3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

3-1 Aussagen-Logik

Hier wird erläutert, wie man die theoretische *Meta-Wahrscheinlichkeit* von *synthetischen* Relationen berechnet, und zwar für alle 14 (bzw. 16) Relatoren. Die Relatoren lassen sich nach ihrer theoretischen Wahrscheinlichkeit einordnen. Als andere Meta-Werte werden *Informationsgehalt* und *Bestimmtheit* eingeführt.

3-2 Quantoren-Logik

Die Berechnung der *meta-logischen*, theoretischen Wahrscheinlichkeit von *quantoren-logischen* Relationen ist deutlich schwieriger als bei *aussagen-logischen* Relationen. Die Entwicklung entsprechender mathematischer Formeln wird Schritt für Schritt vorgeführt.

3-3 Quantitative Logik

Hier wird zunächst der *Wahrscheinlichkeitsbegriff* in seinen verschiedenen Varianten erklärt. Dann werden auf dem *Binomial-Koeffizienten* aufbauende Formeln entwickelt, nach denen man die *theoretische Wahrscheinlichkeit* von quantitativen Relationen berechnen kann, in Abhängigkeit von deren *empirischer Wahrscheinlichkeit*.

3-4 Quantitative Aussagen-Logik

In diesem Punkt wird speziell die theoretische Wahrscheinlichkeit für Relationen angegeben, die eine empirische Wahrscheinlichkeit von $p = 1$ (*deterministisch*) oder von $p = 0$ (*nullistisch*) besitzen.

3-5 Quantitative Quantoren-Logik

Thema ist hier die theoretische Wahrscheinlichkeit von Relationen mit den empirischen Wahrscheinlichkeiten $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$, $p > 0$. So werden auch die verschiedenen Formalisierungen von *All- und Partikulär-Aussagen* in neuer Weise unterscheidbar und bewertbar.

Im meinem Modell wird die *Meta-Logik* durch *Meta-Werte* bestimmt. Unter einem *Meta-Wert* verstehe ich einen Wert, der einem anderen Wert *nachfolgt* (griechisch: *meta* = nach), sich auf einen anderen Wert bezieht.

Der entscheidende *Meta-Wert* ist die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T. Die theoretische Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die *empirische* Wahrscheinlichkeit p, insofern ist sie ein Meta-Wert. Die theoretische Wahrscheinlichkeit erlaubt es, den *Informationsgehalt* und den *tautologischen Grad* einer Relation anzugeben. Und zwar liegt dieser Grad zwischen $p^T = 1$ (Tautologie) und $p^T = 0$ (Kontradiktion).

Dabei werde ich zeigen, dass man nicht nur *analytischen* Relationen, sondern auch *synthetischen* Relationen einen *Tautologie-Grad* zusprechen kann. Es wird zu diskutieren sein, ob eine *synthetische* Relation auch *streng tautologisch* sein kann oder nur *partiell tautologisch*.

3 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

3-1-1 Einführung

3-1-1-1 OBJEKT-EBENE UND META-EBENE
Bei einer logischen Relation kann man unterscheiden:
• *Objekt-Ebene* (Basis-Ebene, empirische Ebene)
• *Meta-Ebene* (theoretische Ebene)

Die *Objekt*-Ebene ist die vorgegebene Ebene. Die *Meta*-Ebene ist eine übergeordnete Ebene. Auf der Objekt-Ebene wird angegeben, welchen Wahrheitswert bzw. welche *Größe* eine Relation besitzt.
Auf der Meta-Ebene wird angegeben, wie *sicher* oder wie *wahrscheinlich* der Wahrheitswert oder die Größe einer Relation ist.
Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:
• *Objekt-Ebene*: X ∨ Y, und zwar kann X ∨ Y den *Wahrheitswert* + (gültig) oder – (ungültig) haben. Zunächst geht man davon aus, dass X ∨ Y gültig ist, denn sonst würde man ¬(X ∨ Y) schreiben.
• *Meta-Ebene*: Hier geht es um die *Notwendigkeit* (bzw. Wahrscheinlichkeit oder Sicherheit) des Wahrheitswertes von X ∨ Y. X ∨ Y ist nicht *notwendig*, aber *möglich* (vgl. unten).

3-1-1-2 MODELLE DER META-EBENE
Die Notwendigkeit einer Relation (bzw. ihres Wahrheitswertes) ergibt sich in der Aussagen-Logik aus der *Wahrheitstafel*.
Die Wahrheitstafel von X ∨ Y ist z. B.:

X	∨	Y
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Wie man sieht, steht unter dem Relator ∨ dreimal + und einmal –.
Man kann die Notwendigkeit in verschiedenen *Stufen* angeben:
• 2-stufig: notwendig / nicht notwendig
Man könnte nur 2 Stufen unterscheiden, z. B. notwendig / nicht notwendig.
X ∨ Y ist demnach *nicht notwendig*, denn notwendig sind nur *Tautologien*, bei denen viermal + (positiv) unter dem Relator steht. Man könnte auch zwischen *unmöglich* / *möglich* unterscheiden, dann gehörte X ∨ Y zu *möglich*; denn unmöglich sind nur *Kontradiktionen*, bei denen steht viermal – (negativ) unter dem Relator.
• 3-stufig: notwendig / möglich / unmöglich
So kann eine 3-stufige Unterscheidung aussehen; demnach gehörte X ∨ Y zu *möglich*, denn es ist nicht notwendig und nicht unmöglich.

• ∞-stufig

Diese 2 oder 3 Stufen sind aber nicht ausreichend. Man will vor allem im Bereich der *Möglichkeit* genauer differenzieren; das ist insbesondere bei quantitativen Relationen erforderlich, wie sich später noch zeigen wird. Daher führt man die *theoretische Wahrscheinlichkeit* ein; ich kennzeichne sie, wie gesagt, durch p^T.

3-1-1-3 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Die theoretische Wahrscheinlichkeit kann alle, d. h. *unendlich* viele Werte zwischen 0 und 1 annehmen (vgl. 1-3-1-4).

Unsere Beispiel-Relation $X \vee Y$ hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 3/4$. Ich schreibe dafür: $p^T[X \vee Y] = 3/4 = 0{,}75$

Der Wert p^T gibt an, wie wahrscheinlich ein Satz (bzw. eine Struktur) allein von der Form her ist. Wenn ich z. B. einen Satz (eine Struktur) $X \vee Y$ habe, weiß ich – unabhängig von seinem Inhalt –, dass er mit $p^T = 3/4$ gültig (wahr) ist, weil er nämlich bei 3 von 4 Möglichkeiten als gültig gilt.

Man kann auch sagen, dass p^T den Grad der *Notwendigkeit*, den Grad der *Sicherheit* oder aber den Grad der *Tautologie* einer Relation angibt. Der ‚Grad der Tautologie' lässt sich auch als ‚Grad der *theoretischen Wahrheit'* verstehen.

3-1-1-4 BERECHNUNG

Es geht jetzt darum, genau zu bestimmen, welche *theoretische Wahrscheinlichkeit* logische Relationen bzw. Relatoren besitzen. Dabei geht man von der *Wahrheitstafel* aus. Und zwar *dividiert* man die Anzahl der Welten, in denen ein + unter dem Relator steht, durch die Anzahl *aller* Welten, d. h. die Anzahl der Welten, in denen ein + oder – unter dem Relator steht.

D. h. die theoretische Wahrscheinlichkeit wird grundsätzlich so berechnet wie die *empirische Wahrscheinlichkeit*, als *Quotient von günstigen und möglichen Fällen* (vgl. 1-3-1-2 und 1-3-1-3). Die theoretische Wahrscheinlichkeit fußt somit auf der *Kombinatorik*, sie gibt an, wie viele Fälle von Kombinationen von + und – es überhaupt gibt und wie viele dieser Kombinationen als *gültig* definiert sind.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T wird somit berechnet durch:

$$\frac{\text{Anzahl der Welten, in denen eine Relation positiv ist}}{\text{Anzahl der Welten, in denen die Relation positiv oder negativ ist}}$$

Kürzer: $\frac{\text{Anzahl der +/Welten}}{\text{Anzahl aller Welten}}$ bzw. $\frac{q(+\text{Welten})}{q(\pm\text{ Welten})}$

Formal: $p^T(\Phi) = q(\Phi) / q(\Phi) + q(\neg\Phi) = r/n$
$q(\Phi) = r,\ q(\Phi) + q(\neg\Phi) = n$

Beispiel: $X \vee Y$: $p^T[X \vee Y] = \dfrac{3(+Welten)}{3(+Welten) + 1(-Welt)} = \dfrac{3(+Welten)}{4(+/-Welten)} = 3/4$

Für die *Negation* gilt: $p^T(\neg\Phi) = 1 - p^T(\Phi)$
z. B.: $p^T[\neg(X \vee Y)] = 1 - p^T[X \vee Y] = 4/4 - 3/4 = 1/4 = 0{,}25$

3-1-1-5 SYNTHETISCHE RELATIONEN

Man kann die theoretische Wahrscheinlichkeit auch auf *analytische* Relationen anwenden (vgl. Kapitel 4), aber hier geht es um *synthetische* Relationen. Die theoretische Wahrscheinlichkeit dient zunächst dazu, synthetische Relatoren zu *definieren*.

Ich hatte als allgemeine aussagenlogische Form einer *synthetischen Relation* angegeben:

X R^S Y, d. h.: „X steht zu Y in der synthetischen Relation R".

Oder noch allgemeiner: $\Phi\ R^S\ \Psi$ (R = Relation, s = synthetisch)

Wie schon gesagt, können zwar auch ‚X' oder ‚Y' bereits für eine Relation stehen, aber es handelt sich dann um 'strukturlose' Relationen im Sinne der Aussagen-Logik.

Synthetische Relationen wie X R^S Y sind durch ihre theoretische Wahrscheinlichkeit p^T bestimmt, denn es gilt:

synthetische Relationen: $0 < p^T < 1$

Konkret bezogen auf 2 Relata (2 Variablen) X, Y bedeutet das:

$0/4 < p^T < 4/4$.

Anders gesagt: $p^T = 1/4 \vee 2/4 \vee 3/4$ (verkürzte Darstellung).

Allerdings ist dies keine hinreichende Bestimmung, weil ebenfalls gilt:

semi-analytische Relationen: $0 < p^T < 1$

Denn wie schon erläutert und später noch weiter ausgeführt: *synthetische* und *semi-analytische* Relationen sind zu unterscheiden. Bei *synthetischen* Relationen wie X → Y sind die beiden Relata (X und Y) logisch völlig *unabhängig* voneinander, *syntaktisch* gesprochen: Vor und hinter dem Relator stehen nur *unterschiedliche* (deskriptive) Symbole.

Dagegen ist bei *semi-analytischen* Relationen wie X ∨ Y ⟶ X eine (partielle) Abhängigkeit zwischen den Relata gegeben, und *syntaktisch* stimmen die Symbole *(partiell) überein*.

Es wird zu diskutieren sein, ob − abweichend von der obigen Behauptung − synthetische Relationen doch *vollständig* tautologisch oder kontradiktorisch sein können.

3-1-2 Implikation

3-1-2-1 BESTIMMUNG

Für die Implikation X → Y ergibt sich anhand der Wahrheitstafel:

X	→	Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

$$\frac{3 + Welten}{4 \pm Welten} = 3/4$$ Man kann schreiben: $p^T[X \to Y] = 3/4 = 0{,}75$

Lies: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit (= der Tautologie-Grad) von X → Y beträgt 3/4'.

Es sei noch einmal betont: Auch wenn die Implikation zu 3/4 tautologisch ist, ist sie *nicht partiell analytisch*. Von einer partiell analytischen Implikation kann man grundsätzlich nur sprechen, wenn vor und hinter dem → partiell die gleichen Zeichen stehen (syntaktisches Kriterium). Bzw. wenn man aus dem Vorderglied /Vordersatz partiell das Nachglied / den Nachsatz ableiten kann (logisches Kriterium). Beides ist bei X → Y nicht gegeben.

3-1-2-2 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

Auch hier ergibt sich der Wert p^T anhand der Wahrheitstafel:

	$X \rightarrow \neg\, Y$
1.	+ – – +
2.	+ + + –
3.	– + – +
4.	– + + –

$p^T(X \rightarrow \neg Y) = p^T(X \rightarrow Y) = 3/4 = 0{,}75$

	$\neg(X \rightarrow Y)$
1.	– + + +
2.	+ + – –
3.	– – + +
4.	– – + –

$p^T[\neg(X \rightarrow Y)]= 1 - p^T(X \rightarrow Y) = 1/4 = 0{,}25$

Die *doppelte Negation* $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – ist äquivalent der Konjunktion $X \wedge Y$.
$p^T[\neg(X \rightarrow \neg Y)] = p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0{,}25$

Allgemein gilt: $p^T[\neg(\Phi)] = 1 - p^T(\Phi)$.
Dies gilt aber nicht nur für die *theoretische* Wahrscheinlichkeit, sondern auch für die *empirische* Wahrscheinlichkeit: $p[\neg(\Phi)] = 1 - p(\Phi)$

3-1-2-3 REPLIKATION

Für die Replikation gilt wie für die Implikation: $p^T[X \leftarrow Y] = 3/4 = 0{,}75$

3-1-2-4 ÄQUIVALENZ

Für die Äquivalenz gilt: $p^T[X \leftrightarrow Y] = 2/4 = 0{,}5$. Nun ist ja: $X \leftrightarrow Y \;\Leftrightarrow\; (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Man kann berechnen: $p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X \rightarrow Y] + p^T[X \leftarrow Y] - 1 = 0{,}75 + 0{,}75 - 1 = 0{,}5$

3-1-2-5 KOMPLEXE IMPLIKATION

Beispiel für eine Wahrheitstafel bei 3 Variablen X, Y, Z

$(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
+ + + + +
+ + + – –
+ – – + +
+ – – + –
– + + + +
– + + – –
– + – + +
– + – – –

Hier gilt: $p^T[(X \to Y) \to Z] = 5/8 = 0{,}63$

Allgemein gilt:
Bei 2 Variablen: $2^2 = 4$ Reihen bzw. 4 mögliche Welten
Bei 3 Variablen: $2^3 = 8$ Reihen bzw. 8 mögliche Welten
Bei 4 Variablen: $2^4 = 16$ Reihen bzw. 16 mögliche Welten usw.
Bei n Variablen: 2^n Reihen bzw. 2^n mögliche Welten.

