obige Wahrheitstafel).

Für $p(X \rightarrow Y) = m/n$ lässt sich keine Wahrheitstafel und entsprechend kein Wahrheitsverlauf angeben. Wir müssen $p(X \rightarrow Y)$ als *nicht weiter zerlegbare* Einheit betrachten, entsprechend p(X) und p(Y). $p(X \rightarrow Y) = m/n$ ist nicht wahrheitswert-funktional.

Wichtig ist aber: In der quantitativen *Aussagen-Logik*, in der nur die Werte $p = 1$ und $p = 0$ vorkommen, sind die Verhältnisse völlig anders. Für $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$ lässt sich nämlich sehr wohl eine Wahrheitstafel angeben, denn wir können $p(X \rightarrow Y) = 1$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 0$ in Abhängigkeit von p(X) und p(Y) angeben (vgl. Punkt 1-4).

Und anders sieht es auch aus für den Ausdruck mit *zwei getrennt quantifizierten* Komponenten, nämlich: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$. Dafür lässt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel aufstellen, wie ich im Folgenden zeigen werde.

2) *2fache Quantifizierung*: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
Wir folgen wieder der *aussagen-logischen* Wahrheitstafel für die Implikation (vgl. oben).
Entsprechend stellen wir dann eine *quantitative* Wahrheitstafel auf:

	$p(X) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Nun müssten auch die entsprechenden Relationen gelten, also:
1. $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
2. $p(X) = r/n \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow \neg[p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n]$
3. $\neg[p(X) = r/n] \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
4. $\neg[p(X) = r/n] \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$

Es mag erstaunen, dass diese Schlüsse gelten sollen, vor allem z. B. in der 4. Zeile mit 2 negativen Prämissen. Aber man geht hier quasi nach einer *logischen Mechanik* vor, die sich aus der *Definition der Implikation* ergibt. Und danach ist eine Implikation eben grundsätzlich wahr bzw. ein Schluss gültig, wenn die Vordersätze negiert bzw. falsch sind.

Allerdings werden hier p(X) und p(Y) quasi *entquantifiziert*, sie werden einfach wie X und Y behandelt. So sind die obigen Schlüsse *mathematisch* gesehen unplausibel oder sogar sinnlos. Das zeigt sich, wenn man eine modifizierte *quantitative Wahrheitstafel* aufstellt. Hierfür sind das X+ (wahr) und X− (falsch) in *Zahlenwerte* zu übersetzen (für Y entsprechend).

qualitativ:	quantitativ:	
X (+)	p(X) = r/n	
X (−) bzw. ¬X	¬[p(X) = r/n]	p(X) ≠ r/n

Somit ergibt sich die folgende *quantitative* Wahrheitstafel:

	p(X)	p(Y)	p(X) = r/n → p(Y) = s/n
1.	r/n	s/n	+
2.	r/n	≠s/n	−
3.	≠r/n	s/n	+
4.	≠r/n	≠s/n	+

Schon die Werte r/n und s/n, aber vor allem die *negierten* Werte ≠r/n und ≠s/n sind völlig *unbestimmt*. Sie können, je nach Interpretation der Negation, für (unendlich) viele Werte stehen. Es ist daher keine Methode erkennbar, mit der man *mathematisch* beweisen könnte, dass hier ein strenger Schluss vorliegt. Fazit: Die Wahrheitstafel ist generell sinnvoll nur in der (*quantitativen*) *Aussagen-Logik*, aber nicht in einer *allgemeinen quantitativen Logik*. Sie ist gar nicht verwendbar bei Gesamt-Ausdrücken wie p(X → Y) = r/n, und logisch verwendbar, aber mathematisch unplausibel bei getrennten Komponenten wie p(X) = r/n → p(Y) = s/n.

1-3-5 Erweiterungen

Hier soll die *intensionale Quantität* behandelt werden. Ich habe bisher nur die *extensionale* Quantität von Objekten bzw. Relationen dargestellt:

- *absolute* Anzahl bzw. absolute Häufigkeit (q)
- *relative* Anzahl bzw. relative Häufigkeit (p)

Denn wie schon gesagt: die Logik geht im Wesentlichen von der extensionalen Quantität aus. Man kann aber auch die *intensionale* Quantität von *Eigenschaften* (*Intensität*) angeben.

Die intensionale Qualität ist der *Grad*, zu dem eine Eigenschaft einem Objekt zukommt. Beispiel: „Peter ist intelligent“. Man könnte nun *quantitativ* angeben, *wie* intelligent er genau ist. Im Einzelnen unterscheidet man in der Statistik bzw. der Wissenschaftstheorie verschiedene *Skalen*: *Nominal-Skala, Ordinal-Skala, Intervall-Skala* und *Ratio-Skala*.

1-3-5-1 NOMINAL-SKALA

Hier wird nur unterschieden, ob jemand eine Eigenschaft zukommt oder nicht.
Man spricht von *qualitativen* Eigenschaften oder Merkmalen. Z. B.:

„Fritz ist klug“

„Fritz ist nicht klug (= dumm)“

Auf die Probleme dieser qualitativen Unterscheidung gehe ich noch später ein.
Dies lässt sich im Rahmen der normalen (Prädikaten-)Logik ausdrücken. Fx_i oder $\neg Fx_i$.

1-3-5-2 ORDINAL-SKALA

Auf der *Ordinal-Skala* werden *Größenunterschiede* festgestellt. Dies entspricht grammatisch dem *Komparativ*. Z. B.:

„Fritz ist klüger als Peter"
„Fritz ist dümmer als Peter"
„Fritz ist gleich intelligent wie Peter, nicht klüger und nicht dümmer"

Um das logisch zu schreiben, formuliert man am besten um:

„Die Intelligenz von Fritz ist größer als die Intelligenz von Peter"
halb-formal: q[Intelligenz[Fritz]] > q[Intelligenz[Peter]]
formal: $q[F[x_1]] > q[F[x_2]]$

Zur Abgrenzung von der *extensionalen* Schreibweise kann man z. B. *eckige* Klammern statt *runder* Klammern verwenden.

1-3-5-3 INTERVALL-SKALA

Auf der *Intervall-Skala* arbeitet man mit *Zahlenwerten* bzw. quantitativen Eigenschaften, man verwendet also eine „Messlatte". Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150"

Das obige Beispiel betrifft die *absolute* Quantität. Man kann aber auch die *relative* Quantität angeben. Dies ist allerdings bei der Intelligenz von Menschen nicht ganz unproblematisch. Man könnte etwa festlegen: 180 I. Q ist die *maximale* Intelligenz eines Menschen, und gibt davon die konkrete Intelligenz eines Menschen in Relation zu dieser Maximalgröße an. Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150/180, d. h. er ist zu ca. 83% intelligent"

Eine solche Aussage über die Intelligenz ist aber problematisch, weil es keine natürliche Obergrenze der Intelligenz gibt (oder sie uns jedenfalls nicht bekannt ist).

Anders wäre dagegen z. B. eine Aussage über den geometrischen Winkel zu beurteilen. Ein normaler Winkel (sehen wir vom überstumpfen Winkel usw. ab) kann einen beliebigen Wert > 0° und < 180° einnehmen. Gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass wir 180° als obersten Winkelwert festlegen. Dann wäre es unproblematisch (wenn auch nicht üblich) zu sagen: ‚Ein Winkel von 90° besitzt 90/180 = 50% Winkelgröße'.

Zurück zum Beispiel mit der Intelligenz:

Halb-formal könnte man schreiben:

q[Intelligenz[Fritz]] = 150 bzw. p[Intelligenz[Fritz]] = 150/180 = 0,83

Formal:

$q[F[x_1]] = 150$ bzw. $p[F[x_1]] = 150/180 = 0{,}83$

Denkbar wäre auch: $0{,}83F[x_1]$

1-3-5-4 RATIO-SKALA

Eine Ratio-Skala ist auch eine metrische Skala, aber im Gegensatz zur Intervall-Skala gibt es bei ihr einen *natürlichen 0-Punkt*. Dies ist bei der Körpergröße der Fall, aber z. B. bei der Temperatur-Skala gibt es keinen natürlichen 0-Punkt. Innerhalb einer Ratio-Skala sind erweiterte mathematische Operationen möglich.

1-3-5-5 FUZZY LOGIK

Die *Fuzzy-Logik* ist auch eine *quantitative* Logik. Nach meiner Auffassung ist das, was in der Fuzzy Logik vollzogen wird, eine *intensionale* Quantifizierung. Nur deutet man das in der Fuzzy Logik quasi extensional, nämlich als den *Grad, in dem ein x einer Menge angehört*.

Dies besagt aber nicht anderes als den *Grad*, mit dem eine *Eigenschaft* einem Objekt x zukommt. So gesehen findet keine echte extensionale Quantifizierung in der Fuzzy Logik statt (vgl. zur Fuzzy Logik vor allem 1-2-5-5 und 1-4-1-1).

