4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

4-1 Aussagen-Logik

Hier wird noch einmal das wichtige Thema der *Abgrenzung von synthetischen und analytischen Relationen* aufgegriffen. Diese Abgrenzung wird, am Fall der Implikation, unter verschiedenen Aspekten diskutiert und – durch die neue Heranziehung der *theoretischen Meta-Wahrscheinlichkeit* – weiter präzisiert.

4-2 Quantoren-Logik

Es werden Formeln zur Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit und damit des logischen Ableitungsgrades von *quantoren-logischen Schlüssen* dargestellt. Zur Untermauerung und Veranschaulichung werden diese Formeln immer wieder durch *Wahrheitstafeln* ergänzt.

4-3 Quantitative Logik

Dieser Punkt ist womöglich der schwierigste in dem ganzen Text. Es werden verschiedene *Formeln* zur Berechnung (des Folgegrades) *quantitativer Schlüsse* unterschiedlicher logischer Struktur vorgestellt. Dabei konzentriere ich mich in erster Linie auf die *Positiv-Implikation*. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Unterscheidung zwischen empirischer und logischer Abhängigkeit.

4-4 Quantitative Aussagen-Logik

Hier werden die Formeln aus 4-3 auf *deterministische* Schlüsse (mit $p = 1$ oder $p = 0$) angewandt. Auch dabei wird die *Positiv-Implikation* wieder gegenüber der *Normal-Implikation* bevorzugt, weil die quantitativen Schlüsse mit der Positiv-Implikation nicht zu solchen Paradoxien führen wie bei der Normal-Implikation.

4-5 Quantitative Quantoren-Logik

Im Rückgriff auf 4-2 wird der Grad der Folgerichtigkeit für quantoren-logische Schlüsse angegeben, bei denen der Quantor *numerisch präzisiert* ist. Es geht also um Schlüsse mit $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$ und $p > 0$.

Im Kapitel 3 wurde die *Meta-Logik* für *synthetische* Relationen dargelegt. Dabei definierte ich Meta-Logik primär über *Meta-Werte*, insbesondere über die *theoretische Wahrscheinlichkeit*, die man als *Meta-Wahrscheinlichkeit* verstehen kann.

Diese *theoretische Wahrscheinlichkeit* gibt bei *synthetischen* Relationen an:
– einerseits den *Grad der Tautologie*
– andererseits die Größe oder Sicherheit der *empirischen Abhängigkeit* (Korrelation)

In diesem Kapitel 4 wird nun gleichermaßen die Bedeutung der *Meta-Wahrscheinlichkeit* für *semi-analytische* und *analytische* Relationen, vor allem logische *Schlüsse*, dargelegt; es wird sich zeigen, dass die Meta-Wahrscheinlichkeit hier grundsätzlich die gleichen Funktionen besitzt; sie gibt an:

– den *Grad der Tautologie* (oder Kontradiktion) der Relation
  Vor allem geht es darum, wie die Meta-Wahrscheinlichkeit den Grad einer *logischen Folge* $\Phi \Rightarrow \Psi$ bzw. $\Phi \longrightarrow \Psi$ anzeigt
– den Grad der logischen bzw. *analytischen Abhängigkeit* zwischen den Komponenten der Relation

Allerdings besteht hier folgender Unterschied: Bei einer *synthetischen* Relation sind die Relata (bzw. die Variablen) *logisch* von einander *unabhängig*. Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad der *synthetischen Abhängigkeit* an.

Bei einer *(semi-)analytischen* Relation sind die Relata teilweise oder vollständig *logisch* voneinander *abhängig*. Und die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad dieser *logischen* (bzw. analytischen) *Abhängigkeit* an.

Vor allem in diesem Kapitel 4 werden viele, von mir entwickelte *logisch-mathematische Formeln* zur Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T vorgestellt. In erster Linie geht um die Berechnung der p^T von Schlüssen, womit der *Grad der Folgerichtigkeit* eines Schlusses angegeben wird. Diese Formeln wurden sorgfältig entwickelt und geprüft, aber es hätte den Rahmen der Arbeit gesprengt, strenge Beweisverfahren für jede Formel vorzulegen. Insofern ist es auch nicht auszuschließen, dass manche Formeln Mängel besitzen.

Ich würde es daher begrüßen, wenn Leser, Logiker oder Mathematiker, meine Arbeit fortführen würden, indem sie die Formeln analysieren und (soweit möglich) beweisen. Oder weitere Formeln ausarbeiten, denn gerade für Schlüsse mit der *normalen* Implikation fehlen noch wichtige Allgemein-Formeln. Dagegen dürften für die *Positiv*-Implikation die wichtigsten Formeln bereits von mir gefunden sein.

4 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

4-1-0 Einführung

4-1-0-1 DEFINITIONEN
Es wurde bereits genau unterschieden zwischen:

- *analytischen*
- *synthetischen*
- *partiell analytischen*

Relationen bzw. Strukturen oder Sätzen bzw. Aussagen.

Jetzt soll diese wesentliche Unterscheidung noch weiter präzisiert und quantifiziert werden. Warum ich von vielen, lange geprüften Unterscheidungen gerade diese 3-Teilung hier vorziehe, wurde schon in 2-1-0-2 erläutert.

Zunächst fasse ich noch einmal zentrale bisherige Bestimmungen zusammen:

• *analytische Relationen bzw. Strukturen*
Bei diesen Strukturen gilt: „Eine Struktur Φ wird als (partiell) analytisch in Relation zu einer Struktur Ω bestimmt".

In der *klassischen Philosophie* galt als analytisch: Das *Prädikat* ist im *Subjekt* bereits *enthalten*, z. B. „alle Junggesellen sind unverheiratet". Solche sprachlichen, *material-analytischen* Bestimmungen (vgl. Kapitel 0) werden hier aber beiseite gelassen.

Doch man kann entsprechend bestimmen, z. B. bei einer Folge: *Die Konklusion ist in der Prämisse (bzw. den Prämissen) bereits enthalten.* Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Y ist ja Bestandteil von $X \wedge Y$. Wenn also die Prämissen $X \wedge Y$ wahr sind, kann man durch *Analyse* der Prämissen bereits die Wahrheit der Konklusion Y beweisen, ohne empirische Prüfung von Y.

Syntaktisch zeigt sich das dadurch, dass *rechts* und *links* vom Relator (z. B. $\Rightarrow$) wenigstens partiell die *gleichen* deskriptiven Zeichen stehen; so steht bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ das Y rechts und links vom Relator $\Rightarrow$.

Logische Folgen $\Rightarrow$ sind die wichtigsten analytischen Strukturen, aber man kann Analyzität für alle Junktoren definieren.

Genauer kann man bei den analytischen Strukturen unterscheiden zwischen *tautologisch* und *kontradiktorisch*.

• *synthetische Strukturen*
Hier ist keine *logische* Abhängigkeit vorgegeben, allerdings kann eine empirische Abhängigkeit ausgedrückt werden. Z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$: Bei ihr ist Y in keiner Weise schon (logisch) in X enthalten.

Auch *syntaktisch* gilt: Es stehen rechts und links vom Relator nur unterschiedliche Objekt-Zeichen (vgl. $X \rightarrow Y$).

Andererseits ist $X \rightarrow Y$ in der Wahrheits-Tafel so definiert, dass es in 3 von 4 möglichen Welten wahr ist. Man kann also allein durch Kenntnis von $X \rightarrow Y$ konstatieren, dass der Satz mit einer theoretischen Wahrscheinlichkeit von $p^T = 3/4$ wahr ist, ohne Kenntnis der Wahrheit von X und Y.

Daher kann man $X \rightarrow Y$ auch als *partiell tautologisch* bezeichnen. Es mag ungewöhnlich scheinen, auch *synthetische* Strukturen als *partiell tautologisch* darzustellen, aber nach langen Abwägungen verschiedener Modelle scheint mir das die beste Lösung.

Eventuell könnte man *synthetische*, *partiell-tautologische* Relationen im Sinne der *synthetisch-apriorischen* Aussagen von Kant verstehen.

Ob synthetische Strukturen auch *vollständig* tautologisch oder vollständig widersprüchlich sein können, ist diskutabel, aber ich halte es letztlich für falsch bzw. nicht sinnvoll – solche synthetischen *streng* tautologischen Relationen würden natürlich noch exakter zum synthetisch-apriorischen Modell passen; dies wird an späterer Stelle weiter diskutiert.

• *semi-analytische Relationen*

Problematisch einzuordnen sind vor allem die Strukturen, die ich *partiell analytisch* oder *semi-analytisch* genannt habe.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Strukturen einzuordnen
- als eigene (dritte) Kategorie
- bei den analytischen Strukturen
- bei den synthetischen Strukturen, denn man kann *partiell analytische* Strukturen genauso gut *partiell synthetisch* nennen.

Ich werde die semi-analytischen Relationen vorwiegend bei den *analytischen* Strukturen behandeln.

4-1-0-2 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Als neues Kriterium zur Bestimmung analytischer Relationen verwenden wir jetzt die *theoretische Wahrscheinlichkeit*. Entscheidend ist, dass zur näheren Kennzeichnung *sowohl von analytischen wie synthetischen* Strukturen auf die *theoretische Wahrscheinlichkeit* zurückgegriffen werden kann. Diese gibt an, wie wahrscheinlich eine Struktur ist, allein auf Grund der möglichen Kombinationen (bzw. der möglichen, logischen Welten oder der numerischen Fälle in den logischen Welten).

Ich schreibe die *theoretische* Wahrscheinlichkeit (wie schon eingeführt) ‚p^T', sie nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, ebenso wie auch die empirische Wahrscheinlichkeit p.