3-1-3 Positiv-Implikation

3-1-3-1 BESTIMMUNG

Die Positiv-Implikation kann man wie beschrieben mit *vollständiger* oder *verkürzter* Wahrheitstafel schreiben:

X	*→	Y	
+	+	+	verkürzte Wahrheitstafel
+	–	–	

X	*→	Y	
+	+	+	vollständige Wahrheitstafel
+	–	–	
–	□	+	
–	□	–	

Für die Berechnung von p^T ist dieser Unterschied irrelevant, weil dabei nur die + und – berechnet werden.

$p^T[X \ast\!\!\to Y] = 1/2 = 0{,}5$

Die Positiv-Implikation hat also mit p = 1/2 den *Zufallswert*, den man auch normalerweise bei einer Wenn-dann-Relation von zwei Variablen erwartet.

Für die *Negation* ¬(X *→ Y) gilt (bei der primären Interpretation) folgender Wahrheitsverlauf: – + □ □. Somit ergibt sich:

$p^T[\neg(X \ast\!\!\to Y)] = 1/2 = 0{,}5$

Also: $p^T[X \ast\!\!\to Y] = p^T[\neg(X \ast\!\!\to Y)]$

3-1-3-2 POSITIV-REPLIKATION

X	←*	Y
+	+	+
+	□	–
–	–	+
–	□	–

Hier gilt, wie bei der Implikation: $p^T[X \leftarrow\!\!\ast\, Y] = 1/2 = 0{,}5$

3-1-3-3 POSITIV-ÄQUIVALENZ

X	$*\leftrightarrow$	Y
+	+	+
+	−	−
−	−	+

$p^T[X *\leftrightarrow Y] = 1/3 = 0,33$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man $(X *\leftrightarrow Y)$ definiert als:

$(X *\rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow* Y)$

$*\rightarrow$	$\wedge$	$\leftarrow*$
+	+	+
−	−	□
□	−	−
□	□	□

3-1-3-4 KOMPLEXE IMPLIKATION

Für die folgende Implikation mit 3 Variablen ergibt sich:

(X	$*\rightarrow$	Y)	$*\rightarrow$	Z
+	+	+	+	+
+	+	+	−	−
+	−	−	□	+
+	−	−	□	−
−	□	+	□	+
−	□	+	?	−
−	□	−	□	+
−	□	−	?	−

Für die Berechnung von p^T sind wie gesagt nur die + und − relevant, nicht die □ und die ?.

Somit ergibt sich: $p^T(X *\rightarrow Y) *\rightarrow Z = 1/2 = 0,5$

3-1-3-5 POSITIV-IMPLIKATION UND IMPLIKATION

Unterschiede zwischen Normal-Implikation und Positiv-Implikation

Hier sollen nur exemplarische Hinweise gegeben werden:

- Implikation
  $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$ $\qquad$ $p^T[X *\rightarrow Y] = 1/2$
- Negation der Implikation
  $p^T[\neg(X \rightarrow Y)] = 1/4$ $\qquad$ $p^T[\neg(X *\rightarrow Y)] = 1/2$
  Bei der normalen Implikation hat die *Negation* eine andere p^T als die Position.
  Dagegen gilt für die Positiv-Implikation: $p^T[X *\rightarrow Y] = p^T[\neg(X *\rightarrow Y)] = 1/2$. (Und das ist überzeugender.)
- Äquivalenz
  $p^T[X \leftrightarrow Y] = 2/4 = 1/2$ $\qquad$ $p^T[X *\leftrightarrow Y] = 1/3$

Beziehungen zwischen Normal-Implikation und Positiv-Implikation

- Implikation
  $p^T[X \rightarrow Y] > p^T[X *\rightarrow Y]$

- Negation der Implikation

  $p^T[X \rightarrow Y] > p^T[\neg(X *\!\rightarrow Y)]$

  $p^T[X *\!\rightarrow Y] > p^T[\neg(X \rightarrow Y)]$

- Äquivalenz

  $p^T[X \leftrightarrow Y] > p^T[X *\!\leftrightarrow Y]$

  $p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X *\!\rightarrow Y]$

3-1-4 Systematik

3-1-4-1 GESAMTÜBERSICHT

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		p^T
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	4/4 = 1
2) Disjunktion	+	+	+	–	$X \vee Y$	3/4 = 0,75
3) Replikation	+	+	–	+	$X \leftarrow Y$	3/4 = 0,75
4) Präpension	+	+	–	–	$X \rfloor Y$	2/4 = 0,5
5) Implikation	+	–	+	+	$X \rightarrow Y$	3/4 = 0,75
6) Postpension	+	–	+	–	$X \lfloor Y$	2/4 = 0,5
7) Äquivalenz	+	–	–	+	$X \leftrightarrow Y$	2/4 = 0,5
8) Konjunktion	+	–	–	–	$X \wedge Y$	1/4 = 0,25
9) Exklusion	–	+	+	+	$X \mid Y$	3/4 = 0,75
10) Kontravalenz	–	+	+	–	$X >< Y$	2/4 = 0,5
11) Postnonpension	–	+	–	+	$X \lceil Y$	2/4 = 0,5
12) Postsektion	–	+	–	–	$X >\!- Y$	1/4 = 0,25
13) Pränonpension	–	–	+	+	$X \rceil Y$	2/4 = 0,5
14) Präsektion	–	–	+	–	$X -\!< Y$	1/4 = 0,25
15) Rejektion	–	–	–	+	$X \nabla Y$	1/4 = 0,25
16) Antilogie	–	–	–	–	$X \perp Y$	0/4 = 0

Man kann entsprechend eine Einteilung der *Relatoren* nach ihrer *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T vornehmen:

p^T

- 1: 4-Welt-Relator: $\top$
- 3/4: 3-Welt-Relatoren: $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\vee$ $|$
- 2/4: 2-Welt-Relatoren: $\leftrightarrow$ >< ┘ └ ┐ ┌
- 1/4: 1-Welt-Relatoren: $\wedge$ –< >– ∇
- 0: 0-Welt-Relator: $\perp$

Lässt man die problematischen Relatoren *Tautologator* und *Antilogator* beiseite, so gilt: Insgesamt gibt es von 14 (2-wertigen) synthetischen Relatoren.

4 Relatoren: mit $p^T = 3/4$
6 Relatoren: mit $p^T = 2/4$
4 Relatoren: mit $p^T = 1/4$

Wie ich schon mehrfach betont habe: Die Einführung des *Tautologators* und *Antilogators* bzw. überhaupt die Annahme, es gäbe im *synthetischen* Bereich (streng) tautologische bzw. kontradiktorische Relationen, ist problematisch. Zwar ist es aus *systematischen* Gründen reizvoll, einen Tautologator und Antilogator einzuführen, das zeigt ja gerade die obige Übersicht. Man erhält so genau $4^2 = 16$ Relatoren, während man sich sonst mit 14 Relatoren begnügen muss. Aber diese beiden Relatoren lassen sich kaum sinnvoll interpretieren (vgl. 3-1-4-4).

Die Alternative, Tautologator und Antilogator als *analytische Relatoren* zu kennzeichnen, überzeugt noch weniger. Es gibt m. E. überhaupt keine analytischen Relatoren.

Zwischen X und Y, als isolierten Objekten bzw. Variablen, kann gar keine analytische Beziehung bestehen, da X und Y vollkommen *unabhängig voneinander* sind. Somit ist z. B. $X \top Y$ mit Sicherheit nicht analytisch.

3-1-4-2 STUFEN DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT

Es gibt also 5 *Grade* oder Stufen der theoretischen Wahrscheinlichkeit, die in der Aussagen-Logik – bei 2 Variablen – vorkommen (wenn man den Tautologator $\top$ und den Antilogator $\perp$ mit einbezieht).

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht hierüber:

z. B.	Wahrheits-werte		p^T
$X \top Y$	+ + + +	Tautologie	4/4 = 1
$X \rightarrow Y$	+ – + +		3/4 = 0,75
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +		2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –		1/4 = 0,25
$X \perp Y$	– – – –	Kontradiktion	0/4 = 0

Diskussion: Man könnte diskutieren, ob z. B. 3/4 wirklich der *Meta-Wert* von $X \rightarrow Y$ ist oder vielleicht doch der *Objekt-Wert*. Dann wäre der Meta-Wert $4^3/4^4 = 64/256 = 1/4 = 0{,}25$. Aber da dieser Ansatz sich als wenig plausibel erwiesen hat, führe ich ihn nicht im Einzelnen aus. Wichtig ist jedoch, dass man prinzipiell von jeder theoretischen Wahrscheinlichkeit wiederum die theoretische Wahrscheinlichkeit berechnen kann, also einen *Meta-meta-Wert*.

3-1-4-3 PARTIELLE TAUTOLOGIE

Üblicherweise bestimmt man *synthetische* Relationen als *vollständig nicht-tautologisch* und hält nur *analytische* Relationen für tautologisch (oder kontradiktorisch). Ich halte diese These aber nicht für realistisch. Eine Relation wie $X \rightarrow Y$ ist zweifelsohne synthetisch, aber sie hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 3/4$, ist somit nahe dran an einer Tautologie mit dem Wert $p^T = 4/4$. Das rechtfertigt es, die Relation $X \rightarrow Y$ *partiell tautologisch* zu nennen.

Außerdem muss es möglich sein, $X \rightarrow Y$ z. B. von $X \wedge Y$ abzugrenzen, das nur eine $p^T = 1/4$ besitzt. Da diese nahe an der Kontradiktion mit dem Wert $p^T = 0/4$ steht, kann man sie *partiell kontradiktorisch* nennen.

Synthetische Relationen dazwischen – mit $p^T = 2/4 = 1/2 = 0{,}5$ – nenne ich *neutral*.
Ich möchte die synthetischen Relationen mit p^T - Werten von 3/4 bis 1/4 hier folgendermaßen einteilen (das wird später noch genauer erläutert).

Tautologie-Grad	Wahrscheinlichkeit	Beispiel	p^T Bruch	p^T dezimal
- *Partiell tautologisch*:	wahrscheinlich	$X \rightarrow Y$	$p^T > 2/4$	$p^T > 0{,}5$
- *Partiell kontradiktorisch*:	unwahrscheinlich	$X \wedge Y$	$p^T < 2/4$	$p^T < 0{,}5$
- *Kontingent* (neutral):	zufällig	$X \leftrightarrow Y$	$p^T = 2/4$	$p^T = 0{,}5$

Streng synthetische Relation

Man kann $X \wedge Y$ in der obigen Liste auch als einzige *streng synthetische* Struktur bezeichnen. Denn real existieren *primär* Sachverhalte wie X bzw. Anhäufungen von Sachverhalten wie eben $X \wedge Y$. Ein Sachverhalt kann gültig sein oder nicht (jeweils $p^T = 1/2$), eine Kombination von 2 Sachverhalten erlaubt (streng synthetisch) folgende Kombinationen:

$X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$ (jeweils mit $p^T = 1/4$).

Eine Struktur wie $X \leftrightarrow Y$ ist dagegen *sekundär*, sie bedeutet bereits eine *Zusammenfassung*, sie entspricht $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$.

Von daher würde man erwarten, dass für den Tautologie-Grad von $X \wedge Y$ gilt: $p^T = 0$. Und es mag etwas irritierend sein, dass $p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0{,}25$. Aber ein Tautologie-Grad von 0 kommt eben der *Kontradiktion* zu, somit muss auch ein rein synthetischer Satz einen Tautologie-Grad > 0 haben, es sei denn, man wählt ein ganz anderes Modell. Man kann aber zeigen, dass für streng synthetische Strukturen gilt: $0 < p^T \leq 0{,}5$. Denn:

$p^T[X] = 1/2 = 0{,}5$
$p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0{,}25$
$p^T[X \wedge Y \wedge Z] = 1/8 = 0{,}125$

Man sieht, dass mit *steigender* Anzahl der Variablen die p^T eines *streng synthetischen* Satzes *immer kleiner* wird und letztlich gegen 0 geht.

3-1-4-4 SYNTHETISCH-TAUTOLOGISCHE RELATIONEN ?

Ich habe eben dargelegt, dass *synthetische* Relationen *partiell* tautologisch (bzw. partiell kontradiktorisch) sein können. Die Frage stellt sich: Können synthetische Relationen auch *vollständig* tautologisch oder vollständig kontradiktorisch sein?

Nach meiner Definition sind bei einer *synthetischen* Relation die Relata logisch von einander *unabhängig* bzw. stehen *nur unterschiedliche Objekt-Zeichen* rechts und links vom Relator. Bei folgenden Beispielen ist das der Fall, dennoch sind die Relationen analytisch, nämlich tautologisch bzw. kontradiktorisch:

Tautologie $X \Rightarrow (Y \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg\, Y)$

Kontradiktion $X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X \;\not\Rightarrow\; Y \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg\, Y$

Aber es handelt sich wohl um Schein-Beispiele:

Denn eine Implikation ist eben *immer tautologisch*, wenn sie als Folgeglied eine (andere) Tautologie aufweist (hier $Y \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg\, Y$). Egal, welches Vorderglied sie hat: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.