Mein Ansatz berücksichtigt zwar auch die *intensionale* Quantifizierung, also die Quantität von Eigenschaften bzw. den Grad der Relation, in dem eine Eigenschaft einem Objekt zukommt. Aber im Vordergrund steht bei meinem Ansatz die *extensionale* Quantifizierung, nämlich die Angabe der Anzahl der Individuen, die Elemente einer Klasse sind oder denen eine Eigenschaft zukommt.

Um den Unterschied noch einmal am Beispiel zu verdeutlichen:

- *extensional*: „70% aller Menschen sind egoistisch“
- *intensional*: „Der (bzw. dieser) Mensch ist zu 70% egoistisch (zum Grad von 70%)“

Auf einer höheren Ebene kann man das kombinieren oder integrieren:

2fach: „70% der Menschen sind zu 60% intelligent“

3fach: „70% der Menschen, die zu 60% intelligent sind, sind zu 90% hilfsbereit“

Allgemein: 3fach: „r/n aller x, die zu s% Eigenschaft F haben, haben zu t% Eigenschaft G“.

Z. B.: $p(s^*F \rightarrow t^*G) = r/n$

In der Mathematik und vor allem *Statistik* sind solche und noch komplexere quantitative Verknüpfungen durchaus üblich; anstatt reiner Prozentangaben können dabei auch Formeln stehen. In der Logik ist aber die *Quantifizierung* bis heute eher noch die Ausnahme. Ich versuche in meinem Modell, die Vorteile der Quantifizierung in die Logik einzubeziehen, ohne dabei die Stärken und Eigenständigkeiten der Logik aufzugeben.

1 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

1-4-1 Einführung

Aussagen-logische Relationen scheinen nicht *quantitativ* bestimmt zu sein, anders als in der *Quantoren-Logik* gibt es keine Quantitäts-Zeichen, wenn man nicht die Negation als Quantitäts-Zeichen interpretiert. Wie ich aber schon angemerkt habe, ist *jede* Relation notwendig auch quantitativ (sieht man einmal ab von einer metaphysisch-spekulativen Wirklichkeitssphäre, in der es keine Quantität geben mag). Eine aussagen-logische Relation wie $X \rightarrow Y$ enthält eine verborgene, *implizite Quantität*. Auch jede Aussage der normalen Sprache wie z. B. 'Der Mensch ist sterblich' enthält implizit eine quantitative Struktur, obwohl kein Zahlwort o. ä verwendet wird. Die *quantitative Aussagen-Logik* hat erstens die Funktion, diese implizite Quantität *explizit* zu machen, zweitens, aussagen-logische Relationen zu *quantifizieren*.

Zur ersten Erläuterung der quantitativen Aussagen-Logik bleiben wir zur Einfachheit bei der *Implikation*, die – wie aufgezeigt – eine besonders wichtige Rolle spielt. In der *2-wertigen* Logik gilt für die Implikation: Sie kann *positiv* (gültig) sein und *negativ* (ungültig).

1-4-1-1 QUANTIFIZIERUNG QUALITATIVER KENNZEICHNUNGEN

Ich vertrete also die Auffassung, dass die *qualitativen* Kennzeichnungen „positiv" und „negativ" *implizit* quantitativ sind. Zumindest lassen sie sich quantitativ interpretieren bzw. darstellen, und zwar gilt:

$X \rightarrow Y$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 0$

Man kann das (u. a.) folgendermaßen übersetzen:
$p(X \rightarrow Y) = 1$ alle X sind Y
$p(X \rightarrow Y) = 0$ alle X sind nicht Y
(Auf Probleme dieser Deutung bzw. mögliche andere Deutungen gehe ich noch ein.)

Es ist also zu unterscheiden:
- $X \rightarrow Y$ als Struktur in der Aussagen-Logik mit (implizitem) Wert von $p = 1$ (Konstante)
- $X \rightarrow Y$ in $p(X \rightarrow Y) = r/n$ in der quantitativen Logik als Struktur mit unbestimmten Wert (Variable), der erst durch p ein Wert zugesprochen wird.

In der quantitativen Form nenne ich eine Relation mit $p = 1$ oder $p = 0$ *deterministisch*. Alle anderen Werte, also $0 < p < 1$, sind *statistisch*. Man kann die Werte $p = 1$ und $p = 0$ somit als statistische *Grenzfälle* ansehen.

Anders gesagt, lässt sich die (quantitative) Aussagen-Logik insgesamt als *Grenzfall* der Quantitäts-Logik betrachten, welche *alle* Werte $0 \leq p \leq 1$ umfasst. Damit ergibt sich:

$p = 1$ deterministisch-positiv
$0 < p < 1$ statistisch
$p = 0$ deterministisch-negativ („nullistisch“)

Es sind natürlich auch andere semantische Deutungen als „alle X sind Y“ für $X \rightarrow Y$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 1$ möglich; vor allem lassen sich folgende quantitative Deutungen bzw. Anwendungen für $X \rightarrow Y$ unterscheiden:

– *rein aussagen-logisch*: wenn die Aussage ‚X’ wahr ist, dann ist *in allen Fällen* auch die Aussage ‚Y’ wahr
– *funktional*: wenn X, dann *in allen Fällen* (immer) auch Y
– *extensional*: *alle* X sind Y, die Klasse X ist *Teilmenge* der Klasse Y
– *intensional*: (ein) X ist *vollständig* Y

Natürlich kann man sich auch von der *Implikation* lösen und allgemein bestimmen:

$p(\Phi) = 1$: Φ gilt *generell*, d. h. für *alle*, *immer* oder *vollständig*
$p(\Phi) = 0$: Φ gilt *generell nicht*, d. h. für *keinen*, *niemals* oder *gar nicht*

Die *extensionale* Deutung erweist sich aber als besonders praktikabel und anschaulich. Daher werde ich sie auch im Folgenden bevorzugen. Ebenso erweist sich die Implikation als besonders geeignet zur Demonstration, daher werde ich sie ebenfalls weiterhin bevorzugen.

Auch die *Fuzzy-Logik* ist quantitativ. Dies wird in der Fuzzy-Logik so interpretiert, dass damit die *2-wertige Logik* bzw. überhaupt die *2-Wertigkeit* überwunden ist. Ich halte eine andere Interpretation für sinnvoller. Die 2-Wertigkeit wird nur verschoben, bleibt aber erhalten. Das gilt gleichermaßen für eine extensionale wie eine intensionale Quantifizierung.

Es geht eben bei Quantifizierung nicht mehr darum, ob X oder nicht X, sondern stattdessen ob $p(X) = r/n$ oder $p(X) \neq r/n$. Im Beispiel: p(X) kann nicht *zugleich* 0,5 und nicht 0,5 sein, genauso wenig wie *zugleich* X und nicht X gelten kann. Damit ist der *Satz vom Widerspruch* $\neg(X \wedge \neg X)$ weiterhin gültig, man könnte ihn z. B. quantitativ formulieren:

$$\neg[p(X) = r/n \wedge p(X) \neq r/n]$$

Entsprechend gilt der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* $X >< \neg X$ quantitativ:

$$p(X) = r/n >< p(X) \neq r/n.$$

1-4-1-2 DETERMINISTISCH POSITIV

Für eine *deterministische* Relation oder Struktur gilt wie gesagt p = 1. Wir hatten als Formel der relativen Größe der Implikation kennen gelernt:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

D. h. für $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Somit r = n. Es zeigt sich:

Wenn $b = 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$. Man braucht hier nicht hinzuzufügen: $a + b + c > 0$.

Denn es gehört wie beschrieben zu den Grundvoraussetzungen, dass gilt: $a + b + c + d > 0$.

Somit: $b = 0 \Rightarrow a + b + c > 0$

1-4-1-3 WAHRHEITSTAFEL

Ich gebe im Folgenden die Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y) = 1$ an. Man kann die Wahrheitstafel über *absolute* Werte (q) definieren, sinnvoller ist aber, von *relativen Größen* (p) auszugehen.

• Alternative Quantifizierung von $X \rightarrow Y$
Wir haben bisher $X \rightarrow Y$ als $p(X \rightarrow Y) = 1$ quantifiziert. Technisch gesehen, ist es zunächst schwierig, für $p(X \rightarrow Y) = 1$ eine Wahrheitstafel aufzustellen. Unproblematischer wäre es, für $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$, eine Wahrheitstafel aufzustellen. $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$, also doppelt quantifiziert, könnte man auch als eine Quantifizierung von $X \rightarrow Y$ ansehen. Beide Ausdrücke sind aber nicht äquivalent, es gilt: $p(X \rightarrow Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$. Für den Wahrheitsverlauf in der Wahrheitstafel ergeben sich allerdings keine Unterschiede, daher ziehe ich $p(X \rightarrow Y) = 1$ vor, das $X \rightarrow Y$ exakter quantifiziert als $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$.