Man unterscheidet in *Wahrscheinlichkeits*- oder *Modal*-Begriffen:

$p^T = 1$	sicher	notwendig
$p^T = 0$	sicher nicht	unmöglich
$0 < p^T < 1$	(genau) unsicher	(genau) möglich

(„unsicher" reicht von wahrscheinlich bis unwahrscheinlich)

Diese theoretische Wahrscheinlichkeit können wir zugleich als Gradmesser nehmen für die *theoretische Wahrheit*, nämlich die *Tautologie*, deren Werte sind also identisch:

Tautologischer Grad (auch als p^T abzukürzen oder ggf. als w^T für theoretische Wahrheit)

$p^T = 1$	tautologisch
$p^T = 0$	kontradiktorisch
$0 < p^T < 1$	partiell tautologisch

Man könnte allerdings auch umgekehrt einen *Grad der Kontradiktion* p^K einführen. Dessen Werte verhielten sich umgekehrt zu p^T, so dass z. B. die Tautologie einen Kontradiktions-Grad von $p^K = 0$ besitzt. Dessen Werte entsprechen dem *Informations-Grad*.

Beispiele sind:

Tautologie, z. B.: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch, z. B.: $p^T[X \longrightarrow X \wedge Y] = 3/4 = 0{,}75$
$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \wedge Y)] = 2/4 = 0{,}5$
$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] = 1/4 = 0{,}25$

Kontradiktion, z. B.: $p^T[(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)] = 0/4 = 0$

Hier ist grundsätzlich noch anzumerken: Relatoren sind *synthetisch* definiert, z. B. der Implikator $\rightarrow$ durch $X \rightarrow Y$. Dabei besitzen sie gemäß ihrer Wahrheitstafel eine bestimmte – *strukturelle* – theoretische Wahrscheinlichkeit, bei $X \rightarrow Y$ gilt z. B.: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$. Wird dieser Relator nun aber in einer analytischen oder semi-analytischen Relation eingesetzt, so muss die p^T dieser Relation natürlich nicht der strukturellen Wahrscheinlichkeit des Relators entsprechen. Wie die obigen Beispiele zeigen, kann in der Tat aus der Verwendung von $\rightarrow$ jede (hier) mögliche p^T resultieren: 4/4, 3/4, 2/4, 1/4, 0/4.

4-1-0-3 PRÄZISIERUNGEN

Man kann den Bereich von semi-analytischen Relationen weiter präziseren. Wie eben bemerkt, kann man sowohl von *partiell-tautologisch* wie von *partiell kontradiktorisch* sprechen. So bietet sich (bei 2 Variablen) folgende Unterteilung an:

Semi-analytische Relationen:

- *Partiell tautologisch*: wahrscheinlich
  z. B. $X \vee Y \longrightarrow Y$ $p^T = 3/4$ $p^T > 2/4$ $p^T > 0{,}5$
- *Partiell kontradiktorisch*: unwahrscheinlich
  z. B. $X / Y \longrightarrow X \wedge Y$ $p^T = 1/4$ $p^T < 2/4$ $p^T < 0{,}5$
- *Kontingent*: zufällig
  z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ $p^T = 2/4$ $p^T = 2/4$ $p^T = 0{,}5$

Kontingente Relationen – hier z. B. $p^T = 2/4$ – liegen also zwischen partiell tautologischen und partiell kontradiktorischen Relationen. Ich nenne ich daher auch ‚*neutral*'. Man kann allgemeiner bestimmen: l*ogisch neutral* sind Strukturen, deren Wert $p^T = 0{,}5$ beträgt, also *genau mittig* zwischen dem Wert $p^T = 1$ der Tautologie und $p^T = 0$ der Kontradiktion liegt.

Nach den bisher vollzogenen Präzisierungen kann man bestimmen:
analytisch $\Leftrightarrow$ tautologisch $\vee$ kontradiktorisch
semi-analytisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch

Hier kann man nicht die Äquivalenz verwenden, denn es gilt eben auch:
synthetisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch
(Natürlich könnte man anstelle des *einschließenden* „oder" $\vee$ auch das *ausschließende* „oder" >< verwenden, denn es geht hier um ausschließende Bestimmungen).

4-1-0-4 ÜBERSICHT

Ich gebe nachfolgend eine Übersicht über *synthetische* und *(semi)analytische Relationen*; im analytischen Bereich beschränke ich mich auf Relationen mit der Implikation:

analytische Strukturen	z. B.	p^T (theoret. Wahrsch.)	
• streng analytisch			
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	$p^T = 4/4$	1,0
Kontradiktion	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$	$p^T = 0$	0,0
• partiell analytisch			
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25
synthetische Strukturen			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25

Für die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ gilt $p^T = 1/2 = 0,5$

4-1-0-5 ABGRENZUNGEN

Die theoretische Wahrscheinlichkeit reicht,

• um synthetisch und analytisch abzugrenzen, wenn man sinnvollerweise bei *synthetisch* Tautologien mit $p^T = 1$ und Kontradiktionen mit $p^T = 0$ ausschließt. Dann gilt:

analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$,

synthetisch $0 < p^T < 1$.

• um semi-analytisch und analytisch abzugrenzen, mit der gleichen Begründung:

analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$

semi-analytisch: $0 < p^T < 1$

Offensichtlich reicht die theoretische Wahrscheinlichkeit aber *nicht*, um *synthetisch* und *semi-analytisch* voneinander abzugrenzen. Außerdem würde man sich auch zusätzliche Kriterien wünschen, um analytisch und semi-analytisch, aber auch um tautologisch und kontradiktorisch abzugrenzen.

Dazu waren früher schon mehrfach verschiedene Kriterien genannt worden; diese sollen jetzt beim Thema *Implikation* noch einmal systematisch geprüft werden.

4-1-1 Implikation

Dieser Unterpunkt enthält sehr *spezielle* Analysen, die der Leser ggf. überspringen kann.
Wir wollen hier folgende Möglichkeiten der Implikation mit folgenden Beispielen unterscheiden:

	Beispiele:
• Analytisch / Tautologie (logischer Schluss):	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
• Analytisch / Kontradiktion:	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$
• Semi-analytisch:	$X \vee Y \longrightarrow Y$
• Synthetisch:	$X \rightarrow Y$

Der *synthetische* Fall ($X \rightarrow Y$) gehört zwar nicht in den analytischen Bereich, aber wir ziehen ihn zur Abgrenzung mit heran.

Es sollen nun folgende Kriterien genauer untersucht werden, die geeignet sind, analytische, semi-analytische und synthetische Relationen genauer abzugrenzen. Diese Kriterien sind:

- syntaktische Folge
- Enthaltensein
- Abhängigkeit
- Analyzität

Die meisten folgenden Aussagen gelten nicht nur für die Implikation, sondern auch für andere Relatoren. Aber die *Implikation*, vor allem der *logische Schluss*, spielt eine besondere Rolle in der Logik.

4-1-1-1 SYNTAKTISCHE FOLGE

• synthetisch

Bei einer synthetischen Relation wie $X \rightarrow Y$ stehen *vor* und *hinter* dem Relator $\rightarrow$ nur *unterschiedliche* Objektzeichen, also hier X und Y.

• semi-analytisch

Hier stehen *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator $\longrightarrow$
Partiell gleich: $X \vee Y \longrightarrow Y$, vollständig gleich: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

• analytisch-tautologisch

Hier stehen auch *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator
Partiell gleich: $X \Rightarrow X \vee Y$, vollständig gleich: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

Allerdings ergeben sich hier zwei Einschränkungen, die mit der Definition der Implikation zu tun haben. So ist der *Schluss auf eine Tautologie* logisch wahr, gleichgültig, was die Prämisse beinhaltet. Z. B. $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$. Hier liegt also eine (streng analytische) Tautologie vor, obwohl vor und hinter dem Relator *nur unterschiedliche* Zeichen vorkommen. Ich möchte dies aber als einen Sonderfall verstehen, quasi eine *„mechanische“ Tautologie*, bei welcher der Inhalt überhaupt keine Rolle spielt; es ist die Ausnahme, welche die Regel bestätigt.

• analytisch-kontradiktorisch

$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$

Die *Kontradiktion* ist insgesamt ein Sonderfall. Wie schon mehrfach beschrieben, ist bei der normalen Implikation nur in *einem* extremen Fall eine Kontradiktion gegeben, wenn aus einer *Tautologie* eine *Kontradiktion* „folgt“. Deswegen ist hier das obige Kriterium kaum verwendbar (es können ganz unterschiedliche, ja beliebige Zeichen auftreten). Anders ist es bei der Verwendung der *Positiv-Implikation*, z. B. $X \,{*}{\not\Rightarrow}\, \neg X$; hier gilt dasselbe wie bei Tautologien.

Man sieht, dieses syntaktische Kriterium ist geeignet, um synthetisch und (semi-)analytisch abzugrenzen, aber innerhalb des analytischen Bereichs nicht. Doch als ein *meta-sprachliches* Kriterium ist es in seiner *ontischen* Verwendbarkeit natürlich prinzipiell begrenzt. Es lässt sich allerdings auch ontologisch interpretieren, wie der nächste Punkt zeigt.

4-1-1-2 ENTHALTENSEIN

Man kann entsprechend der *syntaktischen* Analyse auch *ontologisch* argumentieren. Anstatt bei $X \rightarrow Y$ zu sagen: ‘Vor und nach dem Relator kommen nur *ungleiche Objekt-Zeichen* vor’, kann man auch sagen: ‘Die beiden Objekte bzw. Relata (X und Y) der Relation $X \rightarrow Y$ sind vollständig *ungleich*.’ Bzw. sagt man bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$: ‘Die beiden Relata $X \wedge Y$ und Y der Relation $X \wedge Y \Rightarrow Y$ sind *partiell gleich*.’ Usw.

Wie lässt sich diese *Gleichheit* begründen? Am ehesten durch *Enthaltensein* bzw. *Teilsein*. Wenn z. B. zwei Relata völlig ungleich sind, dann sind beide Relata wechselseitig nicht ineinander enthalten. Der Unterschied zwischen *Gleichheit* und *Identität* ist in diesem Bereich schwer zu definieren, es kann hier davon abgesehen werden.