Und eine Implikation ist *immer kontradiktorisch*, wenn sie als *Vorderglied* eine Tautologie und als Nachglied eine *Kontradiktion* hat: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion.

Manche Autoren führen wie beschrieben sogar Junktoren wie *Tautologator* $\top$ und *Antilogator* $\perp$ ein, die parallel zu den anderen Junktoren eben durch den Wahrheitsverlauf + + + + bzw. – – – – bestimmt sind. Ich bezweifle aber, dass es Sinn macht, solche Relatoren einzuführen. Eine realistische Deutung ist kaum möglich, aber auch eine sprachlogische Funktion ist kaum erkennbar.

Zusammenfassend: Ich vertrete die These,

dass *Tautologie* ($p^T = 1$) und *Kontradiktion* ($p^T = 0$)

im eigentlichen Sinn nur bei *analytischen* Relationen vorkommen, nicht bei synthetischen Relationen (und nicht bei semi-analytischen Relationen).

Mit der Frage, ob synthetische Strukturen ganz tautologisch/kontradiktorisch sein können, hängt folgende Frage zusammen: Gibt es bei synthetischen Strukturen einen *fließenden Übergang* von nicht-tautologisch zu tautologisch, wie obige Tabelle in 3-1-4-3 nahe legt. Ist es wirklich kein Sprung von $p^T = 3/4$ zu $p^T = 4/4 = 1$? Oder von $p^T = 1/4$ zu $p^T = 0/4 = 0$?

Rein quantitativ betrachtet, ist dies zwar (jeweils) ein fließender Übergang, aber ich möchte es dennoch als einen *qualitativen* Unterschied sehen. Denn wie gesagt:

trennt $p^T = 1$ versus $p^T = 3/4$ analytisch-tautologische und synthetische Relationen
trennt $p^T = 0$ versus $p^T = 1/4$ analytisch-kontradiktorische und synthetische Relationen.

3-1-4-5 RELATIONEN MIT MEHR VARIABLEN

Wir haben hier bisher immer Relationen mit 2 Variablen betrachtet. Kurz sollen noch einige Beispiele für 3 und 4 Variablen vorgestellt werden:

• 3 Variablen X, Y, Z, n = 3, hier ist der Nenner stets $2^3 = 8$
$p^T[X \vee Y \vee Z] = 7/8$
$p^T[X \wedge Y \wedge Z] = 1/8$
$p^T[(X \rightarrow Y) \rightarrow Z] = 5/8$

• 4 Variablen X, Y, V, W, n = 4, hier ist der Nenner stets $2^4 = 16$
$p^T[(X \wedge Y) \rightarrow (V \wedge W)] = 13/16$
$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W)] = 9/16$
$p^T[(X \rightarrow Y) \vee (V \rightarrow W)] = 15/16$
$p^T[(X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16$
$p^T[(X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 7/16$

(Das lässt sich leicht aus den Wahrheitstafeln berechnen.)

3-1-5 Erweiterungen

3-1-5-1 EMPIRISCHE WAHRHEIT UND WAHRSCHEINLICHKEIT

Ich habe schon mehrfach geschrieben, dass die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T auch den *Grad der Tautologie* einer Relation angibt, dass p^T somit auch für den Tautologie-Grad stehen kann. Zur Erläuterung muss ich etwas weiter ausholen.

Wir können unterscheiden:

- Empirische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit
- Theoretische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit (Tautologie)

Auf das Verhältnis von *empirischer* Wahrscheinlichkeit und *empirischer* Wahrheit bin ich in 1-3-1-2 näher eingegangen. Man kann unterscheiden, am Beispiel $p(X \rightarrow Y) = 4/5$:

Wahrscheinlichkeits-Deutung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass wenn X, dann auch Y, beträgt 4/5 = 80%"; das entspricht der Deutung der *relativen Häufigkeit*: „4 von 5 X sind auch Y".

Wahrheits-Deutung: ‚Die Wahrheit (der Wahrheits-Grad) der Relation bzw. des Satzes: „*immer* wenn X, dann auch Y", d. h. $p(X \rightarrow Y) = 1$, beträgt 4/5 = 80%'. Diese Deutung ist ungewöhnlicher und komplizierter, aber auch legitim.

3-1-5-2 EMPIRISCHE WAHRHEIT UND TAUTOLOGIE

Beim Verhältnis von theoretischer Wahrscheinlichkeit und theoretischer Wahrheit liegen die Verhältnisse etwas anders. Wir können zunächst definieren:

– *Theoretische Wahrheit* = Tautologie, Grad der theoretischen Wahrheit = *Tautologie-Grad* (anstelle von ‚*theoretischer* Wahrheit' kann man auch von ‚*logischer* Wahrheit' sprechen, dieser Begriff ist aber vieldeutig, ich verwende ihn i. allg. nur bei logischen Schlüssen).

– *Theoretische Falschheit* = Kontradiktion, Grad der theoretischen Falschheit = *Kontradiktions-Grad;* anstelle von ‚Grad' könnte man auch von Größe, Kontradiktions-Größe sprechen.

Genauso, wie eine *synthetische* Relation eine theoretische Wahrscheinlichkeit besitzt, so besitzt sie also auch einen Tautologie-Grad; das gleiche gilt für *analytische* Relationen.

Beispiel: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$
(für ein quantitatives Beispiel wie $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n]$ ergäbe sich Entsprechendes)

Wahrscheinlichkeits-Deutung: $X \rightarrow Y$ gilt mit 3/4 = 75% *theoretischer* Wahrscheinlichkeit, oder: $X \rightarrow Y$ ist _mit_ 3/4 = 75% *theoretischer* Wahrscheinlichkeit wahr.

Wahrheits-Deutung: $X \rightarrow Y$ ist _zu_ 3/4 = 75% wahr

Wichtig ist dabei der folgende Unterschied:

$X \rightarrow Y$ ist *mit* 3/4 = 75% Wahrscheinlichkeit *empirisch* wahr (es wäre unsinnig zu behaupten, $X \rightarrow Y$ ist *mit* 3/4 = 75% Wahrscheinlichkeit theoretisch wahr)

$X \rightarrow Y$ ist *zu* 3/4 = 75% *theoretisch* wahr (ist zu 3/4 tautologisch).

Wie lässt sich die *Gleichsetzung* von theoretischer Wahrscheinlichkeit und Tautologie begründen? Bzw. wie lässt sich die *Wahrheits*-Deutung begründen?

Man bestimmt eine Tautologie auch so, dass sie in *allen* möglichen (relevanten) Welten wahr ist. Z. B. ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$, laut Wahrheitstafel, in 4 von 4 möglichen Welten wahr. Dagegen ist $X \rightarrow Y$ nur in 3 von 4 Welten wahr. Man kann das zu Recht wie folgt interpretieren:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist vollständig, zu 100%, (theoretisch) wahr

$X \rightarrow Y$ ist nur zu 75% (theoretisch) wahr.

Wie sich später noch zeigen wird, ist gerade bei *Schlüssen* die Wahrheits-Deutung sinnvoll.

3-1-5-3 INFORMATIONSGEHALT

Ich habe die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T beschrieben, die mit dem *Tautologie-Grad* identisch ist. Sie gibt an, wie wahrscheinlich eine Relation ist, wenn man *zufällige Verhältnisse* voraussetzt.

Man kann aber einen Gegenwert dazu aufstellen, dies ist der *Informationsgehalt* oder Informationsgrad p^I, quasi die *theoretische Unwahrscheinlichkeit.*

Der Informationsgehalt ist also *umgekehrt proportional* zur theoretischen Wahrscheinlichkeit. Das erklärt sich folgendermaßen: Je (theoretisch) wahrscheinlicher eine Relation ist, desto weniger Neues erfährt man durch die Information, dass sie tatsächlich gültig ist.

Z. B. $X \vee Y$, mit $p^T = 3/4$, konkret: „Peter geht ins Kino *oder* Hans geht ins Kino". Diese Relation ist mit 3/4 *Wahrscheinlichkeit* wahr, hat aber nur 1/4 *Informationsgehalt*. Wenn ich erfahre, dass „Peter geht ins Kino" *wirklich (empirisch)* wahr ist, ist der *Informationsgewinn* hoch. Dagegen $X \wedge Y$, „Peter geht ins Kino *und* Hans geht ins Kino", ist mit $p^T = 1/4$ unwahrscheinlich, besitzt aber 3/4 Informationsgehalt; wenn ich erfahre, dass „Peter geht ins Kino" wirklich wahr ist, gibt es keinen (empirischen) Informationsgewinn.

Allerdings haben wir zunächst mit einem *theoretischen Informationsbegriff* – entsprechend der theoretischen Wahrscheinlichkeit – gearbeitet, der darf nicht mit einem *empirischen Informationsbegriff* verwechselt werden. Wenn ich etwas *sicher weiß*, könnte ich einen empirischen Informationswert von 1 ansetzen, aber der theoretische Wert ändert sich nicht.

Theoretisch stimmt: Je tautologischer eine Struktur ist, desto geringer ist ihre Aussage, also ihr Informationsgehalt. So hat eine Tautologie überhaupt keinen Informationswert.

Allgemein gilt: $p^I = 1 - p^T$ ($p^I = 1$ wird im Folgenden nur als theoretischer Wert verstanden.)

Bzw. wenn man p^I direkt berechnet: $p^I = \dfrac{q(-Welten)}{q(+/-Welten)}$

z. B.	Wahrheitswerte		p^T	p^I
$X \top Y$	+ + + +	Tautologie	4/4 = 1	0/4 = 0
$X \rightarrow Y$	+ – + +		3/4 = 0,75	1/4 = 0,25
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +		2/4 = 0,5	2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –		1/4 = 0,25	3/4 = 0,75
$X \perp Y$	– – – –	Kontradiktion	0/4 = 0	4/4 = 1

Dabei gilt:

$p^I = 1$	maximaler Informationsgehalt (nicht definiert: Kontradiktion)
$p^I = 0$	kein Informationsgehalt (Tautologie)
$0 < p^I < 1$	relevanter Informationsgehalt

Eine *synthetische* Tautologie oder Kontradiktion ist aber wie gesagt sehr problematisch.

3-1-5-4 BESTIMMTHEIT

Man kann die *Bestimmtheit* einer Relation berechnen. Ich schreibe dafür p^B. Wie ich schon erläutert habe, p kann allgemein für „relative Größe" stehen, nicht nur für *Wahrscheinlichkeit* im engeren Sinn. Die Bestimmtheit einer Relation gibt an, wie exakt ich aus einer Relation ableiten kann, welche *Möglichkeit* auch *Wirklichkeit* ist.

Z. B. die *Disjunktion*, hier gilt:

$$[X \vee Y] \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)]$$

Wenn ich weiß, dass $X \vee Y$ gültig ist, weiß ich nur, dass $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ *real* gilt, aber nicht, welche der 3 Möglichkeiten. Daher $p^B = 1/3$.

Dagegen die *Konjunktion* $X \wedge Y$: Hier gilt (trivialerweise): $X \wedge Y \Leftrightarrow X \wedge Y$. D. h. $X \wedge Y$ verweist nur auf sich selbst, $X \wedge Y$ ist nur in *einem* Fall wahr, es ist somit *maximal* bestimmt, daher $p^B = 1$.

Die Bestimmtheit einer Struktur p^B berechnet sich durch:

$$\frac{1}{\text{Anzahl der gültigen Welten}}.$$

Kurz: $p^B = \dfrac{1}{q(+Welten)}$

Beispiel	Wahrhheits-Verlauf	p^B
$X \wedge Y$	+ − − −	1/1 = 1 (maximal)
$X \leftrightarrow Y$	+ − − +	1/2 = 0,75
$X \rightarrow Y$	+ − + +	1/3 = 0,33
X T X	+ + + +	1/4 = 0,25 (minimal)
X K X	− − − −	1/0 (nicht definiert)

T = Tautologie, K = Kontradiktion (anstelle von $\top$ und $\perp$)
Für die Konjunktion schreibt man also z. B.: $p^B(X \wedge Y) = 1/1 = 1$

Unbestimmtheit

Genauso, wie zu der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T als Umkehrwert den Informationsgehalt p^I gibt, so gibt es zur Bestimmtheit p^B den Gegenwert: *Unbestimmtheit* p^{UB}

Es lassen sich allerdings *zwei Modelle* der Unbestimmtheit vorstellen:

• $p^{UB} = 1 - p^B$

Hier ist die Unbestimmtheit der *direkte Umkehrwert* der Bestimmtheit.

Beispiel: $p^B(X \wedge Y) = 1$, dann wäre $p^{UB}(X \wedge Y) = 1 - 1 = 0$

• $p^{UB} = \dfrac{1}{q(-Welten)}$

Die Unbestimmtheit berechnet sich hier also: 1 / Anzahl der negativen Welten.

Beispiel: $p^B(X \wedge Y) = 1/1$, dann wäre $p^{UB}(X \wedge Y) = 1/3 = 0,33$

3-1-5-5 BESTIMMTHEIT UND INFORMATIONSGEHALT

Der Grad der *Bestimmtheit* und der *Information* stehen im Zusammenhang. Man könnte auch die Bestimmtheit also einen Informationsgehalt ansehen, der eben nur anders definiert ist.

Wenn gilt: $p^T = r/n$, somit $p^I = 1 - r/n$, dann gilt $p^B = 1/r$. Die Bestimmtheit nimmt also nur auf die *absolute* Größe r (die Welten, in denen die Relation gültig ist) Bezug.