• Zunächst zur Erinnerung die *qualitative* Wahrheitstafel und ihre primäre Deutung:

	$X \rightarrow Y$	Deutung:
1.	+ + +	$X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$
2.	+ − −	$X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; \neg(X \rightarrow Y)$
3.	− + +	$\neg X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$
4.	− + −	$\neg X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$

• Normale, quantitative Wahrheitstafel
Übersetzen wir das in eine *quantitative* Wahrheitstafel mit *relativen* Größen (p), so werden die qualitativen Werte von X wie folgt interpretiert (für Y und $X \rightarrow Y$ entsprechend):

qualitativ	quantitativ
X +	$p(X) = 1$
X − (bzw. $\neg X$)	$p(X) = 0$

Manchmal werden von anderen Autoren auch in der herkömmlichen, qualitativen Tafel die Zeichen 1 und 0 eingesetzt, für „wahr“ bzw. „falsch“. Aber dort sind es nur *Symbole*, hier, in meinem Ansatz, geht es aber um konkrete *Zahlenwerte*; das ist nicht zu verwechseln.

	$p(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	1 1 1	$p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
2.	1 0 0	$p(X \wedge \neg Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 0$
3.	0 1 1	$p(\neg X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
4.	0 1 0	$p(\neg X \wedge \neg Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$

• konjunktive Wahrheitstafel
Hier ergibt sich eine *getrennte* Erfassung von p(X) und p(Y):

	$p(X)$	$\wedge$ $p(Y)$	$\Rightarrow$ $p(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	1	1	1	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
2.	1	0	0	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 0$
3.	0	1	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
4.	0	0	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, ergibt sich:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$ $\wedge$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$ $\Rightarrow$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	0	0
3.	0	1	1
4.	0	0	1

Diese konjunktive Wahrheitstafel muss aber letztlich *implikativ* gedeutet werden, sonst landet man in einem *unendlichen Regress*. Die Zeile 1 und 2 seien exemplarisch erläutert:

1. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$ d. h. : a + c > 0, b + d = 0

Daraus ergibt sich: a > 0, b + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$$

2. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$ d. h. : a + c = 0, b + d > 0

Daraus ergibt sich: b > 0, a + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{0}{b} = 0$$ (denn b kommt als einziges nicht im Zähler vor)

Der Leser möge Zeile 3 und 4 bitte selbst analysieren. Er erhält dann ein beeindruckend systematisches Ergebnis. Und er erhält 4 *strenge logische Schlüsse*. Während man also bei der generellen *quantitativen Logik* Wahrheitstafeln kaum sinnvoll verwenden kann, so ist dies bei der quantitativen Aussagen-Logik sehr wohl möglich. Denn diese Tafeln entsprechen genau den Tafeln der Aussagen-Logik, was beweist, dass meine *Übersetzung der Aussagen-Logik in mathematische Formeln* berechtigt ist.

Damit wäre der *eine* Wert der 2-wertigen Logik abgehandelt. Der *zweite* Wert ergibt sich, wenn X → Y falsch bzw. negativ ist. Dafür verwendet man die *Negation* ¬. Also ¬(X → Y).

1-4-1-4 DETERMINISTISCH NEGATIV

Die *deterministisch-negative* Relation wird wie gesagt durch den Wert p = 0 ausgedrückt.

Somit ergibt sich: ¬(X → Y): p(X → Y) = 0 (Alternative: p(X) = 0 → p(Y) = 0)

Für die normale, qualitative Wahrheitstafel heißt das:

	$\neg(X \to Y)$	Deutung:
1.	$- + + +$	$X \wedge Y \Rightarrow \neg\neg(X \to Y) \Rightarrow X \to Y$
2.	$+ + - -$	$X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \to Y)$
3.	$- - + +$	$\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg\neg(X \to Y) \Rightarrow X \to Y$
4.	$- - + -$	$\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg\neg(X \to Y) \Rightarrow X \to Y$

Die *doppelte Negation* erklärt sich wie folgt: Wenn z. B. unter dem Negationszeichen $\neg$ in $\neg(X \to Y)$ ein $-$ (minus) steht, ist die Negation ihrerseits negiert. Nun gilt: $\neg\neg(X \to Y) \Leftrightarrow (X \to Y)$. Übersetzen wir die *qualitative* wieder in eine *quantitative* Wahrheitstafel:

	$p\neg(X \to Y)$	Deutung:
1.	0 1 1 1	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \to Y) = 0$
2.	1 1 0 0	$p(X \wedge \neg Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \to Y) = 1$
3.	0 0 1 1	$p(\neg X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \to Y) = 0$
4.	0 0 1 0	$p(\neg X \wedge \neg Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \to Y) = 0$

Wie noch gezeigt werden wird, gilt: $p\neg(X \to Y) = 0 \Leftrightarrow p(X \to Y) = 1$

Ganz korrekt schriebe man mit *doppelter* Klammer: $p(\neg(X \to Y))$ statt $p\neg(X \to Y)$; aus Gründen der Vereinfachung wähle ich aber meistens die erste Schreibweise.

Will man die umständlichen Termini *deterministisch-positiv* und *deterministisch-negativ* vermeiden, kann man nur die Relationen mit p = 1 deterministisch nennen und die Relationen mit p = 0 *nullistisch* (in Ermangelung eines besseren Begriffs). Allerdings ist zu bedenken:

$$p(X \to Y) = 0 \Leftrightarrow p(X >\!- Y) = 1$$

D. h. einer *deterministisch-negativen* Struktur entspricht immer auch eine *deterministisch-positive* Struktur. Somit kann man prinzipiell *alle* deterministischen Relationen auch als deterministisch-*positiv* kennzeichnen und auf die Bestimmung „nullistisch" verzichten.

1-4-1-5 EINWÄNDE GEGEN DIE QUANTIFIZIERUNG

Ich habe hier für *aussagen-logische* Relationen oder Relatoren eine quantitative Interpretation bzw. eine Quantifizierung mittels der (empirischen) *Wahrscheinlichkeit* p vorgestellt.

Und zwar *Position*: p = 1, *Negation*: p = 0. Ich möchte mögliche Gründe gegen dieses Modell kurz anführen, ausführlich diskutiere ich das in meinem Buch „Integrale Logik".

1) *Wahrheitsgrad* w

Aussagen-logisch versteht man die Position $X \to Y$ als: ‚$X \to Y$' ist (empirisch) *wahr*; dagegen die Negation $\neg(X \to Y)$ als ‚$X \to Y$' ist (empirisch) falsch. Es geht also um Kategorien der *Wahrheit*. Von daher könnte man argumentieren, für eine Quantifizierung sei die *Wahrscheinlichkeit* nicht geeignet. Sinnvoller sei jedenfalls, mit einem *Wahrheitsgrad* w zu operieren. Es ergäbe sich dann:

$$X \to Y\text{: } w(X \to Y) = 1 \qquad \neg(X \to Y)\text{: } w(X \to Y) = 0$$

Sicher wäre es generell auch denkbar, eine Quantifizierung der Aussagen-Logik mit einem *Wahrheitsgrad* w durchzuführen. Aber die Verwendung der *Wahrscheinlichkeit* ist nicht nur legitim, sondern sogar überlegen. Dieser Wahrscheinlichkeits-Ansatz spielt eine wesentliche Rolle in der vorliegenden Arbeit und wird daher im Folgenden ausführlich erläutert:

Es ist berechtigt, die (empirische) aussagen-logische Wahrheit oder Falschheit mit der (empirischen) Wahrscheinlichkeit zu quantifizieren. In einem *2-wertigen* System wie der Aussagen-Logik gilt: wahr = vollständig wahr = in allen Fällen wahr; nicht wahr (falsch) = gar nicht wahr = in keinem Fall wahr. Der Bezug aus „alle" oder „keiner" wird aber gerade durch die *Wahrscheinlichkeit* p ausgedrückt. Natürlich kann der Satz p(X) = 1 auch falsch sein, dann gilt eben $p(X) = 0$. Und natürlich kann auch ein Satz wie $p(X \rightarrow Y) = 0{,}75$ wahr oder falsch sein, aber ein solcher Satz ist in der quantitativen *Aussagen-Logik* nicht definiert.

2) *absolute Häufigkeit* q

Auch wenn man einräumt, dass man aussagen-logische Relationen mittels der *Häufigkeit* quantitativ interpretieren kann, könnte man einwenden: Es geht nicht um die *relative* Häufigkeit p, sondern um die *absolute* Häufigkeit q. Dabei wären folgende Deutungen naheliegend:

$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) = 1$ $\quad\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$

Oder :

$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) > 0$ $\quad\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$

Das könnte man z. B. folgendermaßen begründen. Für eine *allgemeine* Aussage (wie „alle Menschen sind sterblich“), mag p angemessen sein, aber auch für eine *singuläre* Aussage wie „Peter geht ins Kino“?

Es lässt sich aber zeigen, dass wenn man von der *absoluten* Häufigkeit ausgeht, wichtige logische Gesetze wie der „Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch“ nicht gelten. Andererseits kann man auch singuläre Sätze adäquat mit mit der Wahrscheinlichkeit p erfassen. Man geht aus von $p(X) = r/n$, muss aber festlegen, dass $r = 1$ und $n = 1$. Es gilt eben generell: $p(X) = n/n = 1$. n/n steht für *alle*, auch wenn „alle“ im Sonderfall nur *einer* ($q = 1$) ist.