Zunächst kann man dabei an ein Enthaltensein entsprechend der *syntaktischen Analyse* denken. Dabei ist bei einer implikativen Relation immer primär die Frage, ob die *Konklusion* (das Nachglied) in der *Prämisse* (dem Vorglied) bereits enthalten ist.

• synthetisch

$X \rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) keineswegs in X (Prämisse) enthalten.

• semi-analytisch

$X \vee Y \longrightarrow Y$: Hier ist Y *vollständig* in $X \vee Y$ enthalten

$X \longrightarrow X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten; denn X ist eben in X enthalten, Y aber nicht.

• analytisch-tautologisch

$X \wedge Y \Rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) *vollständig* in $X \wedge Y$ (Prämisse) enthalten

$X \Rightarrow X \vee Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten.

• analytisch-kontradiktorisch

Bei der Kontradiktion mit der Normal-Implikation ergeben sich wieder die o. g. Schwierigkeiten. Verwendet man die Positiv-Implikation, so kann man sagen:

$X \, {*}\not\Rightarrow \neg X$: Hier ist die Konklusion vollständig in der Prämisse enthalten:

$X \, {*}\not\Rightarrow \neg X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion partiell in der Prämisse enthalten.
(allerdings wird sie dann durch die Negation logisch ausgeschlossen)

Zum ersten sieht man: Zwar ist so wiederum eine Abgrenzung von synthetisch zu (semi-) analytisch möglich, aber nicht zwischen analytisch und semi-analytisch.

Zum zweiten ergibt sich aber noch folgendes Problem: Eigentlich interpretiert man Enthaltensein logisch doch *umgekehrt*. Bei einer Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \Psi$ soll Φ in Ψ enthalten sein, und nicht Ψ (Konklusion) in Φ (Prämisse). $\Rightarrow$ bzw. $\rightarrow$ kann man ja entsprechend der *Teilmengen-Relation* $\subset$ interpretieren. Demnach gilt: $\Phi \subset \Psi$ bedeutet, dass Φ in Ψ enthalten ist. Dieser Unterschied erfordert eine genauere Analyse.

Wir müssen hier *2* Modelle von Enthaltensein unterscheiden: bei $\Phi \Rightarrow \Psi$:

1) Φ ist vollständig in Ψ enthalten (Ψ ist partiell in Φ enthalten)
2) Ψ ist vollständig in Φ enthalten (Φ ist partiell in Ψ enthalten)

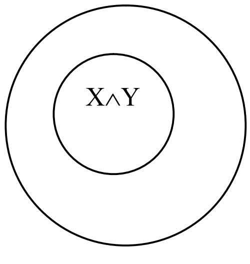
Das klären wir am besten zunächst anhand einer analytischen Relation:

• analytisch

Wieder das Beispiel: $X \wedge Y \Rightarrow Y$: Wir verwenden Wahrheitstafel und Grafik zur Analyse. Zunächst zum 1) Modell: *Die Prämisse ist in der Konklusion enthalten.*

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

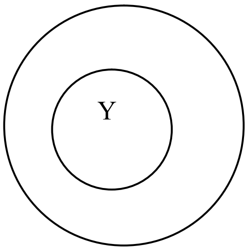
Y = der gesamte Kreis



Die *gültigen* Welten von $X \wedge Y$
(+ unter dem $\wedge$ in der Wahrheitstafel)
sind eine Teilmenge der *gültigen* Welten
von Y (+ unter dem Y in der Wahrheitstafel)

Nun zum 2) Modell: *Die Konklusion ist in der Prämisse enthalten*.

$X \wedge Y$



Die *ungültigen* Welten = die Information von Y
(− unter dem Y in der Wahrheitstafel)
sind eine Teilmenge der un*gültigen* Welten von $X \wedge Y$
(− unter dem $X \wedge Y$ in der Wahrheitstafel)

Wir können also 2 Modelle unterscheiden:
1) Prämisse ist in Konklusion enthalten
$X \wedge Y$ ist in Y enthalten
- die Menge der Welten, in denen $X \wedge Y$ gültig ist (nur 1 Welt), ist eine Teilmenge der Welten, in denen Y gültig ist (2 Welten)
- Y umfasst $X \wedge Y$ und $\neg X \wedge Y$; denn es gilt: $Y \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ also ist $X \wedge Y$ Teil von Y
- die Schnittmenge $X \cap Y$ ist eine Teilmenge von Y: $(X \cap Y) \subset Y$

2) Konklusion ist in Prämisse enthalten
Y ist in $X \wedge Y$ enthalten
- syntaktisch: hier ist das Zeichen ‚Y' in der Zeichenkombination ‚$X \wedge Y$' enthalten
- der Informationsgehalt von Y ist im Informationsgehalt von $X \wedge Y$ enthalten
- die Menge der Welten, in denen Y ungültig ist (2 Welten), ist eine Teilmenge der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist (3 Welten)

Welche Sichtweise ist nun für die Logik entscheidend?
Zunächst zur *syntaktischen* Betrachtung. Bei unserem Beispiel $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist Y (Konklusion) Teil von $X \wedge Y$ (Prämisse). Aber bei einem anderen Beispiel bekäme man ein anderes Ergebnis: Bei $X \Rightarrow X \vee Y$ ist X (Prämisse) Teil von $X \vee Y$ (Konklusion). Nur genügt es eben nicht, nur die Objektzeichen (X, Y) zu berücksichtigen, bei einer *Konjunktion* $X \wedge Y$ ist X auch logisch-semantisch Teil, bei einer *Disjunktion* $X \vee Y$ aber nicht. Anders gesagt: $\wedge$ erhöht die Information, $\vee$ reduziert sie. Man darf also die syntaktische *Oberflächen-Struktur* nicht verabsolutieren.

Logisch-semantisch ist letztlich das 2) Modell entscheidend: Die Konklusion ist in der Prämisse logisch enthalten. Nur so ist ja ein (deduktiver) Schluss von der Prämisse auf die Konklusion überhaupt möglich.

Die beiden Modelle widersprechen sich aber nicht notwendig, sondern können sich *ergänzen*. Man könnte die eine Betrachtung *extensional* nennen, die andere Betrachtung, die sich auf die *Information* bezieht, *intensional* (vgl. Kap. 0, Exkurs).

Einerseits (*intensional*) ist die Prämisse in der Konklusion enthalten (also $X \wedge Y$ in Y), wenn man von den *positiven* Welten ausgeht.

Andererseits (extensional) ist die Konklusion in der Prämisse enthalten (also Y in $X \wedge Y$), wenn man von den *negativen* Welten ausgeht.

Und es gilt eben: $[X \wedge Y \Rightarrow Y] \Leftrightarrow [\neg Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)]$.

Zusammenfassend ist ein Schluss gültig, wenn:

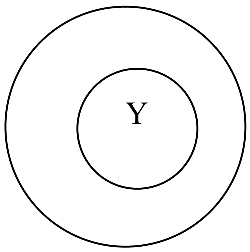
- der Informationsgehalt der Konklusion (Y) ist im Informationsgehalt der Prämisse ($X \wedge Y$) enthalten ist.
- die Menge der Welten, in denen die Prämisse ($X \wedge Y$) gültig ist, in der Menge der Welten enthalten ist, in denen die Konklusion (Y) gültig ist.

Noch kurz zur analytischen *Kontradiktion* (unter dem Aspekt möglicher Welten):

Bei $X \vee \neg X \;\not\Rightarrow\; X \wedge \neg X$ sind die gültigen und ungültigen Welten völlig disjunkt, denn bei der Tautologie $X \vee \neg X$ gibt es *nur gültige* Welten und bei $X \wedge \neg X$ *nur ungültige* Welten.

• semi-analytisch
Wir nehmen das Beispiel: $X \vee Y \longrightarrow Y$

$X \vee Y$



$X \vee Y$	$\longrightarrow$	Y
+	+	+
+	−	−
+	+	+
−	+	−

Hier gilt: Der Informationsgehalt der Konklusion (Y) ist *nicht vollständig* in dem der Prämisse ($X \vee Y$) enthalten, daher ist der Schluss nur semi-analytisch bzw. semi-tautologisch.

Und: Die Menge der gültigen Welten der Konklusion Y ist eine Teilmenge der Menge der gültigen Welten der Prämisse $X \vee Y$. Wir haben also genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Das ist leicht erklärt: $X \vee Y \longrightarrow Y$ ist eben eine semi-analytische Relation, aber wenn man Prämisse und Konklusion umkehrt, erhält man $X \vee Y \Leftarrow Y$. Und das ist ein *gültiger* Schluss, entsprechend $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Somit gelten bei $X \vee Y \longrightarrow Y$ genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \vee Y \Leftarrow Y$. (Von daher könnte man die Grafik auch umkehren).

• synthetisch
Man spricht zwar auch bei der Implikation $X \rightarrow Y$ gerne davon, dass *X in Y enthalten* ist. Aber hier muss man vorsichtig sein, es ist nur ein *empirisches* Enthaltensein möglich. *Logisch* darf man bei $X \rightarrow Y$ im Grunde gar nicht von Enthaltensein sprechen.

Zwar könnte man postulieren, dass bei zwei Variablen X, Y gilt: X ist Y und $\neg$ Y enthalten, und Y ist in X und $\neg$X enthalten; aber dass *alles in allem* enthalten ist, heißt logisch genau so viel, wie dass *nichts in nichts* enthalten ist.

Ist das Kriterium des *Enthaltenseins* (in der neuen Interpretation) geeignet, um synthetische, semi-analytische und analytische Relationen zu unterscheiden? Damit hängt zusammen die Frage, ob sich eine sinnvolle Quantifizierung erreichen lässt. Man darf z. B. nicht einfach p(Information) = p^I verwenden. Denn dieser Wert gibt ja nur die *Größe* an. Ich kann z. B. sagen: $p^I[Y) < p^I[X \wedge Y]$. Aber damit ist noch nicht gesagt, dass die Information von Y in der von $X \wedge Y$ enthalten ist. Hier bietet sich die Formalisierung der *Mengenlehre* an. Ich nehme als Symbol: I = Information.