Beispiel	Wahrheits-Verlauf	p^B	p^I
$X \wedge Y \wedge Z$	+ − − − − − − −	1/1	7/8
$X \wedge Y$	+ − − −	1/1	3/4
$X \leftrightarrow Y$	+ − − +	1/2	1/2
$X \rightarrow Y$	+ − + +	1/3	1/4
$X \vee Y \vee Z$	+ + + + + + + −	1/7	1/8

Bei der *Konjunktion* nähern sich p^B und p^I an, wenn die Anzahl der Variablen = n ansteigt:

Beispiel	n	p^B	p^I	p^I dezimal
$X \wedge Y$	2	1	3/4	0,75
$X \wedge Y \wedge Z$	3	1	7/8	0,88
$X \wedge Y \wedge Z \wedge V$	4	1	15/16	0,94
$X \wedge Y \wedge Z \wedge V \wedge W$	5	1	31/32	0,97

Beide Informations-*Definitionen* p^I und p^B sind *theoretische* Größen. Davon ist ein *empirischer* (und ein psychologischer) Zugang zu unterscheiden. Und beide Ansätze und haben Vor- und Nachteile, wie ich an verschiedenen Fällen zeigen möchte.

• $X \wedge Y$

Geht man von dem *Bestimmtheits-Modell* p^B aus, kann man argumentieren: Wenn ich weiß, dass $X \wedge Y$ wahr ist, dann weiß ich genau über beide Variablen X und Y Bescheid, es gibt nur *eine* Möglichkeit, nämlich $X \wedge Y$. Andere Kombinationen wie z. B. $X \wedge \neg Y$ sind ausgeschlossen. Daher besteht ein Informations-Wert von 1.

Geht man von dem *Modell der umgekehrten theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^I aus, dann fragt man: Wie viele Kombinationsmöglichkeiten von X und Y gibt es überhaupt? Und in wie vielen dieser Fälle ist $X \wedge Y$ falsch? Antwort hier: in 3 von 4 Welten, also erhält man den Informations-Wert 3/4. In diesem Fall von $X \wedge Y$ scheint mir das Modell p^B überzeugender.

• Tautologie, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X$

$p^I[X \wedge Y \Rightarrow X] = 0/4 = 0$, dagegen $p^B(X \wedge Y \Rightarrow X) = 1/4 = 0{,}25$. Hier ist der Ansatz p^I plausibler, denn man versteht eine Tautologie als „inhaltsleer", als *redundant*, was gut zu dem Wert $p^I = 0$ passt. Der Wert $p^B(X \wedge Y \Rightarrow X) = 1/4 = 0{,}25$ ist dagegen nicht unmittelbar einleuchtend. Auch überzeugt mehr, dass *immer* gilt p^I[Tautologie] = 0, während sich dagegen der Wert p^B(Tautologie) in Abhängigkeit von n verändert: bei n = 2: 1/4, bei n = 3: 1/8 usw.

• Kontradiktion, z. B. $(X \wedge Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ \neg(X \wedge Y)$

$p^{I[}[(X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge Y)] = 4/4 = 1$. Generell gilt: p^I[Kontradiktion] = 1. Dies ist natürlich problematisch, denn warum soll die Kontradiktion – als logischer Widerspruch, als etwas Unmögliches – einen Informationsgehalt von 1 besitzen? Zwar ergibt sich das aus dem System, aber es ist doch adäquater zu postulieren: Bei der Kontradiktion ist *kein Informationsgehalt* p^I *definiert*. $p^B((X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge Y)) = 1/0$. Und es gilt generell p^B(Kontradiktion) = 1/0. Eine Division durch 0 ist aber nicht „erlaubt", insofern kann man auch hier davon sprechen, dass bei der Kontradiktion kein Informationsgehalt definiert ist.

Abschließend eine Übersicht für *Implikation* und *Positiv-Implikation:*

	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$	$X *\!\!\rightarrow Y$	$\neg(X *\!\!\rightarrow Y)$
Theoret. Wahrsch. p^T	3/4	1/4	1/2	1/2
Informationsgehalt p^I	1/4	3/4	1/2	1/2
Bestimmtheit p^B	1/3	1	1	1

3 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

3-2-1 Einführung

3-2-1-1 BESTIMMUNG

In der traditionellen *Quantoren-Logik* werden, wie beschrieben, 4 Quantitäts-Stufen unterschieden. *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*.

Es geht dabei vor allem um folgende *Kopula*-Relationen:

- *All-Relationen* (All-Sätze)
  - positiv: Alle X sind Y
  - negativ: Alle X sind nicht Y
- *Partikulär-Relationen* (Partikulär-Sätze)
  - positiv: Einige X sind Y
  - negativ: Einige X sind nicht Y

3-2-1-2 PROBLEM DER ZUORDNUNG VON META-WERTEN

Ich habe früher dargelegt, dass „alle" bzw. „einige" sich primär auf *relative* Größen beziehen (wobei nur in geringem Ausmaß Erkenntnisse über *absolute* Größen abzuleiten sind).

Die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T verlangt zur Berechnung aber die *absoluten* Größen. Es ist also nicht möglich, einem All-Satz oder Partikulär-Satz *direkt* eine theoretische Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen. Es sei denn, man führt bei „alle" $\Lambda(X \rightarrow Y)$ bzw. klassisch $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ auf aussagen-logisch $X \rightarrow Y$ zurück und wählt den strukturellen Wert der Implikation, also $p^T = 3/4$, was jedoch sehr unbefriedigend wäre (und bei „einige" auch nicht weiterführte, weil es hierfür keinen aussagen-logischen Ausdruck gibt).

Es ist aber möglich, eine Berechnung vorzunehmen, wenn man den *quantoren-logischen* Ausdruck in einen *prädikaten-logischen* umformt bzw. in meiner Terminologie, die *allgemein-logische* Relation in eine *individual-logische* Relation übersetzt. Das werde ich im nächsten Punkt erläutern (genauer aber erst im Unterkapitel 3-3, Quantitative Logik).

3-2-1-3 EINZEL-BERECHNUNG

Wie beschrieben, gibt es verschiedene Möglichkeiten, All-Relationen und Partikulär-Relationen zu formalisieren.

Nehmen wir als erstes Beispiel den All-Satz in der Formalisierung: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Diese All-Satz-Implikation lässt sich folgendermaßen in *Prädikaten-Logik* übersetzen:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Zur Berechnung von p^T gehen wir Schritt für Schritt vor:

Voraussetzung ist, wie dargelegt wurde: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$

- $n = 1$ $\quad p^T[Fx_1 \rightarrow Gx_1] = 3^1/4^1 = 3/4 = 0{,}75$
- $n = 2$ $\quad p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^2/4^2 = 9/16 = 0{,}56$
- $n = 3$ $\quad p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_3 \rightarrow Gx_3)] = 3^3/4^3 = 27/64 = 0{,}42$

3-2-1-4 GESAMT-BERECHNUNG

Die Lösung ist leicht zu erkennen:

- $n = 1$ $3^1/4^1$ bzw. $(3/4)^1$
- $n = 2$ $3^2/4^2$ bzw. $(3/4)^2$
- $n = 3$ $3^3/4^3$ bzw. $(3/4)^3$

Offensichtlich gilt also allgemein:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

Ein strenger Beweis soll hier nicht durchgeführt werden. Im Punkt 3-4-2 wird die Formel für die Berechnung des All-Satzes (und der meisten nachfolgenden Satz-Strukturen) erläutert.

Wenn also gilt:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Und:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

So kann man indirekt bestimmen:

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/4^n$$

3-2-1-5 UNTERSCHIEDLICHE BERECHNUNGS-METHODEN

Dieser Punkt ist für Spezialisten und kann von anderen Lesern ggf. übergangen werden.
Man kann hier 2 Ansätze unterscheiden:

- n = Anzahl der x, Nenner 4^n

Nach dieser Methode bin ich oben vorgegangen;

$$\text{z. B.: } p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^n/4^n = 3^2/4^2 = 9/16$$

Hier wurde festgesetzt: $n = 2$, weil es 2 x gibt (x_1 und x_2) oder auch weil es 2 *Teil-Relationen* (in den Klammern) gibt.

- n = Anzahl aller Variablen, Nenner 2^m

Man könnte für n aber auch die Anzahl der *Variablen* (x_1, x_2, F, G) oder der *Elementarrelationen* (Fx_1, Gx_1, Fx_2, Gx_2) nehmen, dann gälte aber für dieses Beispiel $n = 4$. Noch deutlicher wird das, wenn man 4 ganz verschiedene, aussagen-logische Variablen einsetzt:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \text{ bzw. } (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_3 \rightarrow X_4)$$

Hier wäre es ganz offensichtlich, dass man bestimmen würde $n = 4$ (und nicht $n = 2$).
Als *Basis* für den Nenner würde man dann andererseits nicht mehr 4 nehmen, sondern 2 (entsprechend der Aufteilung in + und – in der Wahrheitstafel).

Natürlich müsste dann die Formel auf der Basis 2 anders lauten, und zwar z. B.:

$p^T = 3^{m/2}/2^m$ anstatt $p^T = 3^n/4^n$ (ich verwende hier ‚m' zur Unterscheidung von ‚n').

Man erhielte im Beispiel:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^{m/2}/2^m = 3^{4/2}/2^4 = 3^2/2^4 = 9/16$$

- Wurzel-Darstellung

Allgemein kann man für den Nenner bestimmen:
4^n sei 2^m. Wenn die *Basis* 2 ist statt 4, dann muss die *Potenz* um den Faktor 2 erhöht sein. Denn $2 = \sqrt{4}$. Somit gilt: $n \times 2 = m$.
Daher $4^1 = 2^2$, $4^2 = 2^4$, $4^3 = 2^6$, $4^4 = 2^8$ usw.

Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen Potenz und Wurzel, wenn man folgendermaßen schreibt:

$$4^1 = (\sqrt{4})^2,\ 4^2 = (\sqrt{4})^4,\ 4^3 = (\sqrt{4})^6,\ 4^4 = (\sqrt{4})^8 \text{ usw.}$$

Da $(\sqrt{4})^n = \sqrt{4^n}$ kann man die Klammern auch weglassen.

Kommen wir zurück zu der konkreten Formel $(3/4)^n$: Will man für die Basis 2 (wie bei der Basis 4) dieselbe Hochzahl verwenden, so muss man unter Verwendung des *Wurzelzeichens* schreiben: $(\sqrt{3})^m / (\sqrt{4})^m = (\sqrt{3}/\sqrt{4})^m = (\sqrt{3}/\sqrt{4})^{2n}$. Da wie gesagt gilt $\sqrt{4} = 2$, kann man auch schreiben: $(\sqrt{3}/2)^{2n}$.

Im Beispiel ergibt sich: $p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (\sqrt{3}/2)^4 = 9/16$
$(\sqrt{3})^4$ hat also denselben Wert wie in der ersten Formel $3^{4/2}$.

• Dezimal-Darstellung
Mit *Dezimalzahlen* ist der Sachverhalt vielleicht noch prägnanter darzustellen:
Die Formel auf der Basis 4 lautet: $(3/4)^n$. Dafür kann man *dezimal* schreiben: $(0{,}75)^n$.
$(3/4)^n = (0{,}75)^n$, somit: $(3/4)^1 = (0{,}75)^1 = 0{,}75$, $(3/4)^2 = (0{,}75)^2 = 0{,}56$, $(3/4)^3 = (0{,}75)^3 = 0{,}42$, $(3/4)^4 = (0{,}75)^4 = 0{,}32$ usw.

Die Formel auf der Basis 2 lautet wie beschrieben:
$(\sqrt{3}/\sqrt{4})^m$ bzw. $(\sqrt{3}/\sqrt{4})^{2n}$.
Dafür kann man dezimal schreiben: $(\sqrt{0{,}75})^m = (\sqrt{0{,}75})^{2n}$
Somit:
$(3/4)^n = (0{,}75)^n = (\sqrt{0{,}75})^{2n}$, folglich: $(3/4)^1 = (0{,}75)^1 = (\sqrt{0{,}75})^2 = 0{,}75$
$(3/4)^2 = (0{,}75)^2 = (\sqrt{0{,}75})^4 = 0{,}56$ $(3/4)^3 = (0{,}75)^3 = (\sqrt{0{,}75})^6 = 0{,}42$ usw.

Man erhielte im Beispiel:
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (\sqrt{0{,}75})^4 = 0{,}56$

Diese Umformungen – vom Nenner 4^n zum Nenner 2^m bzw. dezimal formuliert – lassen sich auch auf alle hier verwendeten (strukturgleichen) Gleichungen anwenden, es soll aber genügen, dies hier einmal demonstriert zu haben.

• *Vergleich*: Beide Berechnungsmethoden haben Vorteile und Nachteile. Aber gerade bei einer komplexen Relation in prädikaten-logischer Formalisierung (mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$) bietet sich die erste Methode mit dem Nenner 4^n an, weil dann die Indizes von x mit den Parametern in der Formel übereinstimmen. Außerdem ist so die Unterscheidung von einfachen Relationen mit 2^n als Nenner und komplexen Relationen mit 4^n als Basis besser möglich.

3-2-2 Implikation

3-2-2-1 NEGATIVER ALL-SATZ
Den *positiven* All-Satz $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ habe ich bereits im vorigen Punkt analysiert.
Hier geht es jetzt um den *negativen* All-Satz $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$.
Für den gelten vergleichbare Verhältnisse.
• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1] = 3^1/4^1 = 3/4 = 0{,}75$$
$$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2)] = 3^2/4^2 = 9/16 = 0{,}56$$
$$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge (Fx_3 \rightarrow \neg Gx_3)] = 3^3/4^3 = 27/64 = 0{,}42$$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)] = 3^n/4^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)] = 3^n/4^n$

3-2-2-2 NEGIERTER ALL-SATZ

Nun geht es um den *negierten* All-Satz $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$.
Für den gelten veränderte Verhältnisse.

• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1)] = 1/4^1 = 1/4 = 0{,}25$

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 1/4^2 = 1/16 = 0{,}06$

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \neg(Fx_3 \rightarrow Gx_3)] = 1/4^3 = 1/64 = 0{,}02$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 1/4^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1/4^n$

Natürlich kann man für $1/4^n$ auch $1^n/4^n$ oder $(1/4)^n$ schreiben und für $3^n/4^n$ auch $(3/4)^n$.
$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] + p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] \neq 1$, außer im Ausnahmefall n = 1. Und das ist auch plausibel, denn $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$ ist nicht die *Kontradiktion* von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Das ist nämlich $\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Und: $p^T[\Lambda x (Fx \rightarrow Gx)] + p^T[\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 1$.

Zur genaueren Begründung dieser und folgender Berechnungen vgl. 3-4-2.

3-2-2-3 PARTIKULÄR-SAT Z

Es geht hier um den Partikulär-Satz (die Partikulär-Relation): $Vx(Fx \rightarrow Gx)$

• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[Fx_1 \rightarrow Gx_1] = (4^1 - 1)/4^1 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee (Fx_3 \rightarrow Gx_3) = (4^3 - 1)/4^3 = 63/64 = 0{,}98$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$

• Übertragung

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

Die Formel $(4^n - 1)/4^n$ ist anders als die bisherigen Formeln nicht direkt aus der aussagen-logischen Wahrheitstafel herzuleiten; sie wird im *quantitativen* Bereich noch erläutert werden.

3-2-2-4 NEGATIVER PARTIKULÄR-SATZ

Nun geht es um den *negativen* Partikulär-Satz (negative Partikulär-Relation): $Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)$.
Hier ergeben sich dieselben Verhältnisse wie bei dem *positiven* Partikulär-Satz.

• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1] = (4^1 - 1)/4^1 = 3/4 = 0{,}75$
$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$
$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee (Fx_3 \rightarrow \neg Gx_3) = (4^3 - 1)/4^3 = 63/64 = 0{,}98$

- Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$

- Übertragung

$p^T[Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

3-2-2-5 NEGIERTER PARTIKULÄR-SATZ

Es geht hier um den *negierten* Partikulär-Satz: $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1)] = (4^1 - 3^1)/4^1 = 1/4 = 0{,}25$
$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (4^2 - 3^2)/4^2 = 7/16 = 0{,}44$
$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \neg(Fx_3 \rightarrow Gx_3) = (4^3 - 3^3)/4^3 = 37/64 = 0{,}58$

- Allgemeine Berechnung

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4^n - 3^n)/4^n$

- Übertragung

$p^T[Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 3^n)/4^n$

Abschließend hierzu sei *eine* Verbindung quantoren-logischer Relationen untersucht:

$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \;{}^{+}{>}{<}^{+}\; Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Diese beiden Relationen sind also k*ontradiktorisch*.

Somit muss gelten: $p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] + p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

Wir hatten angegeben:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1/4^n$ bzw. $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

Daher muss gelten:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (4^n - 1)/4^n$ bzw. $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - 1/4^n$

Beispiel : n = 2, somit

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1/4^2 = 1/16$
$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16$

Es gilt also wie gefordert:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (4^2 - 1)/4^2 = 1 - 15/16 = 16/16 - 15/16 = 1/16$
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (1/4^2) = 1 - 1/16 = 16/16 - 1/16 = 15/16$

Wie beschrieben kann man vor allem die *Partikulär-Sätze* auch anders formalisieren, wodurch sich auch andere p^T-Werte ergeben. Dazu komme ich im Punkt 3-3.

3-2-3 Positiv-Implikation

Nun hatte ich schon mehrfach gezeigt, dass die *All- und Partikulär-Aussagen* mit der *herkömmlichen Implikation* $\rightarrow$ zu Problemen führen. Dagegen ist die Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$ weitgehend unproblematisch. Daher seien nachfolgend dieselben Aussagenformen noch einmal mit der Positiv-Implikation untersucht.

3-2-3-1 ALL-SATZ

Hier geht es um den *positiven* All-Satz $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1] = 1/2^1 = 1/2 = 0,5$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0,25$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_3 *\!\!\rightarrow Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0,13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)] = 1/2^n$$

3-2-3-2 NEGATIVER ALL-SATZ

Jetzt geht es um den *negativen* All-Satz $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx)$. Dabei gilt dasselbe.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow \neg Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 *\!\!\rightarrow \neg Gx_1] = 1/2^1 = 1/2 = 0,5$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow \neg Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0,25$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge (Fx_3 *\!\!\rightarrow \neg Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0,13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow \neg Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx)] = 1/2^n$$

3-2-3-3 NEGIERTER ALL-SATZ

Nun zum negierten All-Satz $\Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1)] = 1/2^1 = 1/2 = 0,5$$
$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0,25$$
$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \neg(Fx_3 *\!\!\rightarrow Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0,13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)] = 1/2^n$$

Auch hier ergibt sich also dieselbe Formel.

3-2-3-4 PARTIKULÄR-SATZ

Hier sei der Partikulär-Satz $Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$ analysiert.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \; *\!\!\Leftrightarrow (Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1] = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2 = 0{,}5$

$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2)] = (2^2 - 1)/2^2 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee (Fx_3 *\!\rightarrow Gx_3)] = (2^3 - 1)/2^3 = 7/8 = 0{,}88$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)] = (2^n - 1)/2^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)] = (2^n - 1)/2^n$

3-2-3-5 NEGIERTER PARTIKULÄR-SATZ

Jetzt zum negierten Partikulär-Satz $Vx\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$. Dabei ergibt sich dasselbe Ergebnis wie beim positiven Partikulär-Satz.

• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx\neg(Fx *\!\rightarrow Gx) \ *\!\Leftrightarrow \ \neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1)] = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2 = 0{,}5$

$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2)] = (2^2 - 1)/2^2 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee \neg(Fx_3 *\!\rightarrow Gx_3)] = (2^3 - 1)/2^3 = 7/8 = 0{,}88$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)] = (2^n - 1)/2^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)] = (2^n - 1)/2^n$

3-2-4 Systematik

Ich habe in den früheren Kapiteln *5 Modelle* unterschieden, wie man *All-Relationen* und *Partikulär-Relationen* darstellen kann, und die Vor- und Nachteile dieser Modelle diskutiert. Hier soll nun die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T für die 5 Modelle berechnet werden.

3-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

Modell 1 ist besonders systematisch: Es werden *alle* Strukturen mit der *Implikation* formalisiert (bei der Negation steht das Negationszeichen vor der Klammer). Ein Problem beim ersten Modell ist aber, dass der p^T-Wert von „alle F sind G“ und „alle F sind nicht G“ ganz unterschiedlich ist, entsprechend der für „einige“ und „einige nicht“; das wirkt wenig plausibel. Dieses Problem tritt bei den folgenden Modellen 2 und 3 nicht auf, aber sie haben andere (früher aufgezeigte) Schwierigkeiten, vor allem das reine Konjunktions-Modell 3.

1. alle F sind G

Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G

Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

$p^T = 1/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\vee x \neg(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

3-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$ [dies ist äquivalent $\Lambda x \neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$
$p^T = 1/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$ [dies ist äquivalent $\Lambda x \neg(Fx \rightarrow Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
$p^T = 1/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge Gx)$ [dies ist äquivalent $\vee x \neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $Vx(Fx \land \neg Gx)$ [dies ist äquivalent $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \land \neg Gx_1) \lor (Fx_2 \land \neg Gx_2) \lor ... \lor (Fx_n \land \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Dieses Modell ist das am weitesten verbreitetste. Danach werden All-Sätze und Partikulär-Sätze unterschiedlich formalisiert, *All-Sätze mit der Implikation* und *Partikulär-Sätze mit der Konjunktion*. Dieses Modell hat wie beschrieben erhebliche Schwächen, sein Vorteil ist, dass die p^T-Werte von *positiven* und *negativen* All-Sätzen übereinstimmen und ebenso die von positiven und negativen Partikulär-Sätzen.

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \land (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \land ... \land (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik:$(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \land (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \land ... \land (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $Vx(Fx \land Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \land Gx_1) \lor (Fx_2 \land Gx_2) \lor ... \lor (Fx_n \land Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $Vx(Fx \land \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \land \neg Gx_1) \lor (Fx_2 \land \neg Gx_2) \lor ... \lor (Fx_n \land \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

Das folgende Modell hat, wie frühere Analysen gezeigt haben, viele Vorteile. Und ist auch hinsichtlich der p^T-Werte überzeugend. Denn auch hier gilt, dass die p^T-Werte von *positiven* und *negativen* All-Sätzen übereinstimmen und ebenso die von positiven und negativen Partikulär-Sätzen.

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \land (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \land ... \land (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$
$p^T = 1/2^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \land \neg(Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \land ... \land \neg(Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$
$p^T = 1/2^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$
$p^T = (2^n - 1)/2^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$
$p^T = (2^n - 1)/2^n$

3-2-5 Erweiterungen

Hier soll die *Entwicklung* der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T (bei steigendem n) für verschiedene Formalisierungen quantoren-logischer Relationen aufgezeigt werden.

3-2-5-1 ALL-SATZ

Es geht hier zunächst um die *All-Relation* bzw. den *All-Satz* $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.
Nun gilt, wie beschrieben: p^T[All-Satz] = $3^n/4^n$, formal:
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$3^1/4^1$	3/4	0,75
2	$3^2/4^2$	9/16	0,56
3	$3^3/4^3$	27/64	0,42
4	$3^4/4^4$	81/256	0,32
5	$3^5/4^5$	243/1024	0,24

n steht also für also die Anzahl der x bzw. die Anzahl der Implikationen $Fx_n \rightarrow Gx_n$.
Und mit steigendem n nimmt p^T ab. Dies heißt konkret, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T eines All-Satzes gegen 0 geht, wenn n gegen ∞ geht.

Umgekehrt gilt: Je größer n, desto höher der *Informationsgehalt* p^I des All-Satzes.
Dabei gilt: $p^T = 1 - p^I$ bzw. $p^I = 1 - p^T$

Schon bei n = 3 hat sich das Größenverhältnis von p^T und p^I umgekehrt. p^T ist nur noch 0,42, p^I ist 1 – 0,42 = 0,58.

3-2-5-2 PARTIKULÄR-SATZ MIT IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation $Vx(Fx \rightarrow Gx)$. Dabei gilt:
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$(4^1 - 1)/4^1$	3/4	0,75
2	$(4^2 - 1)/4^2$	15/16	0,94
3	$(4^3 - 1)/4^3$	63/64	0,98
4	$(4^4 - 1)/4^4$	255/256	0,99 (≈ 1)
5	$(4^5 - 1)/4^5$	1023/1024	≈ 1

p^T[Vx(Fx → Gx)] hat als Minimum den Wert 0,75. Es steigt sehr steil an, schon bei n = 4 ist quasi der Wert 1 erreicht (beim Aufrunden bei 2 Stellen erhält man bereits $p^T = 1$). Umgekehrt ist der Informationsgehalt p^I von Vx(Fx → Gx) gering, und so ist schon bei n = 4 der Wert von p^I[Vx(Fx → Gx)] nahe 0.

3-2-5-3 PARTIKULÄR-SATZ MIT KONJUNKTION

Es geht hier um die Relation Vx(Fx ∧ Gx). Dabei gilt:
$p^T[Vx(Fx \wedge Gx)] = p^T[(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)] = (4^n - 3^n)/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$(4^1 - 3^1)/4^1$	1/4	0,25
2	$(4^2 - 3^2)/4^2$	7/16	0,44
3	$(4^3 - 3^3)/4^3$	37/64	0,58
4	$(4^4 - 3^4)/4^4$	175/256	0,68
5	$(4^5 - 3^5)/4^5$	781/1024	0,76

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T von Vx(Fx ∧ Gx) beträgt also minimal 0,25, und sie bewegt sich wesentlich langsamer auf 1 zu als p^T[Vx(Fx → Gx)].

3-2-5-4 ALL-SATZ MIT POSITIV-IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation Λx(Fx *→ Gx). Dabei gilt:
$p^T[\Lambda x(Fx *\!\!\to Gx)] = p^T[(Fx_1 *\!\!\to Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\to Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\to Gx_n)] = 1/2^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$1/2^1$	1/2	0,5
2	$1/2^2$	1/4	0,25
3	$1/2^3$	1/8	0,13
4	$1/2^4$	1/16	0,06
5	$1/2^5$	1/32	0,03

Der All-Satz mit *Positiv*-Implikation unterscheidet sich deutlich von dem All-Satz mit *Normal*-Implikation. p^T[Λx(Fx *→ Gx)] geht viel schneller gegen 0, es fällt jeweils um die Hälfte, bei n = 5 ist der Wert nur noch: 0,03. Dagegen ist p^T[Λx(Fx → Gx)] = 0,24 bei n = 5. Umgekehrt ist der *Informationsgehalt* von Λx(Fx *→ Gx) deutlich höher als bei Λx(Fx → Gx).

3-2-5-5 PARTIKULÄR-SATZ MIT POSITIV-IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation Vx(Fx *→ Gx). Dabei gilt:
$p^T[Vx(Fx *\!\!\to Gx)] = p^T[(Fx_1 *\!\!\to Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\to Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\!\to Gx_n)] = (2^n - 1)/2^n$
Nun gilt: p^T[Vx(Fx *→ Gx)] = 1 – p^T[Λx(Fx *→ Gx)]
Somit gilt auch: p^T[Vx(Fx *→ Gx)] = $1 - 1/2^n$. Dies lässt sich leicht erklären: Ersetzt man die 1 in $1 - 1/2^n$ durch $2^n/2^n$, dann erhält man $(2^n - 1)/2^n$.
Somit ergibt sich die Folge: 1/2, 3/4, 7/8, 15/16, 31/32 usw.
Hier ist p^T = 0,5 der Minimalwert, dann steigt p^T schnell in Richtung 1. p^T[Vx(Fx → Gx)] mit der *Normal*-Implikation nähert sich allerdings noch schneller der 1 an.