3) *andere Wahrscheinlichkeit* p

Wir sind ausgegangen von: X: $p(X) = 1$, $\neg$X: $p(X) = 0$. Man kann zwar grundsätzlich an der Quantifizierung durch *Wahrscheinlichkeit* festhalten, aber andere Werte wählen. Es lässt sich nämlich ein wichtiger Einwand gegen die Interpretation mit $p = 1$ und $p = 0$ anbringen:

Positive und *negierte* Relationen sind in der Aussagen-Logik *kontradiktorisch*, also z. B.:

$(X \rightarrow Y)$	$^{+}{>}{<}^{+}$		$\neg(X \rightarrow Y)$
+	+	–	+
–	+	+	–
+	+	–	+
+	+	–	+

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ und ihre *Negation* $\neg(X \rightarrow Y)$ stehen aussagen-logisch in einem *kontradiktorischen* Verhältnis, was durch den *Kontravalenz*-Relator >< ausgedrückt wird.

Bei der Quantifizierung ergibt sich aber ein *konträres* Verhältnis:

$p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$ sind nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr.*

Generell sind $p = 1$ und $p = 0$ nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr*.

Bei einer Kontradiktion gilt: wenn X falsch ist, muss Y wahr sein und umgekehrt.

Dagegen ist es bei einem konträren Verhältnis möglich, dass *beide Aussagen falsch* sind.

Und dies ist ja bei $p = 1$ und $p = 0$ gegeben, denn es kann ja gelten: $0 < p < 1$.

Wenn z. B. $p = 0{,}5$ ist, dann sind $p = 1$ und $p = 0$ falsch.

Die *konträre* Relation wird durch den *Exklusor* | ausgedrückt. Es gilt:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \ ^{+}|^{+} \ p(X \rightarrow Y) = 0$$

Der *kontradiktorische* Gegensatz von $p = 1$ ist dagegen $p < 1$. Es gilt also:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \ ^{+}{>}{<}^{+} \ p(X \rightarrow Y) < 1$$

Und entsprechend ist $p > 0$ der kontradiktorische Gegensatz von $p = 0$. Somit gilt:

$$p(X \rightarrow Y) = 0 \ ^{+}{>}{<}^{+} \ p(X \rightarrow Y) > 0$$

Es ist natürlich zunächst unbefriedigend, dass *aussagen-logisch* zwischen $(X \rightarrow Y)$ und $\neg(X \rightarrow Y)$ eine *kontradiktorische* Relation besteht, dagegen zwischen den *Quantifizierungen* $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$ nur eine *konträre*. So wäre zu fragen, ob man besser eine Quantifizierung wählt, bei der das kontradiktorische Verhältnis erhalten bleibt.

Naheliegend wäre zunächst das folgende Modell:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) < 1$
$(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$
$\neg(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$

Hier wäre allerdings die *2-Wertigkeit* der Aussagen-Logik aufgehoben, man könnte mit der Aussagen-Logik 4 unterschiedliche Werte ausdrücken. Schon diese Aufhebung der 2-Wertigkeit ist problematisch, denn die Aussagen-Logik gilt allgemein als 2-wertiges System.

Vor allem aber führt dieser Ansatz zu großen logischen Problemen, ja zu Widersprüchen, wie hier jedoch nicht im Einzelnen gezeigt werden soll.

Ebenso nicht überzeugend sind folgende Definitionen:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$

Es zeigt sich, dass man bei den anfangs gewählten Definitionen bleiben sollte:

$p = 1$ (positiv, gültig, wahr) $p = 0$ (negativ, ungültig, falsch)

Dies umso mehr, als sich noch zeigen wird, wie fruchtbar dieses Modell ist, man kann mit ihm alle aussagen-logischen Strukturen und Gesetze *numerisch* darstellen.

Und das *Kontradiktions-Problem* lässt sich durchaus innerhalb dieses Modells lösen, sogar ganz elegant. Dies lässt sich wie folgt begründen: In einem System, in dem nur *zwei* Werte zugelassen sind (positiv / negativ bzw. p = 1 / p = 0), *müssen* diese Werte *kontradiktorisch* sein. Und genau dies ist der Fall in der *quantitativen Aussagen-Logik*, hier gilt:

$p = 1 \;>\!< p = 0$ oder $\neg(p = 1) \Leftrightarrow p = 0$ bzw. $\neg(p = 0) \Leftrightarrow p = 1$

In einem differenzierteren System, mit *mehr* Werten, sind p = 1 und p = 0 dagegen nur *konträr*. Das werde ich für die *quantitative* Quantoren-Logik zeigen, in der 4 Werte unterschieden werden und daher andere *Negationen* vollzogen werden; hier gilt z. B.: $\neg(p = 1) \Leftrightarrow p < 1$ bzw. $\neg(p = 0) \Leftrightarrow p > 0$.

1-4-2 Implikation

1-4-2-1 DEFINITION

Die Implikation wurde schon in der Einführung beschrieben. Es ergibt sich:

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + c + d > 0, b = 0$	$a + c + d = 0, b > 0$
Gegen-Relation	$p(X >\!- Y) = 0$	$p(X >\!- Y) = 1$

1-4-2-2 NEGATIVE IMPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \rightarrow \neg Y$ (entspricht X | Y)	$\neg(X \rightarrow \neg Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$	$p(X \rightarrow \neg Y) = 0$
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$b + c + d > 0$, $a = 0$	$b + c + d = 0$, $a > 0$
Gegen-Relation	$p(X \wedge Y) = 0$	$p(X \wedge Y) = 1$

1-4-2-3 REPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftarrow Y$	$\neg(X \leftarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftarrow Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + b + d > 0$, $c = 0$	$a + b + d = 0$, $c > 0$
Gegen-Relation	$p(X -\!\!< Y) = 0$	$p(X -\!\!< Y) = 1$

1-4-2-4 ÄQUIVALENZ

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftrightarrow Y$	$\neg(X \leftrightarrow Y$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$p(X \leftrightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + d > 0$, $b + c = 0$	$a + d = 0$, $b + c > 0$
Gegen-Relation	$p(X >< Y) = 0$	$p(X >< Y) = 1$

1-4-2-5 KOMPLEXE IMPLIKATION

Es soll auch für eine Implikation mit *3* Variablen das obige Schema ausgefüllt werden:

$$p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Deterministisch

Aussagen-Logik	$(X \to Y) \to Z$
Quantitäts-Logik	$p((X \to Y) \to Z) = 1$
Formel	$\frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$
Bedingungen	$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 > 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 = 0$

Nullistisch

Aussagen-Logik	$\neg((X \to Y) \to Z)$
Quantitäts-Logik	$p(\neg((X \to Y) \to Z)) = 0$
Formel	$\frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$
Bedingungen	$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 = 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 > 0$

1-4-3 Positiv-Implikation

1-4-3-1 HERLEITUNG
Die Herleitung aus der Wahrheits-Tafel ergibt für: $p(X *\!\to Y) = 1$

	X	*→	Y		
1.	+	+	+	$q(X \wedge Y)$	$= a > 0$
2.	+	−	−	$q(X \wedge \neg Y)$	$= b = 0$

1-4-3-2 SCHEMA DER POSITIV-IMPLIKATION
Direkte (kontradiktorische) *Gegen-Relationen* gibt es bei der Positiv-Implikation nicht. Denn es gibt eben nur 3 Positiv-Relatoren, die alle auf der Implikation beruhen: *→, ←*, *↔. Gegen-Relationen müssen somit mit Hilfe der *Negation* gebildet werden.

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X *\!\to Y$	$\neg(X *\!\to Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X *\!\to Y) = 1$	$p(X *\!\to Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b} = 1$	$\frac{a}{a+b} = 0$
Bedingungen	$a > 0, b = 0$	$a = 0, b > 0$
Gegen-Relation	$p(X *\!\to \neg Y) = 0$	$p(X *\!\to \neg Y) = 1$

(Die Bedingung b > 0 und entsprechende sollen später noch diskutiert werden.)