- *Tautologie*: Die Information von Y ist vollständig in der Information von $X \wedge Y$ enthalten: $I(Y) \subset I(X \wedge Y)$. Damit ist $I(X \wedge Y)$ teilweise in I(Y) enthalten, aber eben *nicht umgekehrt*.
- *Semi-analytisch*: Die Information von X >< Y (− + + −) ist teilweise in der Information von Y (+ − + −) enthalten *und umgekehrt*. Allerdings sind X >< Y und Y völlig voneinander unabhängig, besser, man wählt stattdessen z. B. $X \wedge Y$ (+ − − −) versus $X \nabla Y$ (− − − +).

Hier gibt es zunächst kein eigenständiges Symbol. Daher habe ich ein neues Symbol eingeführt: $\sqcap$. $\Phi \sqcap \Psi$ bedeutet: Φ schneidet Ψ, dies entspricht: „einige Φ sind Ψ (und umgekehrt)“. Somit ergibt sich: $I(X \wedge Y) \sqcap I(X \nabla Y)$. Vgl. dazu auch u. a. 1-2-0-5.
- *Synthetisch*: Geht man rein nach der Wahrheitstafel, dann schneiden sich die Informations-Mengen von X und Y, z. B. bei $X \rightarrow Y$. Aber *synthetische* Relationen sind für Angabe der (analytischen) Informationsbeziehungen *nicht definiert*.

Problematisch ist wieder die *Kontradiktion*, auf die ich nicht eingehe.

Da sich die Information auf die *ungültigen* Welten bezieht, könnte man auch noch genauer schreiben (in Bezug auf die Zeilen der Wahrheitstafel):

$I(Y) = \{2.\text{Welt}, 4.\ \text{Welt}\}$, $I(X \wedge Y) = \{2.\ \text{Welt}, 3.\ \text{Welt}, 4.\ \text{Welt}\}$, somit:

$M(-/\text{Welten: } Y) \subset M(-/\text{Welten: } X \wedge Y)$.

Abschließend hierzu: Der Begriff des „Enthaltensein“ leistet einiges zur Abgrenzung von synthetisch, analytisch und semi-analytisch, aber alleine reicht er auch nicht aus, zumal die Mengenlehre für quantitative Teilmengen-Relationen nicht wirklich geeignet ist.

4-1-1-3 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Es wurde als These aufgestellt, dass gilt:

Synthetisch:	logisch unabhängig
Semi-analytisch:	partiell abhängig (partiell unabhängig)
Analytisch-tautologisch:	(vollständig) abhängig
Analytisch-kontradiktorisch:	(vollständig) abhängig

Abhängigkeit hängt eng zusammen mit Enthaltensein. Wenn X logisch in Y enthalten ist, dann besteht Abhängigkeit. Es lassen sich verschiedene Modelle der Abhängigkeit aufstellen. Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit kann dazu dienen, Abhängigkeit quantitativ zu bestimmen. Aber hier kann es zu Problemen kommen.

So gilt: $p^T[X \rightarrow Y] = p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4$

Das ist aber unbefriedigend, denn dann hätte ja eine synthetische Relation den gleichen Abhängigkeits-Wert wie eine semi-analytische und könnte so nicht unabhängig sein.

Ich verwende daher die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, bei der man *nur die positiven Fälle* berücksichtigt; die bedingte (theoretische) Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich die Konklusion ist, wenn die Prämisse gültig ist. Es geht also nur darum, die Abhängigkeit der Konklusion von der (positiven) Prämisse abzubilden. Man kann diese Wahrscheinlichkeit auch *logische Wahrscheinlichkeit* nennen. Ich schreibe sie formal p^L.

Sie entspricht allerdings der *Positiv-Implikation*, so dass keine neue Theorie eingeführt werden muss. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber nur bei implikativen Relationen anzuwenden.

- synthetisch

	$X \rightarrow Y$
1.	+ + +
2.	+ − −
3.	− + +
4.	− + −

Wenn ich weiß, dass X gültig (+) ist, dann ist Y einmal gültig (+), in der 1. Zeile, und einmal ungültig (–), in der 2. Zeile. Es besteht also eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/2$, das Y gültig ist und ebenfalls 1/2, dass es ungültig ist. $p^T = 1/2$ ist aber genau die *Zufallserwartung*, das zeigt die Unabhängigkeit von X und Y. Um zu prüfen, ob Y (bei gültigem X) ebenfalls gültig ist, muss ich empirische Untersuchungen machen.

Dabei kommen alle Kombinationen von X und Y vor: + +, + –, – +, – –

Die Fälle von negativem X (−) lasse ich hier einmal beiseite, sie führen durch die Definition der Implikation zu irrelevanten Ergebnisse. Die Betrachtung nur der positiven Fälle entspricht der Positiv-Implikation X *→ Y. p^T[X → Y] = 1/2 = 0,5. Ansonsten schreibt man:

p^L[X → Y] = 1/2 = 0,5

• semi-analytisch

Beispiel wieder: X ∨ Y ⟶ Y

	X ∨ Y	⟶	Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	+	+	+
4.	−	+	−

Wie man sieht, ist hier der Wahrheitsverlauf gleich wie bei X → Y: + − + +, dennoch ergeben sich ganz andere Verhältnisse. Wenn ich hier weiß, dass X ∨ Y gültig (+) ist [1., 2.,3. Zeile], dann ist Y 2x ebenfalls gültig (+), nämlich [1. und 3. Zeile]. Es besteht somit eine Wahrscheinlichkeit von p^L = 2/3 (0,67), was deutlich über der Zufallserwartung (0,5) liegt. D. h. man kann rein logisch *partielle* Erkenntnisse über Y gewinnen; um aber genau festzustellen, ob (bei gültigem X ∨ Y) auch Y gültig ist, muss ich dennoch *empirische* Untersuchungen vornehmen. Genau deshalb nenne ich einen solchen Schluss eben *partiell analytisch*.

Dass X ∨ Y und Y nicht logisch unabhängig, sondern partiell abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel nicht alle Kombinationen auftreten, nämlich nicht:

X ∨ Y: − und Y: +. Denn: ¬(X ∨ Y) $^-\wedge^-$ Y ist eine Kontradiktion.

Ich schreibe: p^L[X ∨ Y ⟶ Y] = 2/3. Auch dabei kann man alternativ wieder die Positiv-Implikation einsetzen: p^T[X ∨ Y *⟶ Y] = 2/3. Hier besteht also der gewünschte Unterschied zwischen p^T[X *→ Y] = 1/2 und p^T[X ∨ Y *⟶ Y] = 2/3.

• analytisch

	X ∧ Y	⇒	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

Im analytischen-tautologischen Fall gilt: Wenn ich weiß, dass X ∧ Y gültig (+) sind, dann weiß ich sicher, dass auch Y gültig (+) ist, denn es gibt nur *eine* Welt, in der X ∧ Y gültig ist, und in der ist Y auch gültig (1. Zeile). Somit ergibt sich für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T = 1/1 = 1. (Davon ist unberührt, dass auch die Relation X ∧ Y ⇒Y als ganze eine theoretische Wahrscheinlichkeit p^T = 4/4 = 1 besitzt). Man braucht also keine empirischen Untersuchungen, um die Wahrheit von Y zu beweisen. Es genügt, X ∧ Y zu *analysieren*, daher auch *analytische* Relation.

Dass X ∨ Y und Y voneinander logisch abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel nicht alle Kombinationen auftreten, nämlich nicht: X ∨ Y: + und Y: −. Denn:

X ∧ Y $^-\wedge^-$ ¬Y ist eine Kontradiktion.

Vielmehr kann man sagen, dass Y *vollständig* abhängig von X ∧ Y ist.

Hier gilt: p^T[X ∧ Y ⇒ Y] = p^L[X ∧ Y ⇒ Y] = 1

Zur Kontradiktion: Da gelten bei der normalen Implikation wie gesagt extreme Verhältnisse.

	$X \vee \neg X$	$\not\Rightarrow$	$Y \wedge \neg Y$
1.	+	−	−
2.	+	−	−
3.	+	−	−
4.	+	−	−

Hier gilt: Ich weiß, dass $X \vee \neg X$ als Tautologie immer gültig ist. Und ich weiß, dass $Y \wedge \neg Y$ als Kontradiktion immer ungültig ist. In der Wahrheitstafel kommt nur *eine* Kombination vor. Somit sind keine weiteren Analysen notwendig, weil eben gilt: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion.

Probleme ergeben sich aber – wie schon mehrfach angemerkt – durch die Besonderheiten der Implikation; mit der Positiv-Implikation wäre es unproblematischer, denn die ist nicht nur in *einem* Extremfall kontradiktorisch. Da die Kontradiktion hier aber nicht von besonderer Bedeutung ist, wollen wir sie nicht weiter analysieren.

Ist die logische *Abhängigkeit* eine Möglichkeit, synthetische, semi-analytische und analytische Relationen voneinander abzugrenzen? Die Frage ist noch mehr: Lässt sich ein *quantitatives* Modell der logischen Abhängigkeit verwenden?

Ich habe hier das Modell der *Positiv-Implikation* bzw. der *bedingten Wahrscheinlichkeit* verwendet. Dies bezieht sich primär nur auf implikative Beziehungen (man könnte es aber ggf. modifiziert auch auf andere Relatoren anwenden).

Allerdings gelingt es damit nicht, *synthetische* und *semi-analytische* Strukturen klar voneinander abzugrenzen: synthetische Relationen haben zwar einen Wert von 0,5, aber semi-analytische Relationen können auch diesen Wert aufweisen, z. B.: $p^L[X \ast\!\rightarrow (X >< Y)] = 0{,}5$.