3 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

3-3-1 Einführung

3-3-1-1 OBJEKT-EBENE UND META-EBENE QUANTITATIV
Bei einer logischen Relation kann man unterscheiden:

- *Objekt-Ebene* (Basis-Ebene, empirische Ebene)
- *Meta-Ebene* (theoretische Ebene)

Dies wurde schon bei der Aussagen-Logik erläutert. Aber jetzt geht es darum, dies im *quantitativen* Bereich zu präzisieren.

Die Objekt-Ebene ist die *vorgegebene* Ebene. Die Meta-Ebene ist eine *übergeordnete* Ebene. Auf der Objekt-Ebene wird angegeben, welche *Größe* eine Relation besitzt.

Dabei kann es um die *absolute* oder *relative*, die *implizite* oder *explizite* Größe gehen.

- Explizite Größen
  - absolute Größe: $q(X \to Y) = r$
  - relative Größe: $p(X \to Y) = r/n$
- Implizite (relative) Größen
  - Relation mit impliziter Größe: $X \to Y$
  - verborgene Größe von $X \to Y$: $p(X \to Y) = 1$

„$X \to Y$" in der Aussagen-Logik steht wie beschrieben für $p(X \to Y) = 1$, die 1 wird nur *nicht genannt*. Und $p(X \to Y) = 1$ steht wiederum für $p(X \to Y) = r/n = 1$, wobei $r = n$. Nur bleibt der Wert von r und n *verborgen* – der aber gerade für die Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit von Wichtigkeit ist.

Die Logik bezieht sich im Wesentlichen auf *relative* Größen, wobei die herkömmliche Logik überwiegend mit *impliziten* Größen arbeitet.

Ich habe in den vorherigen Kapiteln 1 und 2 fast ausschließlich die Objekt-Ebene behandelt. Hier geht es quantitativ vorrangig um die *relative Häufigkeit* oder *empirische Wahrscheinlichkeit*. Davon zu unterscheiden ist eine Meta-Ebene. Dort wird der *Objekt-Größe* eine *Meta-Größe* zugeordnet, und zwar primär die *theoretische Wahrscheinlichkeit*.

Diese Meta-Größe zeigt an, wie viele Möglichkeiten der *Verteilung* es gibt nach den Regeln der *Kombinatorik*. Anders gesagt, wie wahrscheinlich die Objekt-Größe ist, wenn man *zufällige* Verhältnisse voraussetzt. Dieses Maß dient dazu, den *Tautologie-Grad* bzw. den *Informationsgehalt* der Relation anzugeben, und zwar von synthetischen *und* analytischen Relationen.

3-3-1-2 OBJEKT- UND META-WAHRSCHEINLICHKEIT
Ich gehe zunächst von der *Kopula-Grundstruktur* „X ist (ein) Y" aus, und zwar folgendem Beispiel: 2 von 3 X sind Y. Das kann *empirisch* ermittelt sein oder eine *Festsetzung*.

- Objekt-Ebene: 2 von 3 X sind Y
  absolute Größe $q = 2$

relative Größe (bzw. Wahrscheinlichkeit) p = 2/3 = 0,66

- Mögliche *Verteilung*

Für „X ist Y“ steht ein +, für „X ist nicht Y“ steht ein –.
In der nachfolgenden Tabelle bedeutet konkret z. B.
X_1 +: X_1 ist Y X_1 –: X_1 ist nicht Y

	X_1	X_2	X_3
1.	+	+	+
2.	+	+	–
3.	+	–	+
4.	+	–	–
5.	–	+	+
6.	–	+	–
7.	–	–	+
8.	–	–	–

Wie man sieht, gibt es 8 mögliche Verteilungen. Und in 3 von den 8 Verteilungen gilt: 2 von 3 X sind Y. Nämlich in der 2. 3, und 5. Zeile.

Man kann auch sagen: Es gibt 8 *mögliche Welten*. Und in 3 von den 8 Welten sind 2 X von 3 X auch Y. Diesen Wert 3/8 kann man ‚Meta-Wahrscheinlichkeit' nennen.

- *Meta-Werte*

absolute Größe: q = 3
relative Größe (Wahrscheinlichkeit): $p^T = 3/8 = 0{,}375$
Auch bei den Meta-Werten ist die *relative Größe* entscheidend.
Man kann also formulieren: ‚Es gibt 3 von 8 Möglichkeiten, dass 2 von 3 X auch Y sind'.

Diese relative Meta-Größe nennt man meistens ‚*Wahrscheinlichkeit'*. Aber man muss eben unterscheiden zwischen der *Objekt-Wahrscheinlichkeit* und der *Meta-Wahrscheinlichkeit*.

Andere Begriffe dafür sind:

- *Objekt-Wahrscheinlichkeit*
  = Empirische Wahrscheinlichkeit = Basis-Wahrscheinlichkeit = Faktische Wahrscheinlichkeit = Real-Wahrscheinlichkeit = Statistische Wahrscheinlichkeit
- *Meta-Wahrscheinlichkeit*
  = Theoretische Wahrscheinlichkeit = Zufalls-Wahrscheinlichkeit.

Ich habe im bisherigen Text überwiegend nur die *Objekt-Wahrscheinlichkeit* (empirische Wahrscheinlichkeit) verwendet, und habe die mit ‘p’ bezeichnet. Das behalte ich auch so bei.

Dagegen verwende ich zur Kennzeichnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit den *Index* $_T$, schreibe diesen Index aber zur besseren Sichtbarkeit als *Hochzeichen*, also p^T bzw. $p^T[X]$, $p^T[X \rightarrow Y]$ usw. Zur besseren Unterscheidung verwende ich für die theoretische Wahrscheinlichkeit zusätzlich *eckige Klammern* [...]; allerdings habe ich eckige Klammern manchmal auch bei der empirischen Wahrscheinlichkeit aus Gründen der Übersichtlichkeit verwendet. Das Zeichen p^T kann ebenfalls stehen für den *Tautologie-Grad = relative Größe der Tautologie*, denn dieser Wert ist *quantitativ* identisch mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit.

Allgemein kann man also schreiben $p^T[\Psi] = s/m$. Oder mit Bezug auf die Objekt-Wahrscheinlichkeit: $p^T[p(\Phi) = r/n] = s/m$.

Jetzt kann man für unser Beispiel formulieren: ‚Die *Objekt-Wahrscheinlichkeit* für „X ist Y“ beträgt p = 2/3. Die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T für die Objekt-Wahrscheinlichkeit beträgt 3/8. Oder kombiniert: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass 2 von 3 X auch Y sind (Objekt-Wahrscheinlichkeit), beträgt $p^T = 3/8$'.

p^T gibt also an, welche Verteilung auf Grund der *Kombinatorik* wie wahrscheinlich ist, sie ist quasi umgesetzte Kombinatorik. *Je mehr Kombinationen* es für eine Verteilung gibt, *desto theoretisch wahrscheinlicher* ist sie. Dabei wird eben vorausgesetzt, dass die Variablen *unabhängig* sind, sich also *zufällig* – in jeder Weise – kombinieren können. Wenn sich feststellen lässt, dass die *realen* Werte sehr abweichen, dass z. B. eine seltene Kombination weit überdurchschnittlich häufig auftritt, dann ist das ein Hinweise darauf, dass die Variablen z. B. in *kausaler* Beziehung stehen oder in anderer Weise *abhängig* sind.

3-3-1-3 SYSTEMATISCHES BEISPIEL

Nehmen wir ein modifiziertes Beispiel. Greifen wir zurück auf: r von n X sind Y. Jetzt soll aber gelten: 3 X von 4 sind auch Y, somit p = 3/4.

Insgesamt erhalten wir eine Verteilung von 16 Möglichkeiten (vgl. unten). Hier ergeben sich folgende Werte: Jede Zeile (Welt) hat einen p^T-Wert von 1/16. Dass 3 X auch Y sind, gilt in 4 Zeilen, Nr. 2, 3, 5 und 9, also insgesamt $p^T = 4/16 = 1/4 = 0{,}25$

	X_1	X_2	X_3	X_4
1.	+	+	+	+
2.	+	+	+	–
3.	+	+	–	+
4.	+	+	–	–
5.	+	–	+	+
6.	+	–	+	–
7.	+	–	–	+
8.	+	–	–	–
9.	–	+	+	+
10.	–	+	+	–
11.	–	+	–	+
12.	–	+	–	–
13.	–	–	+	+
14.	–	–	+	–
15.	–	–	–	+
16.	–	–	–	–

Wir können diese 16 Möglichkeiten in folgender Weise ordnen:

Objekt-Wahrscheinlichkeit: p		*Meta-Wahrscheinlichkeit* p^T		
0 von 4 X sind auch Y:	0/4	1/16		
1 von 4 X sind auch Y:	1/4	4/16	2/8	1/4
2 von 4 X sind auch Y:	2/4	6/16	3/8	
3 von 4 X sind auch Y:	3/4	4/16	2/8	1/4
4 von 4 X sind auch Y:	4/4	1/16		
		16/16 = 1		

3-3-1-4 ARTEN VON WAHRSCHEINLICHKEITEN

Wir sind bisher nur von 2 Arten von Wahrscheinlichkeit ausgegangen: *empirische* und *theoretische* Wahrscheinlichkeit (bzw. Objekt- und Meta-Wahrscheinlichkeit). Jetzt möchte ich *wei-*

tere Arten von Wahrscheinlichkeiten unterscheiden. Dabei gehe ich von obiger Verteilung mit r = 3 und n = 4 aus, konkret davon, dass gilt: 3 von 4 X sind Y.

1. Wahrscheinlichkeit
- *empirische* Wahrscheinlichkeit: p = 3/4
- *theoretische* Wahrscheinlichkeit (der empirischen Wahrscheinlichkeit): $p^T = 4/16 = 2/8 = 1/4$

2. Erwartungs-Wahrscheinlichkeit
- *empirische Erwartungs*-Wahrscheinlichkeit: $p^E = 2/4$
  (das ist der empirische Wert, der die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit besitzt, also am ehesten zu erwarten ist, man nennt ihn auch ‚Zufallserwartung')
- *theoretische Erwartungs*-Wahrscheinlichkeit: $p^{TE} = 6/16 = 3/8$
  (das ist die theoretische Wahrscheinlichkeit der empirischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit)

3. Differenz-Wahrscheinlichkeit
- *empirische Differenz*-Wahrscheinlichkeit: $p^D = |p^E - p| = 1/4$
  Differenz zwischen der realen empirischen Wahrscheinlichkeit, hier: p = 3/4, und der empirischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit, hier: $p^E = 2/4$, also $p^D = |2/4 - 3/4| = 1/4$
- *theoretische Differenz*-Wahrscheinlichkeit: $p^{TD} = |p^{TE} - p^T| = 1/8$
  Differenz zwischen der theoretischen Wahrscheinlichkeit, hier $p^T = 2/8$, und der theoretischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit, hier $p^{TE} = 3/8$, also $p^{TD} = |2/8 - 3/8| = 1/8$

Die Differenz-Wahrscheinlichkeit dient dazu abzuschätzen, inwieweit eine Relation *zufällig* ist. Je weiter ein Wert von der *Erwartungs-Wahrscheinlichkeit* abweicht, also je größer die Differenz-Wahrscheinlichkeit ist, desto unwahrscheinlicher ist ein *Zufallsergebnis*. Sondern man wird an eine zugrunde liegende Ordnung, z. B. eine *Kausal-Beziehung* denken müssen.

3-3-1-5 BERECHNUNG

Bei den *qualitativen*, aussagen- oder quantoren-logischen Relationen war die *theoretische Wahrscheinlichkeit* folgendermaßen *berechnet* worden:

Gemäß der Wahrheitstafel *addiert* man die Anzahl der *Welten*, in denen die Relation positiv ist, kurz der *positiven Welten* (d. h. es steht ein + unter dem Relator).

Dann *dividiert* man diese Zahl durch die Anzahl *aller (möglichen) Welten*, bei 2 Relata X, Y also durch $2^2 = 4$.

Bei den *quantitativen* Relationen muss man modifiziert vorgehen:
- Berechnung der *empirischen* Wahrscheinlichkeit

Zunächst addiert man die *Fälle*, die in den *positiven Welten* der Relation vorkommen (vgl. Punkt 1-3-1-3), zum Beispiel a + c + d, und dividiert sie durch *alle Fälle* (in *allen Welten*), bei 2 Variablen: a + b + c + d. So erhält man die Formel für die *empirische* Wahrscheinlichkeit z. B. bei der Implikation X → Y:

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

- Berechnung der *theoretischen* Wahrscheinlichkeit

Dies geschieht nach einer *Binomial-Formel* (wie unten gezeigt werden wird).

.

Ich hatte als allgemeine quantitative Form einer *synthetischen* Relation angegeben:
$p(X\ R^S\ Y) = r/n$. Oder kürzer: $p(R) = r/n$
Die allgemeine Form der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T lautet dann:
$p^T[p(X\ R^S\ Y) = r/n] = s/m$ oder $p^T[p(X\ R^S\ Y) = r/n] = r^T/n^T$

3-3-2 Implikation

Als Berechnung der *empirischen* Wahrscheinlichkeit der Implikation hatte ich bestimmt:

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Die theoretische *Wahrscheinlichkeit* p^T berechnet sich nun nach folgender Formel der *Binomial-Verteilung*:

$$p^T[p(X \to Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$$

Das Symbol $\binom{n}{r}$ heißt *Binomial-Koeffizient* und wird gelesen als ‘n über r’.