1-4-3-3 POSITIV-REPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftarrow^{*} Y$	$\neg(X \leftarrow^{*} Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftarrow^{*} Y) = 1$	$p(X \leftarrow^{*} Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+c} = 1$	
Bedingungen	$a > 0, c = 0$	$a = 0, c > 0$
Gegen-Relation	$p(\neg X \leftarrow^{*} Y) = 0$	$p(\neg X \leftarrow^{*} Y) = 1$

1-4-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X {*}\leftrightarrow Y$	$\neg(X {*}\leftrightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X {*}\leftrightarrow Y) = 1$	$p(X {*}\leftrightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b+c} = 1$	$\frac{a}{a+b+c} = 0$
Bedingungen	$a > 0, b + c = 0$	$a = 0, b + c > 0$
Gegen-Relation	$p\neg(X {*}\leftrightarrow Y) = 0$	$p\neg(X {*}\leftrightarrow Y) = 1$

1-4-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Zum genauen Vergleich stelle ich den „Steckbrief“ von $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X {*}\rightarrow Y) = 1$ gegenüber:

Deterministisch	*Positiv-Implikation*	*Implikation*
Aussagen-Logik	$X {*}\rightarrow Y$	$X \rightarrow Y$
Quantitäts-Logik	$p(X {*}\rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
Formel	$\frac{a}{a+b} = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
Bedingungen	$a > 0, b = 0$	$a + c + d > 0, b = 0$
Gegen-Relation	$p(X {*}\rightarrow \neg Y) = 0$	$p(X >\!\!- Y) = 0$

Nullistisch	*Positiv-Implikation*	*Implikation*
Aussagen-Logik	$\neg(X *\!\!\rightarrow Y)$	$\neg(X \rightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X *\!\!\rightarrow Y) = 0$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b} = 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	a = 0, b > 0	a + c + d = 0, b > 0
Gegen-Relation	$p(X *\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$	$p(X >\!\!- Y) = 1$

1-4-4 Systematik

Wir stellen hier ausgewählte Relatoren im obigen Schema vor, vom „Null-Welt-Relator“ bis zum „Vier-Welt-Relator“; der Name richtet sich danach, in *wie vielen Welten* ein Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Beim „Null-Welt-Relator“ (Antilogator) und „Vier-Welt-Relator“ (Tautologator) habe ich schon angemerkt, dass es keine echten Relatoren sind.

Besonders der *Antilogator* ist problematisch, zwei Interpretationen sind bei ihm möglich:

• a + b + c + d > 0
Dann gilt $p(X \perp Y) = 0/a+b+c+d = 0$. Dies ist keine Kontradiktion, so wie $\neg(X \perp Y)$ keine Kontradiktion ist (sondern eine Tautologie). Erst $p(X \perp Y) = 1$ ist eine Kontradiktion.

• a + b + c + d = 0
Eine *Division durch 0* ist in der Mathematik *nicht definiert*. Somit gilt:
$p(X \perp Y) = 0/a+b+c+d = 0/0$ = undefiniert.
$p(X \perp Y) = 1$ ist dann konktradiktorisch *und* undefiniert.

Ich bevorzuge die erste Lösung, weil a + b + c + d > 0 eine *generelle Bedingung* ist, die für alle Relatoren gilt und selbst bei der Kontradiktion aufrechterhalten bleiben sollte.

1-4-4-1 NULL-WELT-RELATOR

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \perp Y$	$\neg(X \perp Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \perp Y) = 1$	$p(X \perp Y) = 0$
Formel	$\frac{0}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{0}{a+b+c+d} = 0$
Gegen-Relation	$p(X \top Y) = 0$	$p(X \top Y) = 1$
	(Kontradiktionen)	(Tautologien)

1-4-4-2 EIN-WELT-RELATOREN

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \wedge Y$ (Konjunktion)	$\neg(X \wedge Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \wedge Y) = 1$	$p(X \wedge Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a > 0$, $b + c + d = 0$	$a = 0$, $b + c + d > 0$
Gegen-Relation	$p(X \mid Y) = 0$	$p(X \mid Y) = 1$

Für die anderen 1-Welt-Relatoren $X -\!< Y$, $X >\!- Y$ und $X \nabla Y$ gilt Entsprechendes.

1-4-4-3 ZWEI-WELT-RELATOREN

Der wichtige 2-Welt-Relator $\leftrightarrow$ (Äquivalentor) wird an anderer Stelle behandelt.

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \rfloor Y$ (Präpension)	$\neg(X \rfloor Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \rfloor Y) = 1$	$p(X \rfloor Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + b > 0$, $c + d = 0$	$a + b = 0$, $c + d > 0$
Gegen-Relation	$p(X \rceil Y) = 0$	$p(X \rceil Y) = 1$

1-4-4-4 DREI-WELT-RELATOREN

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \mid Y$ (Exklusion)	$\neg(X \mid Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \mid Y) = 1$	$p(X \mid Y) = 0$
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$b + c + d > 0$, $a = 0$	$b + c + d = 0$, $a > 0$
Gegen-Relation	$p(X \wedge Y) = 0$	$p(X \wedge Y) = 1$

Andere 3-Welt-Relatoren wie $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$ werden an anderer Stelle besprochen.

1-4-4-5 VIER-WELT-RELATOR

Hier gibt es nur *einen* Relator, den *Tautologator* $\top$, der wie gesagt im eigentlichen Sinn kein Relator ist (obwohl er von manchen Logikern als Junktor aufgestellt wird).

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \top Y$	$\neg(X \top Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \top Y) \equiv 1$	$p(X \top Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} \equiv 1$	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Gegen-Relation	$p(X \perp Y) \equiv 0$	$p(X \perp Y) = 1$
	(Tautologien)	(Kontradiktionen)

Diese Auflistung zeigt, dass der *Tautologator* nicht mit den anderen Relatoren gleichzusetzen ist. Ja sie zeigt, dass es wenig sinnvoll ist, überhaupt einen solchen Relator aufzustellen. Tautologien werden vielmehr durch alle 14 anderen Relatoren (ohne Antilogator) gebildet.

1-4-5 Erweiterungen

In den Erweiterungen geht es um die (implizite) *intensionale* Quantität logischer Strukturen, vor allem von Aussagen- und Prädikaten-Logik. Dabei muss aber zunächst – zur Abgrenzung – auf die *extensionale* Quantität eingegangen werden (Genaueres in der „Integralen Logik").

1-4-5-1 EXTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

In der *quantitativen Aussagen-Logik* geht es darum zu zeigen, dass ein, scheinbar nur *qualitativer*, aussagen-logischer Ausdruck wie $X \rightarrow Y$ *implizit* eine *quantitative Struktur* besitzt, die man also in Zahlen *angeben* kann.

Es sind – wie beschrieben – verschiedene quantitative Deutungen für $X \rightarrow Y$ möglich, vor allem die folgenden zwei (wobei allerdings in beiden Fällen der *Wert* $p = 1$ beträgt):

1) funktional: In *allen* Fällen gilt, wenn X dann Y.
2) relational: *alle* X sind Y.

Diese zweite Deutung bevorzuge ich hier und ihr gilt die folgende Übersicht.

Übersicht: Extensionale Quantität in der Aussagen-Logik (allgemein)

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
alle X sind Y	100% der X sind Y	$X \rightarrow Y$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(\Phi) = 1$
alle X sind nicht Y	0% der X sind Y	$\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(\Phi) = 0$

1-4-5-2 INTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

Die Logik zielt primär auf die *extensionale* Quantität, man kann aber auch eine (implizite) *intensionale* Quantität angeben. Es ist die Quantität des *Prädikats*, üblicherweise die Quantität einer *Eigenschaft*. Z. B. fragt man: „*Zu welchem Grad* ist dieser Mensch oder sind alle Menschen klug?“ bzw. „Zu welchem Grad besitzt der Mensch die *Eigenschaft* Klugheit?“

Hier geht es darum, wie sich die *intensionale* Quantität (aussagen-)logischer Strukturen bestimmen lässt. Dabei gehe ich von folgender Entsprechung aus:

extensional	intensional	allgemein:
alle	vollständig	$p = 1$
alle nicht	vollständig nicht	$p = 0$

So kommt man zur *Übersicht: Intensionale Quantität in der Aussagen-Logik*

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
X ist *vollständig* Y	X ist zu 100% Y	$[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 1$	$p[\Phi] = 1$
X ist *gar nicht* Y	X ist zu 0% Y	$\neg[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 0$	$p[\Phi] = 0$

1-4-5-3 INTENSIONALE QUANTITATIVE PRÄDIKATEN-LOGIK

Anders als bei der *Aussagen-Logik* gibt es hier keine *eindeutige implizite* Quantität, die nur *explizit* zumachen wäre.

Nehmen wir als Beispiel: Fx_i mit der Bedeutung „x_i besitzt die Eigenschaft F“ bzw. $\neg Fx$ mit der Bedeutung „x_i besitzt *nicht* die Eigenschaft F“.

Zwar haben wir es wiederum mit einem *2-wertigen* System zu tun, das nur zwischen „ja“ und „nein“ unterscheidet. Aber wie das Ja oder Nein quantitativ zu deuten ist, bleibt offen.

Vor allem folgende Deutungen kommen in Frage:

für: Fx_i $p = 1, p > 0, p > 0{,}5, p > 0{,}75$
$\neg Fx_i$ $p = 0, p < 1, p < 0{,}5, p < 0{,}25$

Eine mögliche Interpretation ist also analog der Aussagen-Logik: $p = 1$ versus $p = 0$.

normale Sprache	quantitative Sprache	Prädikaten-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
x_i ist *vollständig* F	x_i ist zu 100% F	$[Fx_i]$	$p[Fx_i] = 1$	$p[\Phi] = 1$
x_i ist *gar nicht* F	x_i ist zu 0% F	$\neg[Fx_i]$	$p[Fx_i] = 0$	$p[\Phi] = 0$

Ich halte aber eine andere Deutung für besser: $p[Fx_i] > 0$ für $[Fx_i]$ und $p[Fx_i] < 1$ für $\neg[Fx_i]$; denn nur so wird jeweils ein maximales Werte-Intervall umfasst, während $p[Fx_i] = 1$ und $p[Fx_i] = 0$ nur genau *einen* Wert erfassen. – Die *eckigen* Klammern p[ ] stehen für *intensionale* Quantität, im Gegensatz zu den *runden* Klammern p( ) für *extensionale* Quantität.