Allgemein kann man für p^L festhalten:

Analytisch-tautologisch: 1
Analytisch-kontradiktorisch: 0
Synthetisch: 0,5
Semi-analytisch: verschiedene Werte möglich, 0,75, 0,5, 0,25.

4-1-1-4 ABHÄNGIGKEIT

Man kann aber auch auf andere Weise logische *Abhängigkeit* bestimmen. Es bleibt nämlich das Problem, dass bei einer *Tautologie* $\Phi \Rightarrow \Psi$ die beiden Relata genauso voneinander abhängig sind wie bei einer *Kontradiktion* $\Phi \not\Rightarrow \Psi$.

Die theoretische (oder logische) Wahrscheinlichkeit ist dabei nicht geeignet, denn hier gilt:

p^T (Tautologie) = 1, p^T(Kontradiktion) = 0
die semi-analytischen Relationen liegen dazwischen: $p^T = 0{,}75, 0{,}5, 0{,}25$.

Insofern kann es *keine lineare* Funktion geben. Denn Tautologie und Kontradiktion sind beide vollständig analytisch.

Man kann sich das folgendermaßen erklären:

Eine *Tautologie*: gilt für *alle* Welten, also p(Welten) = 1, sie ist deterministisch.
Eine *Kontradiktion*: gilt für *alle* Welten nicht, sie ist somit auch deterministisch.

Man kann einen *Grad von logischer Abhängigkeit* konstruieren: p(Abhängigkeit) = p^A.
p^A muss für Tautologie und Kontradiktion den Wert 1 besitzen. Alle anderen Relationen werden danach gemessen, wieweit sie von den deterministischen Polen abweichen. Und zwar berechnet man dabei doppelt: Wie weit weichen sie von der Tautologie ab und wie weit weichen sie von der Kontradiktion an? Diese beiden Werte werden voneinander subtrahiert und dann der *Betrag* ermittelt (d. h. negatives Vorzeichen wird aufgehoben). Man kann aber auch anders berechnen: $p^A = |p^T - (1 - p^T)|$. Und zwar gilt:

- *Tautologie*: $p^A = |1 - 0| = 1$
- *Kontradiktion*: $p^A = |0 - 1| = 1$
- *semi-analytisch*:
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow Y$: $p^A = |0{,}75 - 0{,}25| = 0{,}5$
  zu 3/4 positiv deterministisch, an 4/4 (Tautologie) dran,
  zu 1/4 negativ deterministisch, an Kontradiktion (0/4) dran.
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$: $p^A = |0{,}5 - 0{,}5| = 0$
  1/2 positiv deterministisch, 1/2 negativ deterministisch
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \nabla Y$: $p^A = |0{,}25 - 0{,}75| = 0{,}5$
  1/4 positiv deterministisch, 3/4 negativ deterministisch

Der *quantitative Abhängigkeits-Begriff* p^A ist geeignet, *analytische* und *semi-analytische* Relationen voneinander abzugrenzen. *Synthetische* Relationen muss man allerdings per Definition ausschließen, denn sonst müssten sie alle den Wert $p^A = 0$ besitzen, was sich aber in diesem Modell nicht ergeben würde. Der Vorteil dieses Ansatzes ist vor allem, dass er Tautologie und Kontradiktion *denselben* Wert zumisst (was z. B. bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit nicht gegeben ist). Ein Problem könnte sein, dass bei semi-analytischen Relationen auch der Wert 0 auftritt, was ich aber hier nicht weiter diskutieren möchte.

4-1-1-5 SYNTHETISCH, ANALYTISCH, SEMI-ANALYTISCH

Nach diesen Vorklärungen kann man noch einmal präziser bestimmen:

- *synthetische Strukturen*
  - *syntaktisch*: nur unterschiedliche Objekt-Zeichen rechts und links vom Junktor
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): 0,5
  - *Abhängigkeit*: es besteht keine logische Abhängigkeit, p^A nicht definiert
  - *Enthaltensein*: logisch sind Vorderglied und Nachglied nicht ineinander enthalten

- *analytische Strukturen*
  - *syntaktisch*: rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: von $p^T = 1$ bei Tautologien, $p^T = 0$ bei Kontradiktionen, $0 < p^T < 1$ bei partiell analytischen Strukturen
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $p^L = 1$ bei Tautologien, $p^L = 0$ bei Kontradiktionen
  - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein logischer Zusammenhang zwischen den Relata: bei Tautologien und Kontradiktionen gleichermaßen $p^A = 1$
  - *Enthaltensein* (bei Implikationen): die Konklusion ist vollständig in der Prämisse enthalten (ein Ausgeschlossensein bei Kontradiktionen)

- *semi-analytische Strukturen*
  - *syntaktisch*: heißt das, dass rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen stehen
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $0 < p^L < 1$
  - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein partieller logischer Zusammenhang zwischen den Relata: $p^A < 1$
  - *Enthaltensein*: ein partielles Enthaltensein

Es bleibt abschließend die Frage, ob man auch den Begriff „analytisch“ *quantifizieren* kann, ob man einen *Grad von Analyzität* angeben kann. Es scheint mir berechtigt, eine strikte Grenze zwischen synthetisch einerseits und semi-analytisch / analytisch andererseits zu ziehen. Es wäre zwar denkbar, hier fließende Übergänge zu postulieren, aber nicht sinnvoll. Man darf sich eben nicht vom Modell eines *Tautologie-Grades* irritieren lassen, der nicht einen Grad von Analyzität angibt.

4-1-2 Positiv-Implikation

4-1-2-1 TAUTOLOGIE
Z. B. *Modus ponendo ponens*
Die *vollständige* Wahrheitstafel lautet:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(X & *\!\!\to & Y) & \wedge & X & *\!\!\Rightarrow & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & \square & - \\
- & \square & + & - & - & \square & + \\
- & \square & - & - & - & \square & -
\end{array}
$$

Bei der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T werden aber nur die unter dem Relator $*\!\!\Rightarrow$ stehenden + mitgerechnet, nicht das Symbol □ (für *undefiniert*). Somit erfolgt die Berechnung anhand der *verkürzten* Wahrheitstafel (vgl. 1-1-2-2).

$$
\begin{array}{ccccccc}
(X & *\!\!\to & Y) & \wedge & X & *\!\!\Rightarrow & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & &
\end{array}
$$

$$p^T[(X *\!\!\to Y) \wedge X \;\; *\!\!\Rightarrow \; Y] = 1/1 = 1$$

Dies entspricht wie beschrieben der *bedingten theoretischen Wahrscheinlichkeit*.

4-1-2-2 KONTRADIKTION
Kontradiktionen sind bei der Positiv-Implikation viel eher möglich als bei der Normal-Implikation.
Kontradiktionen ergeben sich bei:

- Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion: $^{+}\Phi^{+} *\!\!\not\Rightarrow {}^{-}\Psi^{-}$
- Position $\not\Rightarrow$ Negation: $\Phi *\!\!\not\Rightarrow \neg\Phi$, $\neg\Phi *\!\!\not\Rightarrow \Phi$.
- Relation $*\!\!\not\Rightarrow$ (negative) Folge: $\Phi *\!\!\not\Rightarrow \neg\Psi$ (wenn gilt $\Phi \Rightarrow \Psi$)

Z. B.:

- $p^T[(X\,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \;\; *\!\!\not\Rightarrow \; (X\,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X] = 0/4 = 0$
- $p^T[(X *\!\!\to Y) \;\; *\!\!\not\Rightarrow \; \neg(X \; *\!\!\to Y)] = 0/1 = 0$
- $p^T[X \;\; *\!\!\not\Rightarrow \; (X \;\nabla\; Y)] = 0/2 = 0$ Denn $p^T[X \;\; *\!\!\Rightarrow \; \neg(X \;\nabla\; Y)] = 2/2 = 1$

4-1-2-3 SEMI-ANALYTISCHE POSITIV-IMPLIKATION

Die semi-analytische Positiv-Implikation wirft einige Probleme auf.

Z. B.

(X	∨	Y)	*⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	−	−	−
−	+	+	+	+
−	−	−	□	−

Hier gilt also: $p^T[(X \vee Y) \ {*}\!\longrightarrow Y] = 2/3$

Im Gegensatz zur herkömmlichen Implikation:

Denn bei der gilt wie schon erläutert: $p^T[(X \vee Y) \longrightarrow Y] = 3/4$

Problematisch ist aber eine semi-analytische Relation wie:

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	−	□	−

Hier scheint sich ein Wert $p^T = 1/1 = 1$ zu ergeben, und das ist nach der Primär-Deutung der Positiv-Implikation *→ falsch, denn danach handelt es sich um eine *semi-analytische* Relation.