$\binom{n}{r}$ steht für $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

n! (gelesen als ‘n Fakultät’) steht für: $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$

Der Wert 3/4 in der Formel erklärt sich folgendermaßen: $p^T(X \to Y) = 3/4$. Der Wert 3/4 ist die strukturelle *theoretische* Wahrscheinlichkeit von $X \to Y$ bzw. von $p(X \to Y) = 1/1$ (also bei $n = 1$), was man als *Basis* von $p(X \to Y) = r/n$ ansehen kann.
Dagegen ist der Wert 1/4 in der Formel der *Umkehrwert*: $1 - 3/4 = 1/4$. Man kann auch sagen, dass 1/4 die theoretische Wahrscheinlichkeit der *Negation* ist:
$p^T[\neg(X \to Y)] = 1/4$ bzw. $p^T[p(X \to Y) = 0/1] = 1/4$.

Ein Beispiel: $p(X \to Y) = r/n = 4/5 = 0{,}8$ also: $r = 4$, $n = 5$

$$p^T[p(X \to Y) = 4/5] = \binom{5}{4}(3/4)^4(1/4)^{5-4}$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{120}{24} = 5 \qquad (3/4)^4 = 81/265 \qquad (1/4)^1 = 1/4$$

Daraus folgt: $p^T[p(X \to Y) = 4/5] = 5 \times (81/256) \times 1/4 = 405/1024 = 0{,}40$

Lies: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass $p(X \to Y) = 4/5$, beträgt 405/1024’.

Genauer: ‚Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T, dass die *empirische* Wahrscheinlichkeit p von $X \rightarrow Y = 4/5$ ist, beträgt 405/1024'.

Da dieser Sachverhalt kompliziert ist, sei er noch einmal erläutert.
Für n = 5 seien die möglichen Werte von $p(X \rightarrow Y)$ und die resultierenden p^T-Werte genannt:

$p(X \rightarrow Y)$	$p^T[p(X \rightarrow Y)]$
5/5	243/1024 = 0,237 (jeweils auf 3 Stellen gerundet)
4/5	405/1024 = 0,396
3/5	270/1024 = 0,264
2/5	90/1024 = 0,088
1/5	15/1024 = 0,015
0/5	1/1024 = 0,001
	1024/1024 = 1

D. h. wenn man sich die Frage stellt: ‚Welchen Wert hat $p(X \rightarrow Y)$ am wahrscheinlichsten (bei n = 5)?' Dann kann man antworten: ‚Am wahrscheinlichsten ist $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, denn dafür besteht die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit, nämlich $p^T = 405/1024 = 0,396$'.

Man muss dabei unterscheiden:

1. Die Struktur $X \rightarrow Y$ hat (wie erläutert) grundsätzlich den Wert $p^T = 3/4 = 0,75$. ist somit zu 3/4 tautologisch (*struktureller Wert von p^T*).
2. Für quantitative Ausprägungen von $X \rightarrow Y$ ergeben sich jeweils unterschiedliche Werte von p^T (*quantitativer Wert von p^T*).

Wie man sieht, erreicht aber bei dieser Verteilung von n = 5 kein einziger Objekt-Wert einen Tautologie-Grad von auch nur 0,5. Somit sind alle Werte *unwahrscheinlich*, denn „unwahrscheinlich" wird ja so definiert: $p^T < 0,5$. Den empirischen Wert mit der höchsten p^T kann man wie gesagt auch ‚*Zufallserwartung*' nennen. Im obigen Beispiel ist also $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ die Zufallserwartung.

3-3-3 Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation berechnet man die *empirische* Wahrscheinlichkeit p wie folgt:

$$p(X \ast\!\rightarrow Y) = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$$

Dann berechnet sich die *theoretische* Wahrscheinlichkeit wie folgendermaßen:

$$p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$$

$$\text{Beispiel: } p(X \ast\!\rightarrow Y) = \frac{6}{6+3} = \frac{6}{9}$$

$$p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) = 6/9] = \binom{9}{6}(1/2)^6(1/2)^3 = 84 \times (1/64) \times 1/8 = 84/512 = 0,16$$

Die Beziehungen zwischen der theoretischen Wahrscheinlichkeit von *Implikation* und *Positiv-Implikation* sind komplex, je nach den eingesetzten Werten kann $p^T[p(X *\rightarrow Y)$ größer oder kleiner sein als $p^T[p(X \rightarrow Y)$.

3-3-4 Systematik

Die *Relatoren* (bzw. Junktoren) unterscheiden sich generell in der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit danach, wie viele + (bzw. wie viele −) in der Wahrheitstafel unter dem Relator stehen. Anders gesagt, in wie vielen Welten die Relation als gültig (belegt) gilt.

- Relatoren mit 3+ (in 3 von 4 Welten gültig): $X\ R^{3+}\ Y$ oder $R^{3+}(X, Y)$
  $X \vee Y$, $X \leftarrow Y$, $X \mid Y$. Hier erfolgt die Berechnung wie bei $X \rightarrow Y$.

$$p^T[p(X\ R^{3+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \vee Y) = 4/5] = 405/1024 = 0{,}396$

- Relatoren mit 2+ (in 2 von 4 Welten positiv) : $X\ R^{2+}\ Y$
  $X \leftrightarrow Y$, $X >< Y$, aber auch $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$

$$p^T[p(X\ R^{2+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(2/4)^r(2/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 4/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}156$

Anstatt der Quotienten 3/4 und 1/4 stehen hier also zweimal 2/4. Anstatt 2/4 könnte man natürlich auch 1/2 einsetzen, aber wegen der *Parallelität* der Formeln ziehe ich 2/4 vor.
Die theoretische Wahrscheinlichkeit dieser Relatoren ist somit gleich der *Positiv-Implikation*, es gilt z. B.: $p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X *\rightarrow Y]$ bzw. quantitativ:
$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = r/n] = p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n]$

- Relatoren mit 1+ (in 1 von 4 Welten positiv): $X\ R^{1+}\ Y$
  $X \wedge Y$, $X \nabla Y$, $X -< Y$, $X >- Y$

$$p^T[p(X\ R^{1+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \wedge Y) = 4/5] = 15/1024 = 0{,}015$

Hier werden die *Quotienten* 1/4 und 3/4 im Vergleich zur ersten Gleichung *vertauscht*, es ergeben sich die gleichen Zahlenwerte, aber quasi vertauscht.

Noch eine Anmerkung:
$p^T[p(X) = r/n *\rightarrow p(Y) = s/n] = p^T[p(Y) = s/n]$, weil p(X) und p(Y) eben völlig *unabhängig* voneinander sind. Daher kann man nach der Formel für p(X) oder p(Y) berechnen:

$p^T[p(X) = r/n \; {*}{\rightarrow} \; p(Y) = s/n] \; = \binom{n}{r}(2/4)^s(2/4)^{n-s}$

3-3-5 Erweiterungen

Man kann eine *logische Bestimmung der Korrelation* aufbauen.

Die Korrelation zeigt den *Zusammenhang* zwischen Faktoren bzw. Variablen an. Es gibt verschiedene *Korrelations-Koeffizienten* in der *Statistik*. Aber es lässt sich auch direkt aus der Logik eine Bestimmung der Korrelation aufbauen, basierend auf:

der logischen *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y$.

Dabei ist zu bedenken, dass gilt: $X \leftrightarrow Y \;\Leftrightarrow\; \neg X \leftrightarrow \neg Y$.

In der *quantitativen Logik* bietet sich natürlich an, den quantitativen Ausdruck zu verwenden. Dabei gilt:

$p(X \leftrightarrow Y) = p(\neg X \leftrightarrow \neg Y)$

Die Korrelation wird aber nicht, wie die *Wahrscheinlichkeit*, mit Werten zwischen 1 und 0 angegeben. Sondern die Korrelation wird immer mit Werten zwischen +1 und –1 angegeben, wobei gilt:

k = +1 totale Korrelation (positive Abhängigkeit)
k = –1 totaler Gegensatz (negative Abhängigkeit)
k = 0 Unabhängigkeit

Aus diesen Überlegungen habe ich folgende Formel entwickelt:

Korrelation(X,Y) = $2[p(X \leftrightarrow Y)] - 1$ bzw. kurz: $k(X,Y) = 2[p(X \leftrightarrow Y)] - 1$

Dazu zwei Beispiele :
$p(X \leftrightarrow Y) = 3/4$. Dann gilt: $k(X,Y) = 2 \text{ x } (3/4) - 1 = 6/4 - 1 = 6/4 - 4/4 = 2/4 = 0{,}5$
$p(X \leftrightarrow Y) = 1$ Dann gilt: $k(X,Y) = (2 \text{ x } 1) - 1 = 2 - 1 = 1$

Man kann die Korrelation auch in *modifizierter* Weise bestimmen, indem man $p(X \leftrightarrow \neg Y)$ mit einbezieht. Dann ergibt sich:

$k(X,Y) = p(X \leftrightarrow Y) - p(X \leftrightarrow \neg Y)$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass gilt: $p(X \leftrightarrow \neg Y) = 1 - p(X \leftrightarrow Y)$

Auch hierzu die zwei Beispiele:
$p(X \leftrightarrow Y) = 3/4$. Dann gilt: $k(X,Y) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = 0{,}5$
$p(X \leftrightarrow Y) = 1$ Dann gilt: $k(X,Y) = 1 - 0 = 1$
Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten Werte:

k(X,Y)	$p(X \leftrightarrow Y)$	$p(X \leftrightarrow \neg Y)$
1	1	0
0,5	0,75	0,25
0	0,5	0,5
- 0,5	0,25	0,75
-1	0	1

Man kann auch für die Korrelation die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T angeben. Dabei sei daran erinnert, dass dazu die *absoluten* Größen bekannt sein müssen.
Ich nehme als Beispiele n = 4 und n = 8.

• n = 4

k(X,Y)	p(X ↔ Y)	p(X ↔ Y)	p^T	p^T (dezimal)
1	1	4/4	1/16	0,06
0,5	0,75	3/4	4/16	0,25
0	0,5	2/4	6/16	0,38
- 0,5	0,25	1/4	4/16	0,25
-1	0	0/4	1/16	0,06

• n = 8

k(X,Y)	p(X ↔ Y)	p(X ↔ Y)	p^T	p^T (dezimal)
1	1	8/8	1/256	≈ 0,00
0,5	0,75	6/8	28/256	0,11
0	0,5	4/8	70/256	0,27
- 0,5	0,25	2/8	28/256	0,11
- 1	0	0/8	1/256	≈ 0,00

Bei n = 8 addieren sich die angegeben Werte von p^T nicht zu 1, weil die Werte p = 7/8, p = 5/8, p = 3/8 und p = 1/8 aus Gründen der Vereinfachung nicht in die Rechnung einbezogen wurden.

Man sieht z. B.:

Bei n = 4: $p^T[k(X,Y) = 0] = 0{,}38$

Bei n = 8: $p^T[k(X,Y) = 0] = 0{,}27$

3 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

3-4-1 Einführung

In der *Aussagen-Logik* kommen wie schon mehrfach erläutert nur 2 Werte vor:

- *bejaht* bzw. *positiv* = *ja* (ohne Markierung), z. B. $X \wedge Y$
- *negiert* bzw. *negativ* = *nein* (mit dem Negator $\neg$ als Markierung), z. B. $\neg(X \wedge Y)$.

Da die Aussagen-Logik eben *qualitativ* ist, werden diesen beiden Werten keine Zahlenwerte zugewiesen, aber *implizit* enthalten „ja" und „nein" doch genaue quantitative, numerische Bestimmungen.

Diese aufzuweisen, ist eine Funktion der *quantitativen* bzw. *quantifizierten Aussagen-Logik*.
Als Quantifizierung von aussagen-logischen Relationen war bestimmt worden:

- positiv: $X\ R\ Y =_{df} p(X\ R\ Y) = 1$
- negativ: $X \neg R\ Y =_{df} p(X\ R\ Y) = 0$ oder $\neg(X\ R\ Y) =_{df} p(X\ R\ Y) = 0$

Man kann p = 1 auch als *deterministisch positiv* und p = 0 als *deterministisch negativ* (kurz „nullistisch") kennzeichnen.

Am Beispiel der *Konjunktion*

- positiv: $X \wedge Y =_{df} p(X \wedge Y) = 1$
- negativ: $\neg(X \wedge Y) =_{df} p(X \wedge Y) = 0$

Hier geht es nun darum, den Werten der *empirischen* Wahrscheinlichkeit von p = 1 oder p = 0 die entsprechende *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen.

3-4-2 Implikation

• *Positiver Fall*
$p(X \rightarrow Y) = r/n = 1$
Hier gilt: r = n. Somit gilt: n – r = 0

Für die Formel $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$ bedeutet das:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^0 = 1 \times (3/4)^r \times 1 = (3/4)^r$$

Da r = n, gilt auch: $(3/4)^r = (3/4)^n$

Beispiel: $p(X \rightarrow Y) = 5/5$

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 5/5] = \binom{5}{5}(3/4)^5(1/4)^{5-5} = 1 \times 243/1024 \times 1 = 243/1024 = 0,24$$

Quantoren-logisch gesehen wird hier also die allgemeine Formel zur Berechnung des p^T-Wertes eines *All-Satzes* entwickelt und dargeboten, während vorher eher eine beispiel-orientierte Herleitung vollzogen wurde. Zur *quantitativen Quantoren-Logik* und deren Meta-Werten kommen wir aber in 3-5.

$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n]$ fällt mit steigendem n, geht gegen 0. Das lässt sich an $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1]$ besonders gut verdeutlichen.

Zur Veranschaulichung die Werte von n = 1 bis n = 8.