1-4-5-4 NORMALE SPRACHE

Hier stellt sich im Grunde dasselbe Problem wie in der Prädikaten-Logik: Wir verwenden oft qualitative Sätze, bei denen nur zwischen ja und nein unterschieden wird, z. B. ‚Peter ist intelligent' oder ‚Peter ist nicht intelligent'.

Zwar kann man sprachlich auch Hinzufügungen verwenden wie ‚Peter ist sehr intelligent' oder ‚Peter ist kaum intelligent', aber vielfach machen wir auch nur „ist-" oder „ist-nicht"-Aussagen. Wie sind die aber quantitativ zu deuten?

Z. B. ist das bei unserem Beispiel gar nicht trivial: ‚Peter ist intelligent' muss keineswegs heißen, Peter ist maximal intelligent ($p = 1$), aber $p > 0$ dürfte andererseits auch nicht reichen; vermutlich wäre in diesem Fall $p > 0,75$ die beste Deutung.

Meine These ist aber, dass in der normalen Sprache je nach Inhalt *unterschiedliche* quantitative Interpretationen angemessen sind. Nur einige Beispiele:

$p = 1$	Petra ist schwanger	$p = 0$	Petra ist nicht schwanger
$p = 1$	John ist gesund	$p < 1$	John ist nicht gesund
$p > 0$	Frank hat Schulden	$p = 0$	Frank hat keine Schulden
$p > 0,75$	Lisa ist intelligent	$p < 0,25$	Lisa ist nicht intelligent
$p > 0,5$	Ralf ist zufrieden	$p < 0,5$	Ralf ist nicht zufrieden

1-4-5-5 ABSCHLUSS: ÜBERSICHT ÜBER INTENSIONALE QUANTITÄT

• Aussagen-Logik

Für die Aussagen-Logik ist es sinnvoll, die *intensionale* Quantität entsprechend zur *extensionalen* (impliziten) Quantität zu deuten, d. h. alle/immer versus alle nicht/niemals.

vollständig: $p = 1$, vollständig nicht (bzw. gar nicht): $p = 0$.

Dies ist quantitativ gesehen zwar nur *konträr*, in einem *2*-wertigen System aber *kontradiktorisch*, da wenn nur zwei Werte gegeben, diese immer als kontradiktorisch gelten.

• Prädikaten-Logik

Hier ist es angemessen, eine quantitative Deutung vorzunehmen, die für alle möglichen Konkretisierungen offen ist und gültig bleibt.

Für [Fx] ist das $p[Fx] > 0$, dies umfasst die möglichen Werte $> 0,5$, $> 0,75$ und 1.

Für $\neg$[Fx] ist das $p[Fx] < 1$, dies umfasst als mögliche Werte $< 0,75$, $< 0,5$ und 0.

• Sprache

Die Sprache, die eben nicht formal, sondern inhaltlich konkret ist, verlangt in besonderer Weise, alle möglichen quantitativen Verhältnisse darzustellen. Daher ist es wohl angemessen, für die qualitative Unterscheidung „ ... besitzt die Eigenschaft" versus „ ... besitzt die Eigenschaft *nicht*" gar *kein generelles* Zahlenpaar anzugeben, sondern je nach Einzelfall zu interpretieren. Die bevorzugte Deutung ist aber: ja: $p > 0,75$, nein/nicht: $p < 0,25$.

1 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

1-5-1 Einführung

1-5-1-1 QUANTITATIVE DEFINITION

In der Quantoren-Logik werden, wie bereits ausführlich dargestellt, normalerweise 4 Werte unterschieden: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. *Quantitative* Quantoren-Logik bedeutet soviel wie *quantifizierte* Quantoren-Logik, d. h. diese o. g. 4 Werte sollen nun quantitativ-numerisch bestimmt werden.

Und zwar sind *„alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht“* primär *relative* Größen (p), aus denen sich in begrenztem Umfang *absolute* Größen (q) ableiten lassen. Zur Darstellung relativer Größen bieten sich in erster Linie *Dezimalzahlen* an. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass hier prinzipiell gilt: $0 \leq p \leq 1$.

Man kann diese Werte aber auch *prozentual* oder durch einen *Bruch* bestimmen:

	Dezimal		Prozent	Bruch
1. alle	p = 1	(p = 1,0)	100%	n/n
2. alle nicht	p = 0	(p = 0,0)	0%	0/n
3. einige	p > 0	(p > 0,0)	> 0%	> 0/n
4. einige nicht	p < 1	(p < 1,0)	< 100%	< n/n

Damit bedeutet die (quantitative) *Quantoren-Logik* eine Erweiterung der (quantitativen) *Aussagen-Logik*, bei der nur zwischen „alle“ und „alle nicht“ unterschieden wird.

1-5-1-2 PRÄDIKATEN-LOGIK / ABSOLUTE VS. RELATIVE GRÖSSE

Ein Problem ist in diesem Fall die *Prädikaten-Logik*. Sie war als Modell eingeführt worden, das einerseits individuelle Aussagen erlaubt (z. B. Fx_i), die in der Quantoren-Logik nicht möglich sind, andererseits sollten sich *quantoren-logische* Relationen in *prädikaten-logische* übersetzen lassen, z. B. $\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$.

Nun ist „alle“ eine *relative* Größe (p), welche über die *absolute* Größe (q) nur aussagt, dass $q > 0$. Also: $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) > 0$ bzw. $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) \geq 1$. $p = 1$ und $q = 1$ dürfen dabei auf keinen Fall verwechselt werden.

Komplizierter ist es noch bei molekularen Aussagen mit *Implikation*: z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $p(F \rightarrow G) = 1$, z. B. „alle Menschen sind sterblich“. Bei Verwendung der *normalen Implikation* ist für die Wahrheit von $p(F \rightarrow G) = 1$ nicht einmal notwendig, dass es überhaupt *einen* Menschen gibt; es darf nur kein Individuum x geben, für das gilt: Es ist Mensch und es ist nicht sterblich. Denn $p(F) = 0 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$.

Anders ist es dagegen bei „alle nicht“: dieser Begriff umfasst zugleich präzise eine *absolute* wie eine *relative* Größe, prozentual also 0 oder 0%, was hier gleichbedeutend ist, denn: $q(F) = 0 \Leftrightarrow p(F) = 0\%$. Entsprechend gilt bei „einige“: auch dieser Begriff umfasst zugleich eine *absolute* wie eine *relative* Größe, $q > 0$ und $p > 0\%$.

1-5-1-3 EINFACHE RELATIONEN / DEZIMAL-DARSTELLUNG

Als *einfache* Relationen haben wir solche eingeführt, in denen nur *ein* Prädikat-Ausdruck vorkommt und in denen nur der Gesamt-Relation ein Wahrheitswert zugewiesen wird, also z. B. Fx (extensional-intensional) oder $x \in F$ (rein extensional).

Wir sind bisher immer von 4 Werten in der (inklusiven) Quantoren-Logik ausgegangen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Nun kann man durch *zusätzliche Negationen* aus diesen 4 Werten 8 Werte machen. Z. B. wird so aus „alle nicht" der Ausdruck „nicht alle nicht". Geht man von 8 Werten aus und verwendet die Individuen-Variable x, so ergibt sich:

Alle x sind F	$\Lambda x(Fx)$	$p(F) = 1$
Alle x sind nicht F	$\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 1$
Nicht alle x sind F	$\neg\Lambda x(Fx)$	$p(F) < 1$
Nicht alle x sind nicht F	$\neg\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) < 1$
Einige x sind F	$Vx(Fx)$	$p(F) > 0$
Einige x sind nicht F	$Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) > 0$
Nicht einige x sind F	$\neg Vx(Fx)$	$p(F) = 0$
Nicht einige x sind nicht F	$\neg Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 0$

Wie im analytischen Teil genauer gezeigt werden wird, sind aber von den obigen 8 Relationen jeweils eine mit einer anderen *äquivalent*; daher mag man doch nur von 4 Grund-Relationen auszugehen. In einer *einfachen Formalisierung* kann man schreiben:

$\Lambda(X)$	$p(X) = 1$
$\Lambda(\neg X)$	$p(X) = 0$
$V(X)$	$p(X) > 0$
$V(\neg X)$	$p(X) < 1$

1-5-1-4 EINFACHE RELATIONEN / PROZENT

Anstelle der Dezimal-Darstellung kann man auch eine *Prozent-Darstellung* wählen, die näher an der normalen Sprache ist. Für „alle x sind F" sagt man: „100% aller x sind F":

Alle	100%
Alle nicht	0 %
Einige	mehr als 0% (> 0 %)
Einige nicht	weniger als 100 % (< 100%)

Den *Prozent-Wert* erhält man, wenn man den *Dezimal-Wert* mit 100 multipliziert.
Also z. B.: p = 1 x 100 = 100%, oder: p = 0,6 x 100 = 60%.