Eine vollständig ausgearbeitete Lösung steht noch aus. Vermutlich liegt die Lösung aber darin, dass man für die Berechnung das Symbol ? (für „unbestimmt“) mitrechnen muss, im Gegensatz zu dem Symbol □ (für „undefiniert“). Dann erhält man in diesem Fall folgenden Wert:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) \ {*}\!\longrightarrow (X \ {*}\!\rightarrow Y)] = 1/3$$

4-1-2-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

Z. B.:

(X	*→	Y)	*⇔	¬	(X	*→	¬	Y)
+	+	+	+	+	+	+	−	+
+	−	+	□	−	+	−	+	−
−	□	+	□	□	−	□	−	+
−	□	−	□	□	−	□	+	−

$$p^T[(X \ {*}\!\rightarrow Y) \ {*}\!\Leftrightarrow \neg(X \ {*}\!\rightarrow \neg Y)] = 1/1 = 1$$

Entsprechend gilt:

$$p^T[\neg(X \ {*}\!\rightarrow Y) \ {*}\!\Leftrightarrow (X \ {*}\!\rightarrow \neg Y)] = 1$$

4-1-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

• *Beziehungen*

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

$$p^T[(X *\rightarrow Y) \;\; *\Rightarrow \;\; (X \rightarrow Y)] = 1$$

Ob man für $p^T[(X \rightarrow Y) \;\; *\Rightarrow \;\; (X *\rightarrow Y)]$ auch den Wert 1 einsetzt, hängt davon ab, welches Existenz-Modell man vertritt. Als beste Lösung sehe ich (vgl. 4-1-2-3):

$$p^T[p(X \rightarrow Y) \;\; *\longrightarrow (X *\rightarrow Y)] = 1/3$$

• *Vergleich*

Semi-analytische Relationen. Hier ergeben sich folgende quantitative Unterschiede:

$p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4 = 0{,}75$

	X ∨ Y	⟶	Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	+	+	+
4.	−	+	−

$p^T[X \vee Y *\longrightarrow Y] = 2/3 = 0{,}67$

	X ∨ Y	*⟶	Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	+	+	+
4.	−	□	−

Tautologie. Hier ergeben sich gleichartige Verhältnisse:

$p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$

	X ∧ Y	⇒	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

$p^T[X \wedge Y *\Rightarrow Y] = 1/1 = 1$

	X ∧ Y	*⇒	Y
1.	+	+	+
2.	−	□	−
3.	−	□	+
4.	−	□	−

Kontradiktion. Hier ergeben sich die deutlichsten Unterschiede:

Normale Implikation	p^T	Positiv-Implikation	p^T
$X \longrightarrow \neg X$:	2/4	$X *\nRightarrow \neg X$:	0
$\neg X \longrightarrow X$:	2/4	$\neg X *\nRightarrow X$:	0
$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$:	1/4	$(X *\!\rightarrow Y) *\nRightarrow \neg(X *\!\rightarrow Y)$:	0
$\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \rightarrow Y)$:	3/4	$\neg(X *\!\rightarrow Y) *\nRightarrow (X *\!\rightarrow Y)$:	0

4-1-3 Systematik

Anhand ausgesuchter Relatoren, die eine *strukturelle* theoretische Wahrscheinlichkeit von 3/4 (= 0,75), 2/4 (= 0,5) oder 1/4 (= 0,25) haben, sollen Beispiele für eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1$, $p^T = 0$ und $0 < p^T < 1$ gegeben werden.

4-1-3-1 KONJUNKTION

Tautologie $p^T[(X \vee \neg X)\ {}^+\!\wedge^+\ (Y \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \mid Y)\ {}^+\!\wedge^-\ (X \rightarrow Y)] = 2/4 = 0{,}5$

Kontradiktion $p^T[(X \nabla Y)\ {}^-\!\wedge^-\ (X >< Y)] = 0/4 = 0$

4-1-3-2 ÄQUIVALENZ

Tautologie

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
X & \wedge & Y & \Leftrightarrow & \neg(& \neg X & \vee & \neg Y) \\
+ & + & + & + & + & - & + & - & - & + \\
+ & - & - & + & - & - & + & + & + & - \\
- & - & + & + & - & + & - & + & - & + \\
- & - & - & + & - & + & - & + & + & -
\end{array}
$$

Es gilt also: $p^T[X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch

$p^T[(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \mid Y)] = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \wedge Y)] = 2/4 = 0{,}5$

$p^T[\neg(X \vee Y) \longleftrightarrow X] = 1/4 = 0{,}25$

Kontradiktion

$p^T[X \wedge Y \;\not\Leftrightarrow\; X \mid Y] = 0$

4-1-3-3 REJEKTION

Die Rejektion X ∇ Y steht für „nicht X und nicht Y".

Tautologie	$p^T[(X \wedge \neg X)\ {}^{+}\nabla^{+}\ (Y \wedge \neg Y)] = 4/4 = 1$
Semi-analytisch	$p^T[(X \wedge Y)\ {}^{+}\nabla^{-}\ (X \vee Y)] = 1/4 = 0{,}25$
Kontradiktion	$p^T[(X \nabla Y)\ {}^{-}\nabla^{-}\ (X \vee Y)] = 0/4 = 0{,}0$

4-1-4-4 REPLIKATION

Tautologie	$p^T[(X \rightarrow X) \Leftarrow (X \leftrightarrow Y)] = 4/4 = 1$
Semi-analytisch	$p^T[(X \rightarrow Y) \longleftarrow (X \leftarrow Y)] = 3/4 = 0{,}75$
Kontradiktion	$p^T[(X \wedge \neg X) \not\Leftarrow (Y \vee \neg Y)] = 0/4 = 0$

4-1-4-5 RELATIONEN MIT MEHR VARIABLEN

Bisher habe ich immer 2 Variablen verwendet, jetzt sollen 3 oder 4 Variablen genommen werden X, Y, Z bzw. X, Y, V, W. Die folgenden Werte lassen sich anhand der *Wahrheitstafeln* berechnen, was hier aber nicht ausgeführt werden soll.

- 3 Variablen

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Z)] = 8/8 = 1$

$p^T[(X \wedge Y \wedge Z) \;\Rightarrow\; (X \vee Y \vee Z)] = 8/8 = 1$

- 4 Variablen

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longleftrightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (V \wedge W)] = 12/16 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longrightarrow (X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16 = 0{,}94$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Y) \vee (V \rightarrow W)] = 16/16 = 1$

Im Folgenden wird *dieselbe* Verbindung mit immer *anderen* Zentral-Relatoren dargestellt:

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longrightarrow (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 12/16 = 0{,}75$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longleftarrow (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 14/16 = 0{,}88$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W)\ {}^{+}\vee^{-}\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 11/16 = 0{,}69$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W)\ {}^{+}|^{-}\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 14/16 = 0{,}88$

4-1-4 Inklusiv / Exklusiv

4-1-4-1 DEFINITION
Hier sollen zunächst zur Erinnerung noch einmal die 3 *oder*-Relatoren mit ihrem p^T-Wert genannt werden:

- Disjunktion (inklusiv): $p^T[X \vee Y] = 3/4$
- Kontravalenz (exklusiv): $p^T[X >< Y] = 2/4$
- Exklusion: $p^T[X \mid Y] = 3/4$

4-1-4-2 DISJUNKTION
Zunächst will ich auf die analytische Disjunktion eingehen. Beispiele sind:

- *Tautologie* $p^T[X \,^+\!\vee^+ \neg X] = 4/4 = 1$
- *Kontradiktion* $p^T[(X \,^-\!\wedge^- \neg X) \;^-\!\vee^-\; (Y \,^-\!\wedge^- \neg Y)] = 0/4 = 0$
- *Partiell-analytisch* $p^T[(X \wedge Y) \,^+\!\vee^- (X \wedge \neg Y)] = 2/4 = 0{,}5$

- *Gesetze der Disjunktion*:

$$p^T[(X \vee Y) \wedge \neg X \;\Rightarrow\; Y] = 4/4 = 1$$
$$p^T[X \vee Y \;\Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)] = 4/4 = 1$$

4-1-4-3 KONTRAVALENZ
Die Kontravalenz gilt als „exklusives oder“, nicht mit der Exklusion zu verwechseln.

- *Tautologie* $p^T[(X >< Y) \;^+\!\!><^+\; \neg(X >< Y)] = 1$
- Kontradiktion $p^T[(X \vee Y) \;^-\!\!><^-\; \neg(\neg X \wedge \neg Y)] = 0$
- *partiell-analytisch* $p^T[(X \wedge Y) \;^+\!\!><^-\; (X \rightarrow Y)] = 0{,}5$

- *Gesetze der Kontravalenz*

Diese Gesetze spielen auch bei der Quantoren-Logik eine wichtige Rolle:

$$p^T[(X >< Y) \;\Leftrightarrow\; (\neg X >< \neg Y)] = 1$$
$$p^T[(X >< Y) \;\Leftrightarrow\; (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)] = 1$$

4-1-4-4 EXKLUSION

- Tautologie $p^T[(X \wedge Y) \,^+|^+ (X \wedge \neg Y)] = 1$
- Kontradiktion $p^T[(X \vee \neg X) \;^-|^-\; \neg(X \wedge \neg X)] = 0$
- partiell-analytisch $p^T[(X \wedge Y) \,^+|^- (X \vee Y) = 0{,}25$

4-1-4-5 ODER-BEZIEHUNGEN

Hier sollen die wichtigsten Beziehungen zwischen *Disjunktion*, *Kontravalenz* und *Exklusion* dargestellt werden.

Zunächst Verbindungen mit der *Implikation*:

- Kontravalenz $\Rightarrow$ Disjunktion

  $p^T[X >< Y \Rightarrow X \vee Y] = 1$
- Kontravalenz $\Rightarrow$ Exklusion

  $p^T[X >< Y \Rightarrow X \mid Y] = 1$
- Disjunktion $\longleftrightarrow$ Exklusion

  $p^T[X \vee Y \longrightarrow X \mid Y] = 0{,}75$

  $p^T[X \mid Y \longrightarrow X \vee Y] = 0{,}75$

Nachfolgend *oder-Verknüpfungen (mit Disjunktion)*:

$$p^T[(X \vee Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ (X >< Y)] = 0{,}75$$

$$p^T[(X \vee Y)\ {}^{+}\!\vee^{+}\ (X \mid Y)] = 1$$

$$p^T[(X >< Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ (X \mid Y)] = 0{,}75$$

4-1-5 Erweiterungen

Die Erweiterungen behandeln das Thema *Wahrheit versus Wahrscheinlichkeit*. Das Verhältnis von Wahrheit und Wahrscheinlichkeit wurde schon mehrfach besprochen (z. B. in 3-1-5-1), es soll hier aber mit größerer Systematik noch einmal beleuchtet werden, und zwar vor allem im Hinblick auf die *Abgrenzung von synthetischen und analytischen Sätzen* – auf *semi-analytische* Sätze gehe ich hier nicht gesondert ein.