$p(X \rightarrow Y)$	$p^T[p(X \rightarrow Y)]$		
1/1	3/4	= 0,75	(jeweils auf 2 Stellen gerundet)
2/2	9/16	= 0,56	
3/3	27/64	= 0,42	
4/4	81/256	= 0,32	
5/5	243/1024	= 0,24	
6/6	729/4096	= 0,18	
7/7	2187/16385	= 0,13	
8/8	6561/65536	= 0,10	

• *Negativer Fall*

$p(X \rightarrow Y) = r/n = 0$

Hier gilt: r = 0, somit: n – r = n

Gemäß der Formel $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$ ergibt sich dann:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n = 0] = \binom{n}{0}(3/4)^0(1/4)^n = 1 \times 1 \times 1/4^n = 1/4^n$$

Auch diese Werte stimmen mit denen überein, die wir bei der quantoren-logischen Analyse herausgefunden haben (vgl. 3-2-2-2).

3-4-3 Positiv-Implikation

• *Positiver Fall*

Für $p(X *\rightarrow Y) = r/n = 1$ gilt: r = n

Dann ergibt sich:

$$p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r} = 1 \times (1/2)^r \times 1 = (1/2)^r$$

Da: r = n, gilt: $(1/2)^r = (1/2)^n$

Beispiel: $p^T[p(X *\!\!\rightarrow Y) = 7/7] = 1/128 = 0{,}01$

• *Negativer Fall*
Für $p(X *\!\!\rightarrow Y) = r/n = 0$ gilt: $r = 0$

Dann ergibt sich:

$$p^T[p(X *\!\!\rightarrow Y) = r/n = 0] = \binom{n}{r}(1/2)^r (1/2)^{n-r} = 1 \times 1 \times (1/2)^n = (1/2)^n$$

3-4-4 Systematik

Ich beschränke mich hier jeweils auf *positive* Fälle (p = 1).
Dabei gilt: r = n, somit: n – r = 0.

• Relatoren mit 3+ (in 3 von 4 Welten gültig)

$X \vee Y$, $X \leftarrow Y$, $X \mid Y$. Hier erfolgt die Berechnung wie bei $X \rightarrow Y$, z. B. für $X \leftarrow Y$:

$$p^T[p(X \leftarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(3/4)^r (1/4)^{n-r} = 1 \times (3/4)^r \times 1 = (3/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftarrow Y) = 5/5] = 243/1024 = 0{,}24$

• Relatoren mit 2+ (in 2 von 4 Welten positiv)

$X \leftrightarrow Y$, $X >< Y$, aber auch $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$. Z. B. für $X \leftrightarrow Y$:

$$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(2/4)^r (2/4)^{n-r} = 1 \times (2/4)^r \times 1 = (2/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 5/5] = 32/1024 = 1/32 = 0{,}03$

• Relatoren mit 1+ (in 1 von 4 Welten positiv)

$X \wedge Y$, $X \nabla Y$, $X -\!\!< Y$, $X >\!\!- Y$, z. B. $X \wedge Y$

$$p^T[p(X \wedge Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/4)^r (3/4)^{n-r} = 1 \times (1/4)^r \times 1 = (1/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \wedge Y) = 5/5] = 1/1024 \approx 0{,}00$

3-4-5 Erweiterungen

Wir sind bisher von *2* Variablen, X und Y ausgegangen. Ich möchte jetzt ein Beispiel mit 3 Variablen bringen: aussagen-logisch $X \wedge Y \wedge Z$, Wahrheitsverlauf: + – – – – – – –
Quantifiziert ergibt sich: $p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n$

Gemäß der Formel $p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n] = \binom{n}{r}(1/8)^r(7/8)^{n-r}$ ergibt sich:

• *positiv* (p = 1): zur Erinnerung: r = n, n – r = 0

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/8)^r(7/8)^0 = 1 \times (1/8)^r \times 1 = (1/8)^r$$

Beispiel:

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = 5/5] = \binom{5}{5}(1/8)^5(7/8)^{5-5} = 1 \times (1/8)^5 \times 1 = (1/8)^5 = 1/32768 \approx 1$$

• *negativ* (p = 0): zur Erinnerung: r = 0, n – r = n

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n = 0] = \binom{n}{0}(1/8)^0(7/8)^n = 1 \times 1 \times (7/8)^n = (7/8)^n$$

Beispiel:

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = 0/5] =$$

$$\binom{5}{0}(1/8)^0(7/8)^5 =$$

$$1 \times 1 \times (7/8)^5 = (7/8)^5 =$$

$$16807/32768 = 0{,}51$$

3 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

3-5-1 Einführung

In der quantitativen Quantoren-Logik hatte ich den *Quantoren* folgende *empirische Wahrscheinlichkeiten* p zugeordnet:

Alle:	$p = 1$
Alle nicht:	$p = 0$
Einige:	$p > 0$
Einige nicht:	$p < 1$

Es geht jetzt darum, diesen *empirischen Wahrscheinlichkeiten* p jeweils die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T zuzuordnen.

3-5-2 Implikation

Bei der Verwendung der Implikation $X \rightarrow Y$ ergeben sich vor allem folgende 4 Relationen:

Alle	$p(X \rightarrow Y) = 1$
Alle nicht	$p(X \rightarrow Y) = 0$
Einige	$p(X \rightarrow Y) > 0$
Einige nicht	$p(X \rightarrow Y) > 1$

Die Formeln für „alle“ und „alle nicht“ wurden schon behandelt, weil sie *aussagenlogischen* Strukturen entsprechen.

- alle: $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n = 1] = (3/4)^n$ bzw. $(3/4)^r$
- alle nicht: $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n = 0] = (1/4)^n$

Daraus sollen jetzt die Werte für „einige“ und „einige nicht“ hergeleitet werden.

- *einige*: $p(X \rightarrow Y) > 0$

Wie beschrieben gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = 1/4^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1 - (1/4)^n = (4^n - 1)/ 4^n$
Denn es muss ja gelten: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] + p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$.
Und: $(1/4)^n + (4^n - 1)/4^n = 1$

Dazu muss man sich klarmachen: Wenn $p > 0$, dann werden ja alle Werte außer 0 erfasst. 0 und > 0 bilden also eine *vollständige Disjunktion*, einen *kontradiktorischen* Gegensatz. Und die Wahrscheinlichkeiten einer vollständigen Disjunktion addieren sich zu p = 1.

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{1^n}{4^n} + \frac{4^n - 1^n}{4^n} = \frac{1^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} - \frac{1^n}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} = 1$

• *einige nicht*: $p(X \rightarrow Y) < 1$
Wie beschrieben, gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1] = (3/4)^n$.
Daher: $p^T[p(X \rightarrow Y) < 1] = 1 - (3/4)^n = (4^n - 3^n)/4^n$.
Denn es muss gelten: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1] + p^T[p(X \rightarrow Y) < 1] = 1$.
Weil wiederum gilt: p = 1 und p < 1 bilden einen *kontradiktorischen* Gegensatz.
Und $(3/4)^n + (4^n - 3^n)/4^n = 1$.

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n - 3^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} = 1$

Es sei daran erinnert, dass folgende *Rechenregeln* gelten:
$(3/4)^n = 3^n/4^n$
$(1/4)^n = 1^n/4^n = 1/4^n$

Beispiel: für n = 5 (alle = 5/5, einige nicht < 5/5)

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 5/5] = (3/4)^5 = 243/1024 = 0{,}24$. Daraus folgt:

$p^T[p(X \rightarrow Y) < 5/5] = (4^5 - 3^5)/4^5 = (1024 - 243)/1024 = 781/1024 = 0{,}76$

Die erste Formel besagt also: Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass *alle* X auch Y sind, beträgt (bei n = alle = 5) 0,24.

Die zweite Formel besagt: Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass *nicht alle* X auch Y sind (also *einige* X *nicht* Y sind), beträgt (bei n = alle = 5) 0,76. Und 0,24 + 0,76 = 1.

3-5-3 Positiv-Implikation

Bei der Verwendung der Positiv-Implikation $X *\rightarrow Y$ ergeben sich vor allem folgende 4 Relationen:

Alle	$p(X *\rightarrow Y) = 1$
Alle nicht	$p(X *\rightarrow Y) = 0$
Einige	$p(X *\rightarrow Y) > 0$
Einige nicht	$p(X *\rightarrow Y) > 1$

Die Formeln für „alle" und „alle nicht" wurden schon behandelt, weil sie *aussagenlogischen* Strukturen entsprechen.

• alle: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 1] = (1/2)^n$
• alle nicht: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 0] = (1/2)^n$

Es gilt also: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = 1] = p^T[p(X *\rightarrow Y) = 0] = (1/2)^n$

Daraus sollen jetzt die Werte für „einige" und „einige nicht" hergeleitet werden.

• *einige*: $p(X *\rightarrow Y) > 0$
Wie beschrieben gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = 1/2^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1 - (1/2)^n = (2^n - 1)/ 2^n$
Denn es muss ja gelten: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = 0] + p^T[p(X *\rightarrow Y) > 0] = 1$.
Und: $(1/2)^n + (2^n - 1)/2^n = 1$

Besser verständlich, wenn wie folgt geschrieben: $\frac{1}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n}{2^n}=1$

• *einige nicht*: p(X *→ Y) < 1
Wie beschrieben, gilt: p^T[p(X *→ Y) = 1] = $(1/2)^n$.
Daher: p^T[p(X *→ Y) < 1] = 1 – $(1/2)^n$ = $(2^n – 1)/2^n$.
Denn es muss gelten: p^T[p(X *→ Y) = 1] + p^T[p(X *→ Y) < 1] = 1.
Weil wiederum gilt: p = 1 und p < 1 bilden einen kontradiktorischen Gegensatz.
Und: $(1/2)^n + (2^n –1)/2^n = 1$

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{1}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n}=1$ (vgl. auch oben)

Es zeigt sich also: p^T[p(X *→ Y) > 0] = p^T[p(X *→ Y) < 1]
Und ebenso gilt: p^T[p(X *→ Y) = 0] = p^T[p(X *→ Y) = 1]

Diese Verhältnisse bei der *Positiv-Implikation* weichen stark von den Verhältnissen bei der *normalen* Implikation ab.

3-5-4 Systematik

Wir hatten auf verschiedenen Ebenen 5 unterschiedliche Modelle von All-Sätzen (All-Relationen) und Partikulär-Sätzen (Partikulär-Relationen) vorgestellt und diskutiert. Hier sollen jetzt für die quantitativen Relationen die theoretischen Wahrscheinlichkeiten p^T angegeben werden:

• MODELL 1: IMPLIKATION

			p^T
1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → Gx) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=0$	$(1/4)^n$
3. einige F sind G	p(Fx → Gx) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}>0$	$(4^n – 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx → Gx) < 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}<1$	$(4^n – 3^n)/4^n$

• MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) = 1	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}=1$	$(3/4)^n$

3. einige F sind G	p(Fx → Gx) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) > 0	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 1)/4^n$

• MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	p(Fx ∧ Gx) = 1	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$	$(1/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx ∧ ¬Gx) = 1	$\frac{b}{a+b+c+d} = 1$	$(1/4)^n$
3. einige F sind G	p(Fx ∧ Gx) > 0	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx ∧ ¬Gx) > 0	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$

• MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) = 1	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
3. einige F sind G	p(Fx ∧ Gx) > 0	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx ∧ ¬Gx) > 0	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$

• MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx *→ Gx) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$	$(1/2)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx *→ Gx) = 0	$\frac{a}{a+b} = 0$	$(1/2)^n$
3. einige F sind G	p(Fx *→ Gx) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx *→ Gx) < 1	$\frac{a}{a+b} < 1$	$(2^n - 1)/2^n$

3-5-5 Erweiterungen

1) *Inklusives und exklusives „einige" in unterschiedlicher Formalisierung*

• *mindestens* einige F sind G		p^T
$\mathrm{Vx}(Fx \to Gx)$	$p(Fx \to Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
$\mathrm{Vx}(Fx \wedge Gx)$	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
$\mathrm{Vx}(Fx \mathbin{*\!\!\to} Gx)$	$p(Fx \mathbin{*\!\!\to} Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$

• *genau* einige F sind G		
$\exists x(Fx \to G)$	$0 < p(Fx \to G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx \wedge G)$	$0 < p(Fx \wedge G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx \mathbin{*\!\!\to} G)$	$0 < p(Fx \mathbin{*\!\!\to} G) < 1$	$(2^n - 2)/2^n$

Für „*genau* einige F sind *nicht* G" gelten dieselben Zahlen.

2) *Verhältnis von theoretischer Wahrscheinlichkeit und Informationsgehalt:*

	Theoret. Wahrsch. p^T	Informationsgehalt p^I
• $\Lambda(X \to Y)$ $p(X \to Y) = 1$	$(3/4)^n$	$1 - (3/4)^n = (4^n - 3^n)/4^n$
• $\Lambda\neg(X \to Y)$ $p(X \to Y) = 0$	$(1/4)^n$	$1 - (1/4)^n = (4^n - 1)/4^n$
• $\mathrm{V}(X \to Y)$ $p(X \to Y) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$	$1 - (4^n - 1)/4^n = (1/4)^n$
• $\mathrm{V}\neg(X \to Y)$ $p(X \to Y) < 1$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - (4^n - 3^n)/4^n = (3/4)^n$

Zur Erläuterung:

$$1-\frac{3^n}{4^n}=\frac{4^n}{4^n}-\frac{3^n}{4^n}=\frac{4^n-3^n}{4^n} \qquad 1-\frac{1}{4^n}=\frac{4^n}{4^n}-\frac{1}{4^n}=\frac{4^n-1}{4^n}$$

$$1-(\frac{4^n-1}{4^n})=\frac{4^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^n} \qquad 1-(\frac{4^n-3^n}{4^n})=\frac{4^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}=\frac{3^n}{4^n}$$

Somit gilt also:

$$p^T[p(X \to Y) = 1] = p^I[p(X \to Y) < 1] \qquad p^T[p(X \to Y) = 0] = p^I[p(X \to Y) > 0]$$

$$p^T[p(X \to Y) > 0] = p^I[p(X \to Y) = 0] \qquad p^T[p(X \to Y) < 1] = p^I[p(X \to Y) = 1]$$