1-5-1-5 WAHRHEITSTAFEL

Hier beziehe ich mich auf den Punkt 1-2-2-4 über die Wahrheitstafel in der Quantoren-Logik. Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ hatte ich u. a. folgende Wahrheitstafel aufgestellt:

	Λx(Fx)	Λx(Gx)	Λx(Fx → Gx)	
1.	Λ	Λ	Λ	$\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
2.	Λ	¬Λ	¬Λ	$\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \to Gx)$
3.	¬Λ	Λ	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
4.	¬Λ	¬Λ	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$

Wie oben erläutert, gilt:

quantoren-logisch	quantitativ
Λ	p = 1
¬Λ	p < 1

Insofern werden auch in der Wahrheitstafel die Quantoren durch *Zahlenwerte* ersetzt. Dabei bleibe ich hier bei den Buchstaben ‚F' und ‚G' (statt ‚X' und ‚Y'), weil so die Beziehung zur Quantoren-Logik sofort anschaulich ist. Es geht also um die Relation: $p(F \to G) = 1$

So ergibt sich für die folgende quantitativ-quantoren-logische Wahrheitstafel:

	p(F)	p(G)	p(F → G)	Deutung
1.	1	1	1	$p(F) = 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \to G) = 1$
2.	1	<1	<1	$p(F) = 1 \wedge p(G) < 1 \Rightarrow p(F \to G) < 1$
3.	<1	1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \to G) = 1$
4.	<1	<1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) < 1 \longrightarrow p(F \to G) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, erhält man:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	<1	< 1
3.	<1	1	1
4.	<1	<1	1

Diese Formel-Wahrheitstafel sei für die 2. Zeile erläutert:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \qquad \text{d. h.: } a + b > 0,\ c + d = 0$$

$$\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h. : } b + d > 0$$

Daraus ergibt sich: b > 0 (weil d = 0). Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$$ (denn der Nenner n ist größer als der Zähler r)

Auch für die 4. Zeile sei die Wahrheitstafel erläutert:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h.: } c + d > 0 \qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h. : } b + d > 0$$

Daraus ergibt sich: es kann gelten b > 0 oder b = 0.

Aber nur wenn b = 0 ist die Konklusion $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ *streng* abzuleiten.

Daher gilt $p(F) < 1 \wedge p(G) < 1 \longrightarrow p(F \rightarrow G) = 1$ nur *semi-analytisch*. Anders als bei der (quantitativen) aussagen-logischen *Wahrheitstafel* sind also bei der (quantitativen) quantoren-logischen Wahrheitstafel nur 3 Zeilen *strenge* Schlüsse, nicht alle 4.

Wenn man allerdings nicht von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ ausgeht, sondern von $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$, das man als $p(F) = 1 \rightarrow p(G) = 1$ *quantifiziert*, erhält man auch in der 4. Zeile einen gültigen Schluss: $p(F) < 1 \wedge p(G) < 1 \Rightarrow p(F) = 1 \rightarrow p(G) = 1$. Denn $p(F) = 1 \rightarrow p(G) = 1$ ist nur falsch, wenn $p(F) = 1 \wedge p(G) < 1$ (vgl. hierzu 1-2-2-4).

Selbstverständlich könnte man eine entsprechende Wahrheitstafel auch für $Vx(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $p(F \rightarrow G) > 0$ aufstellen; dann stände $p > 0$ für V und $p = 0$ für $\neg V$. Dabei ergibt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel mit *drei* strengen Schlüssen und *einem* semi-analytischen.

Erläuterung zum Unterschied von quantitativer Aussagen- versus Quantoren-Logik

– Aussagen-logisch gilt:

$X \rightarrow Y$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$

Es ist dies ein *2-wertiges* System, in dem es nur die Werte „ja“ (p = 1) und „nein (p = 0) gibt. Damit gibt es auch nur *eine* Negation, nämlich $\neg(X \rightarrow Y)$.

– Quantoren-logisch gilt:

$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) < 1$
$\neg\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) > 0$

Dies ist ein *4-wertiges* System, in dem es *zwei* Negationen gibt. $\Lambda\neg$ und $\neg\Lambda$ (bzw. noch die doppelte Negation $\neg\Lambda\neg$ als dritte Negation). Die *primäre*, *kontradiktorische* Negation ist aber: $\neg\Lambda$ (nicht alle). Daher muss dieser Wert bzw. $p < 1$ auch in der Wahrheitstafel stehen.

1-5-2 Implikation

Die paradoxe Asymmetrie der *Existenz-Behauptung* von *All-Relationen* und Partikulär-Relationen zeigt sich in der *quantitativen* Form besonders deutlich (vgl. genauer Kap. 2):

- *All-Relation* („alle X sind Y“): Aus ihr folgt weder $p(X) > 0$ noch $p(Y) > 0$, also *keine Existenz-Behauptung*. $p(X \rightarrow Y) = 1$ ist auch wahr, wenn $p(\neg X \wedge \neg Y) = 1$ oder $p(X) = 0$.
- *Partikulär-Relation* („einige X sind Y“): bei der häufigsten Formalisierung $p(X \wedge Y) > 0$ gilt: Aus ihr folgt $p(X) > 0$ und $p(Y) > 0$, somit wird hier die *Existenz* von X wie Y behauptet.

1-5-2-1 MODELLE DER IMPLIKATION

Es lassen sich *verschiedene Modelle* der Verwendung der Implikation für *All- und Partikulär*-Relationen angeben, die später (in 1-5-4) noch diskutiert werden sollen. Am ehesten der Einteilung: „*alle*, *alle nicht*, *einige* und *einige nicht*“ entspricht aber das folgende Modell:

alle: p(X → Y) = 1 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ a + c + d > 0, b = 0

alle nicht: p(X → Y) = 0 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$ a + c + d = 0, b > 0

einige: p(X → Y) > 0 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$ a + c + d > 0, b ≥ 0

einige nicht: p(X → Y) < 1 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ a + c + d < a + b + c + d

1-5-2-2 ALTERNATIVEN

Die Werte der Implikation können auch durch den Gegen-Relator >– dargestellt werden:

p(X → Y) = 1 p(X >– Y) = 0 $\frac{b}{a+b+c+d} = 0$

p(X → Y) = 0 p(X >– Y) = 1 $\frac{b}{a+b+c+d} = 1$

p(X → Y) > 0 p(X >– Y) < 1 $\frac{b}{a+b+c+d} < 1$

p(X → Y) < 1 p(X >– Y) > 0 $\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-2-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

p(X → ¬Y) = 1 $\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

p(¬X → Y) = 1 $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$

p(¬X → ¬Y) = 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$

1-5-2-4 REPLIKATION

p(X ← Y) = 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$ a + b + d > 0, c = 0

p(X ←Y) = 0 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 0$ a + b + d = 0, c > 0 p(X ←Y) > 0 $\qquad \dfrac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0 \qquad$ a + b + d > 0, c ≥ 0

p(X ←Y) < 1 $\qquad \dfrac{a+b+d}{a+b+c+d} < 1 \qquad$ a + b + d < a + b + c + d

1-5-2-5 ÄQUIVALENZ

p(X ↔ Y) = 1 $\qquad \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1 \qquad$ a + d > 0, b + c = 0

p(X ↔Y) = 0 $\qquad \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 0 \qquad$ a + d = 0, b + c > 0

p(X ↔Y) > 0 $\qquad \dfrac{a+d}{a+b+c+d} > 0 \qquad$ a + d > 0, b + c ≥ 0

p(X ↔Y) < 1 $\qquad \dfrac{a+d}{a+b+c+d} < 1 \qquad$ a + d < a + b + c + d

1-5-3 Positiv-Implikation

1-5-3-1 BEVORZUGTES MODELL

1. alle X sind Y $\qquad$ p(X *→ Y) = 1 $\qquad \dfrac{a}{a+b} = 1$
2. alle X sind nicht Y $\qquad$ p(X *→ Y) = 0 $\qquad \dfrac{a}{a+b} = 0$
3. einige X sind Y $\qquad$ p(X *→ Y) > 0 $\qquad \dfrac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y $\qquad$ p(X *→ Y) < 1 $\qquad \dfrac{a}{a+b} < 1$

1-5-3-2 ALTERNATIVE

Bei der *Positiv-Implikation* gilt (bei der primären Interpretation) wie bereits dargestellt:

p(X *→ Y) = 0 ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1

und entsprechend. So kann man auch anders schreiben:

1. alle X sind Y $\qquad$ p(X *→ Y) = 1 $\qquad \dfrac{a}{a+b} = 1$

2. alle X sind nicht Y $\qquad$ p(X *→ ¬Y) = 1 $\qquad \dfrac{b}{a+b} = 1$

3. einige X sind Y	p(X *→ Y) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y	p(X *→ ¬Y) > 0	$\frac{b}{a+b} > 0$

Die Gleichsetzung von $\frac{a}{a+b} = 0$ mit $\frac{b}{a+b} = 1$ (und entsprechend) setzt allerdings voraus, dass gilt: a + b > 0.