Wir können unterscheiden:

- *Empirisch*

  Empirische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit
- *Theoretisch*

  Theoretische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit

Dabei ergeben sich insgesamt 6 sinnvolle Kombinationsmöglichkeiten in 3 Kategorien:

1) Wahrscheinlichkeit – Wahrheit
   - Empirische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit
   - Empirische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit
   - Theoretische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit
   - Theoretische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit
2) Wahrheit – Wahrheit
   - Empirische Wahrheit – theoretische Wahrheit
3) Wahrscheinlichkeit – Wahrscheinlichkeit
   - Empirische Wahrscheinlichkeit – Theoretische Wahrscheinlichkeit

Um die Analyse nicht zu umfangreich zu gestalten, nehmen wir aber sofort eine Reduktion vor. Wie schon mehrfach gezeigt wurde und auch hier gleich noch einmal diskutiert wird, gilt *quantitativ*: *Theoretische Wahrscheinlichkeit* = *theoretische Wahrheit* (Tautologie). Ich werde daher zwischen diesen beiden zwar grundsätzlich, aber nicht in den verschiedenen Punkten differenzieren und komme somit zur folgender Liste bzw. Reihenfolge:

- Theoretische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit
- Empirische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit

- Empirische Wahrheit – theoretische Wahrheit

- Empirische Wahrscheinlichkeit – Theoretische Wahrscheinlichkeit

Diese vier Paare werde ich im Folgenden analysieren.

4-1-5-1 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT – THEORETISCHE WAHRHEIT

Wir können *quantitativ* gleichsetzen (vgl. 0-5-1-3):

theoretische Wahrscheinlichkeit = theoretische Wahrheit

Der theoretischen Wahrscheinlichkeit entspricht somit quantitativ ein Grad an theoretischer Wahrheit, d. h. aber ein *Tautologie-Grad*. Daher schreibe ich auch beide mit p^T (wollte man differenzieren, könnte man die *theoretische Wahrheit* mit w^T kennzeichnen).

Wir können genauer definieren:

– *Theoretische Wahrheit* = Tautologie, Grad der theoretischen Wahrheit = *Tautologie-Grad* (anstelle von ‚*theoretischer* Wahrheit' kann man auch von ‚*logischer* Wahrheit' sprechen, dieser Begriff ist aber vieldeutig, ich verwende ihn i. allg. nur bei logischen Schlüssen).

– *Theoretische Falschheit* = Kontradiktion, Grad der theoretischen Falschheit = *Kontradiktions-Grad* (anstelle von ‚Grad' könnte man auch von Größe, Kontradiktions-Größe sprechen).

Nun kann man fragen:

Ist diese Gleichsetzung von theoretischer Wahrscheinlichkeit und theoretischer Wahrheit berechtigt? Und wenn ja, was bringt es, wenn man zwei scheinbar äquivalente Begriffe verwendet?

In der Tat gilt die Gleichsetzung nur quantitativ ($p^T = w^T$), so dass der doppelte Ansatz durchaus Sinn macht. Entsprechend kann auch die *empirische* Wahrscheinlichkeit nicht ohne weiteres mit der *empirischen* Wahrheit gleichgesetzt werden (vgl. 4-1-5-2).

Außerdem gilt es zu bedenken: Einerseits ist die *Wahrscheinlichkeitstheorie* gut ausgearbeitet, auf sie ist nicht verzichtbar; andererseits ist es Tradition in der *Logik*, dass man *tautologisch* als Kategorie der (theoretischen) *Wahrheit* sieht, nicht der Wahrscheinlichkeit. So benötigt man *beide* Ansätze.

Aber vor allem gibt es zu beachten: *Semantisch* besteht durchaus ein *Unterschied* zwischen theoretischer Wahrscheinlichkeit und theoretischer Wahrheit. Dieser Unterschied sei an einem qualitativen Beispiel, nämlich der Implikation $X \to Y$, erläutert: Beispiel: $p^T[X \to Y] = 3/4$.
(für ein quantitatives Beispiel wie $p^T[p(X \to Y) = r/n]$ ergäbe sich Entsprechendes)

- *Wahrscheinlichkeits*-Deutung: $X \to Y$ gilt mit $3/4 = 75\%$ (theoretischer) Wahrscheinlichkeit, oder: $X \to Y$ ist <u>*mit*</u> $3/4 = 75\%$ (theoretischer) Wahrscheinlichkeit wahr
- *Wahrheits*-Deutung: $X \to Y$ ist <u>*zu*</u> $3/4 = 75\%$ wahr

Wichtig ist dabei der folgende Unterschied:

$X \to Y$ ist *mit* $3/4 = 75\%$ Wahrscheinlichkeit *empirisch* wahr (es wäre unsinnig zu behaupten, $X \to Y$ ist *mit* $3/4 = 75\%$ Wahrscheinlichkeit theoretisch wahr)

$X \to Y$ ist *zu* $3/4 = 75\%$ *theoretisch* wahr (ist zu 3/4 tautologisch).

Also beziehen sich beide Ansätze auf *unterschiedliche* Wahrheiten, auch wenn dies zunächst die doppelte Verwendung des Begriffs ‚theoretisch' überdeckt.

Empirisch wahr heißt: wahr in unserer tatsächlichen Welt, *theoretische Wahrheit* misst sich dagegen an der Zahl der logisch möglichen Welten, in denen der Satz wahr ist. Theoretisch *vollständig* wahr (tautologisch) heißt: wahr in *jeder* möglichen Welt.

Man könnte weiter fragen, wie sich eine *quantitative* theoretische Wahrheit (ein Tautologie-Grad) begründen lässt.

Wie eben beschrieben, bestimmt man eine Tautologie auch so, dass sie in *allen* möglichen (relevanten) Welten wahr ist. Z. B. ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$, laut Wahrheitstafel, in 4 von 4 möglichen Welten wahr. Dagegen ist $X \rightarrow Y$ nur in 3 von 4 Welten wahr. Man kann das zurecht wie folgt interpretieren:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist vollständig, zu 100%, (theoretisch) wahr: $p^T = 4/4 = 1$

$X \rightarrow Y$ ist nur zu 75% (theoretisch) wahr: $p^T = 3/4 = 0{,}75$

Wie sich später noch zeigen wird, ist gerade bei *Schlüssen* die Wahrheits-Deutung sinnvoll.

Damit ist schon vorgegeben, wie sich synthetische und analytische Sätze durch die theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. durch die theoretische Wahrheit abgrenzen lassen.

– synthetische Sätze: $0 < p^T = 1$

– analytische Sätze

Tautologien: $p^T = 1$

Kontradiktionen: $p^T = 0$

4-1-5-2 EMPIRISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT – EMPIRISCHE WAHRHEIT

Auf das Verhältnis von *empirischer* Wahrscheinlichkeit und *empirischer* Wahrheit bin ich in 1-3-0-2 und 1-4-0-5 schon näher eingegangen. Es ist deutlich komplizierter als im theoretischen Fall.

Wir müssen zunächst unterscheiden zwischen:

1) *aussagen-logischen*, qualitativen Sätzen (Relationen) wie $X \rightarrow Y$

2) *quantitativen* Sätzen (Relationen) wie $p(X \rightarrow Y) = r/n$

1) <u>aussagen-logische, qualitative Sätze wie $X \rightarrow Y$</u>

Ich will hier zwei Ansätze unterscheiden: *objekt-sprachlicher* und *meta-sprachlicher* Ansatz.

• objekt-sprachlicher Ansatz

In der normalen Sprache wie in der Aussagen-Logik unterscheidet man bei der (empirischen) *Wahrheit* normalerweise nur zwischen *wahr* und *falsch*. Die Aussagen-Logik ist wie beschrieben *2-wertig*, es gibt nur eine *Position*, z. B. $X \rightarrow Y$, oder deren *Negation* $\neg(X \rightarrow Y)$.

Wenn die Position wahr ist, dann ist die Negation falsch und umgekehrt. Üblicherweise wird Wahrheit auch nicht quantifiziert, aber wenn man eine *quantitativen* Wahrheitswert *w* aufstellen sollte, dann ergäbe sich sinnvollerweise:

wahr: bedeutet $w = 1$, falsch bedeutet $w = 0$.

Auch die empirische *Wahrscheinlichkeit* (oder relative Häufigkeit) wird in der normalem Sprache oft *2-wertig* repräsentiert und nicht quantifiziert, man unterscheidet z. B. nur zwischen „wahrscheinlich" und „unwahrscheinlich". Im wissenschaftlichen Kontext wird die Wahrscheinlichkeit p aber mehrwertig und quantitativ erfasst, ebenfalls mit dem Maximum 1 und dem Minimum 0.

$p = 1$ bedeutet: etwas gilt für *alle* (bzw. sicher)

$p = 0$ bedeutet: etwas gilt für *keinen* (bzw. sicher nicht)

Eine aussagen-logische Relation wie $X \rightarrow Y$ enthält *explizit* keine *quantitative* Angabe, somit auch keine Wahrscheinlichkeit p. Ich habe das aussagen-logische $X \rightarrow Y$ aber gedeutet als

$p(X \to Y) = 1$, also im Sinne der *relativen Häufigkeit* oder *empirischen Wahrscheinlichkeit*. D. h. so viel wie:

„In *allen* Fällen gilt wenn X dann Y“. Oder: „Zu 100% gilt wenn X, dann Y“.

Ich habe die *Negation,* das aussagen-logische $\neg(X \to Y)$ wieder gedeutet als $p(X \to Y) = 0$, also im Sinne der relativen Häufigkeit oder empirischen Wahrscheinlichkeit. D. h. soviel wie: „In keinem Fall gilt wenn X dann Y“. Oder: „Zu 0% gilt wenn X, dann Y“.

Nun stimmt aber auch:

$X \to Y$ ist die *Position*, steht für die Wahrheit des Satzes

$\neg(X \to Y)$ ist die *Negation*, steht für die Falschheit des Satzes

Die Frage ist, warum übersetze ich *Wahrheit* und Falschheit in einen Wert der empirischen *Wahrscheinlichkeit*?