1-5-3-3 POSITIV-REPLIKATION

1. alle Y sind X	p(X ←* Y) = 1	$\frac{a}{a+c} = 1$
2. alle Y sind nicht X	p(X ←* Y) = 0	$\frac{a}{a+c} = 0$
3. einige Y sind X	p(X ←* Y) > 0	$\frac{a}{a+c} > 0$
4. einige Y sind nicht X	p(X ←* Y) < 1	$\frac{a}{a+c} < 1$

1-5-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

1. alle X sind Y / alle Y sind X	p(X *↔ Y) = 1	$\frac{a}{a+b+c} = 1$
2. alle X sind nicht Y / alle Y sind nicht X	p(X *↔ Y) = 0	$\frac{a}{a+b+c} = 0$
3. einige X sind Y / einige Y sind X	p(X *↔ Y) > 0	$\frac{a}{a+b+c} > 0$
4. einige X sind nicht Y / einige Y sind nicht X	p(X *↔ Y) < 1	$\frac{a}{a+b+c} < 1$

1-5-3-5 VERGLEICH ZWISCHEN POSITIV-IMPLIKATION UND IMPLIKATION

	Implikation		*Positiv-Implikation*	
alle:	p(X → Y) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	p(X *→ Y) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$
alle nicht:	p(X → Y) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	p(X *→ Y) = 0	$\frac{a}{a+b} = 0$

einige: p(X → Y) > 0 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$ p(X *→ Y) > 0 $\dfrac{a}{a+b} > 0$

einige nicht: p(X → Y) < 1 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ p(X *→ Y) < 1 $\dfrac{a}{a+b} < 1$

1-5-4 Systematik

Hier will ich die 5 *Modelle*, die in 1-2-4 vorgestellt wurden, in ihrer *quantitativen* Form darstellen. Die Diskussion dieser Modelle wurde bereits dort geführt und wird im analytischen Teil noch einmal aufgegriffen. Ich schreibe die logischen Gleichungen hier mit der *Individuenvariable* ‚x' (und mit den Prädikatvariablen ‚F' und ‚G') weil damit eine bessere Vergleichbarkeit mit den quantoren-logischen Relationen gegeben ist, also z. B. p(Fx → Gx) = 1, entsprechend Λx(Fx → Gx). Bei Verwendung von ‚x' müsste man genau z. B. folgendermaßen übersetzen: ‚alle x, denen die Eigenschaft F zukommt, kommt auch die Eigenschaft G zu'. Vereinfachend schreibe ich aber wieder ‚alle F sind G' und entsprechend. Natürlich könnte man anstatt p(Fx → Gx) = 1 auch einfacher p(X → Y) = 1 u. ä. schreiben.

1-5-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION

1. alle F sind G p(Fx → Gx) = 1 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. alle F sind nicht G p(Fx → Gx) = 0 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$

3. einige F sind G p(Fx → Gx) > 0 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$

4. einige F sind nicht G p(Fx → Gx) < 1 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$

1-5-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G p(Fx → Gx) = 1 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. alle F sind nicht G p(Fx → ¬Gx) = 1 $\dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

3. einige F sind G p(Fx → Gx) > 0 $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$

4. einige F sind nicht G p(Fx → ¬Gx) > 0 $\dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$	$\frac{b}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a}{a+b} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 0$	$\frac{a}{a+b} = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) < 1$	$\frac{a}{a+b} < 1$

Diese 5 Modelle wurden bereits diskutiert und werden im analytischen Teil erneut behandelt.

1-5-5 Erweiterungen

1-5-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Ich hatte in 1-2 unterschieden zwischen *inklusiver* und *exklusiver* Quantoren-Logik. Diese Unterscheidung bezieht sich auf den *Partikulär-Quantor* (Existenz-Quantor). In 1-5 wurde bisher nur die inklusive Version vorgestellt, aber auch exklusiv kann man *quantifizieren*.

- inklusiv: *mindestens* einige (exakt: mindestens einer), formal: V, z. B. Vx(Fx)
  quantitativ:
  mindestens einige: $p > 0$
  mindestens einige *nicht*: $p < 1$
- exklusiv: *genau* einige, formal: ∃, z. B. ∃x(Fx)
  quantitativ:
  genau einige: $p > 0 \wedge p < 1$. Oder: $0 < p(\exists) < 1$. Z. B. $0 < p(Fx) < 1$
  genau einige *nicht*: hier ergibt sich der gleiche Wert, denn $p(\exists) = p(\exists\neg)$

Ich hatte darauf hingewiesen, dass man die quantoren-logischen Unterscheidungen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht* ergänzen kann durch „die meisten" und „die meisten nicht". Wie sind diese quantitativ zu bestimmen?

Auch hier kann man unterscheiden zwischen *inklusiv* und *exklusiv*:

Inklusiv		*exklusiv*
die meisten	$p > 0{,}5$	genau die meisten: $0{,}5 < p < 1$
die meisten nicht	$p < 0{,}5$	genau die meisten nicht: $0 < p < 0{,}5$

Für die „meisten nicht" kann man auch sagen: „die wenigsten".

- inklusiv: „die meisten F sind G" (genauer: „die meisten x, welche die Eigenschaft F haben, haben auch die Eigenschaft G"): $p(Fx \rightarrow Gx) > 0{,}5$.

- exklusiv: „genau die meisten F sind nicht G": $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 0{,}5$

Zu beachten ist, dass es hier zu Überschneidungen kommt zwischen „genau einige" und „genau die meisten" u. a., aber das ist legitim.

1-5-5-2 ÜBERSICHT

Die folgende Übersicht legt immer die *Implikation* zugrunde:
Sie geht aus von der Formel: $p(X \rightarrow Y) = r/n$.

Normale Sprache	Quantoren-Logik	Quantitativ	r
Alle X sind Y	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$r = n$
Alle X sind nicht Y	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$r = 0$
Einige X sind Y	$V(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$r > 0$
Einige X sind nicht Y	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$r < n$
Genau einige X sind Y	$\exists(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = > 0 \wedge < 1$	$0 < r < n$
Die meisten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) > 0{,}5$	$r > n/2$
Die wenigsten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) < 0{,}5$	$r < n/2$

„Alle X sind nicht Y" und „einige X sind Y" formalisiert man allerdings meistens anders. Ich habe die verschiedenen Modelle ja bereits diskutiert.

1-5-5-3 INTENSIONALE QUANTITÄT

Bei der *intensionalen* Quantität wurde quantoren-logisch unterschieden zwischen 4 Stufen. Diesen werden jetzt quantitative Werte zugewiesen:

Extensional	Intensional	Prozent	Beispiel
Alle	vollständig	zu 100%	vollständig glücklich
Alle nicht	gar nicht	zu 0%	gar nicht glücklich (ganz unglücklich)
Einige	etwas	zu > 0 %	etwas glücklich
Einige nicht	etwas nicht	zu < 100%	etwas nicht glücklich (etwas unglücklich)

Alternativen zu ‚vollständig' sind: vollkommen, gänzlich, ganz, absolut
Alternativen zu ‚vollkommen nicht' sind: gar nicht (oder Konstruktionen mit ‚un')
Alternativen zu ‚etwas' sind: partiell, teilweise

1-5-5-4 INTENSIONALE QUANTITÄT – 6-WERTIG

Hier werden jetzt 2 Werte hinzugefügt: *überwiegend* und *überwiegend nicht*.
Andere Begriffe wären: *überdurchschnittlich* und *unterdurchschnittlich*.

Extensional	Intensional	Prozente	Beispiel
Die meisten	Überwiegend	Zu > 50%	Überwiegend glücklich
Die meisten nicht	überwiegend nicht	Zu < 50%	Überwiegend nicht glücklich

1-5-5-5 INTENSIONALE QUANTITÄT – EXKLUSIV

Ich habe bisher nur *inklusive* Quantitäten berücksichtigt. Jetzt werden auch *exklusive* Werte berücksichtigt (100% ist invariant gegenüber inklusiv/exklusiv)

Genau partiell	zu > 0%, < 100%	genau partiell glücklich
Genau partiell nicht	zu > 0%, < 100%	genau partiell unglücklich

Bei dem *exklusiven* (genau) „einige" gilt: wenn etwas für *genau einige* gilt, dann gilt es auch für *genau einige nicht*. So bei der *intensionalen* Entsprechung: wenn etwas *genau partiell* gilt, dann gilt es auch *genau partiell nicht*. Jemand, der genau partiell glücklich ist, der ist zu einem Prozentsatz zwischen 0% und 100% glücklich. Folglich ist er auch zwischen 0% und 100% nicht glücklich (unglücklich).

Wenn man den *6-wertigen* Ansatz nimmt, dann kommen noch hinzu:

Genau überdurchschnittlich: zu > 50%, < 100%
Genau unterdurchschnittlich zu > 0%, < 50%

Man erhält dann insgesamt folgende Werte:

- partiell: > 0, < 1
- partiell nicht: > 0, < 1
- unterdurchschnittlich: > 0, < 0,5
- durchschnittlich: 0,5
- überdurchschnittlich: > 0,5, < 1