Wie ich in 1-4-0-5 gezeigt habe, kann man bei der qualitativen Aussagen-Logik die empirische Wahrscheinlichkeit p und die empirische Wahrheit w quantitativ gleichsetzen: w = p.

Es gelten daher folgende Entsprechungen:

$X \to Y$	$p(X \to Y) = 1$	$w(X \to Y) = 1$	„$X \to Y$ ist vollständig wahr“
$\neg(X \to Y)$	$p(X \to Y) = 0$	$w(X \to Y) = 0$	„$X \to Y$ ist vollständig falsch“.

Man bestimmt dabei gewissermaßen: „was für *alle* gilt, ist (vollständig) *wahr*“, „was für *keinen* gilt, ist (vollständig) *falsch*“. Man muss hier also nicht zwischen p und w unterscheiden.

• meta-sprachlicher Ansatz

Bei der obigen Deutung befinden sich Wahrscheinlichkeit p und Wahrheit w beide *auf der gleichen Ebene*, einer *objekt-sprachlichen* Ebene; p und w sind beides Werte, die der Relation oder dem Sachverhalt $X \to Y$ (für sich allein) zukommen.

Man kann aber (wie schon mehrfach erläutert) differenzieren zwischen einer *objekt-sprachlichen* Ebene und einer *meta-sprachlichen* Ebene und kommt dann zu einer ganz anderen Interpretation. Hier wird die Wahrheit rein meta-sprachlich verstanden, als die *Übereinstimmung eines Satzes mit einem Sachverhalt.* Im Beispiel:

Objekt-sprachlich bzw. real: Sachverhalt $p(X \to Y) = 1$

Meta-sprachlich: Satz ‚$p(X \to Y) = 1$’

Wahrheitsgrad: w = 1

Anders geschrieben: w[‚$p(X \to Y) = 1$’, $p(X \to Y) = 1$] = 1. Hier wird ausgesagt, dass der *Satz* ‚$p(X \to Y) = 1$’ im Vergleich mit dem Sachverhalt $p(X \to Y) = 1$ *vollständig* wahr ist. Die Werte w und p stimmen zwar in diesem Fall überein, müssen es aber nicht (vgl. unten).

Objekt-sprachlich bzw. real: Sachverhalt $p(X \to Y) = 1$	$X \to Y$
Meta-sprachlich: Satz ‚$p(X \to Y) = 0$’	‚$\neg(X \to Y)$’
Wahrheitsgrad: w = 0	

In diesem meta-sprachlichen Ansatz kann ‚$p(X \to Y) = 1$’ natürlich auch falsch sein, dann gilt eben ‚$p(X \to Y) = 0$’ bzw. ‚$p\neg(X \to Y) = 1$’.

2) <u>*quantitative* Sätze wie $p(X \to Y) = r/n$</u>

Hier wird erstens p vollständig quantifiziert, kann also nicht nur 2 Werte 1 und 0 annehmen, sondern alle möglichen Werte zwischen 1 und 0: $0 < p < 1$. Das verlangt nicht zwangsläufig, auch die Wahrheit w vollständig zu quantifizieren, es bietet sich aber an.

• objekt-sprachlicher Ansatz

Nehmen wir als Beispiel: $p(X \to Y) = 4/5$. Hier können wir folgende Entsprechungen zwischen p und p aufstellen:

$p(X \to Y) = 4/5$	$w(X \to Y) = 4/5$	„$X \to Y$ ist in 4/5 Fällen bzw. zu 4/5 wahr“

Wenn $X \rightarrow Y$ den Wert $p = 4/5$ besitzt, dann besitzt es auch den Wert $w = 4/5$. Problematisch ist, die *Negation* zu $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ anzugeben. Sie lautet nicht $p(X \rightarrow Y) = 0$, auch nicht $p(X \rightarrow Y) = 1/5$, schon gar nicht $p\neg(X \rightarrow Y) = 1/5$; dieser Wert ist vielmehr äquivalent $p(X \rightarrow Y) = 4/5$. Zunächst gilt als Negation einfach: $p(X \rightarrow Y) \neq 4/5$. Das bedeutet entsprechend: $w(X \rightarrow Y) \neq 4/5$. Dabei ist kein eindeutiger Wert anzugeben, er kann sein: 5/5, 3/5, 2/5, 1/5 oder 0/5.

Vollständige Wahrheit oder vollständige Falschheit zeigen folgende Beispiele:

$p(X \rightarrow Y) = 5/5 = 1$ $w(X \rightarrow Y) = 5/5 = 1$ „$X \rightarrow Y$ ist in 5/5 Fällen bzw. zu 5/5 wahr“

$p(X \rightarrow Y) = 0/5 = 0$ $w(X \rightarrow Y) = 0/5 = 0$ „$X \rightarrow Y$ ist in 0/5 Fällen bzw. zu 0/5 wahr“

Zur Erläuterung: Hier wird $X \rightarrow Y$ (wie früher beschrieben) so interpretiert, dass p *variabel* ist, also nicht implizit $p = 1$ gilt.

Also auch bei Quantifizierung gilt im Objekt-sprachlichen Bereich: $p = w$.

Noch ein Prozent-Beispiel: Wenn 80% aller X die Eigenschaft Y haben, dann kann man sagen: Die Relation „wenn X, dann Y“ ist zu 80% realisiert und sie ist zu 80% wahr.

Vorsicht: $p(X \rightarrow Y) = 0{,}8$ ist *nicht* zu deuten als: „$p(X \rightarrow Y) = 0{,}8$“ ist zu 80% wahr. Sondern als: „$X \rightarrow Y$“ ist zu 80% wahr.

• meta-sprachlicher Ansatz

Hier arbeiten wir mit der meta-sprachlichen Deutung. Wir vergleichen einen *Sachverhalt* mit einem *Satz*. Angenommen der *Sachverhalt* ist $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, der *Satz* ist ‚$p(X \rightarrow Y) = 5/5$’. Bei einem *2-wertigen* Wahrheitsbegriff sagen wir dann, der Satz ist falsch. Nehmen wir andererseits den Satz ‚$p(X \rightarrow Y) = 1/5$’. Seine Aussage weicht offensichtlich viel stärker von dem realen Sachverhalt ab. Von daher bietet es sich an, nicht nur zwischen „wahr“ und „falsch“ zu unterscheiden, sondern unterschiedliche *Grade* von Wahrheit bzw. Falschheit (vgl. hierzu auch 1-3-0-2).

Der Wahrheits-Grad wird so berechnet, dass man den *Betrag der Differenz* (zwischen Sachverhalt und Satz) von 1 subtrahiert.

Das soll allgemein und an drei Beispielen vorgeführt werden:

Der Ausgang-Sachverhalt ist wieder: $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ bzw. 5/5.

Objekt-sprachlich bzw. real: Sachverhalt $p(X \rightarrow Y) = r/n$	z. B. 4/5
Meta-sprachlich: Satz ‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’	z .B. 1/5
Wahrheitsgrad: $w[$‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’$] = 1 - \lvert r/n - s/n \rvert$	$1 - \lvert 4/5 - 1/5 \rvert =$ $5/5 - 3/5 = 2/5$

Objekt-sprachlich bzw. real: Sachverhalt $p(X \rightarrow Y) = r/n$	z. B. 4/5
Meta-sprachlich: Satz ‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’	z .B. 4/5
Wahrheitsgrad: $w[$‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’$] = 1 - \lvert r/n - s/n \rvert$	$1 - \lvert 4/5 - 4/5 \rvert =$ $1 - 0 = 1$

Objekt-sprachlich bzw. real: Sachverhalt $p(X \rightarrow Y) = r/n$	z. B. 5/5
Meta-sprachlich: Satz ‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’	z .B. 0/5
Wahrheitsgrad: $w[$‚$p(X \rightarrow Y) = s/n$’$] = 1 - \lvert r/n - s/n \rvert$	$1 - \lvert 5/5 - 0/5 \rvert =$ $5/5 - 5/5 = 0$

Wir können das auch wie folgt darstellen:

$w[$‘$p(X \rightarrow Y) = 4/5$’, $p(X \rightarrow Y) = 1/5] = 2/5 = 0{,}4$.

D. H. der Wahrheits-Grad des Satzes ‘$p(X \rightarrow Y) = 4/5$’ in Relation zu dem Sachverhalt $p(X \rightarrow Y) = 1/5$ ist 2/5 bzw. 0,4.

Wichtig ist festzuhalten: Anders als im objekt-sprachlichen Bereich (in dem gilt p = w) gibt es im meta-sprachlichen Bereich keine zwingende Verbindung zwischen empirischer Wahrscheinlichkeit und empirischer Wahrheit. Ein Satz mit jeder empirischen Wahrscheinlichkeit von 0 bis 1 kann jeden Wahrheitsgrad von 0 bis 1 besitzen.

4-1-5-3 EMPIRISCHE WAHRHEIT – THEORETISCHE WAHRHEIT

Empirische und theoretische Wahrheit

Man könnte zunächst meinen, es gilt folgende Zuordnung:

Synthetische Sätze: *empirisch* wahr oder falsch

Analytische Sätze: *theoretisch* wahr (Tautologie) oder falsch (Kontradiktion)

Dies ist aber nicht der Fall. Die genauen Verhältnisse sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, erst für *analytische* Sätze, dann für *synthetische*.

• analytische Sätze

Erstens, zur theoretischen Wahrheit:

– Tautologien sind *theoretisch* vollständig wahr.

– Kontradiktionen sind *theoretisch* gar nicht wahr (bzw. vollständig) falsch.

Zweitens, zur empirischen Wahrheit:

– Tautologien sind auch *empirisch* wahr

– Kontradiktionen sind auch *empirisch* falsch

So ist der material-tautologische Satz ‚jeder Ehemann ist verheiratet' auch *empirisch* wahr, ebenso der formal-analytische Satz ‚jeder Ehemann ist ein Ehemann', andererseits ist er aber empirisch *ohne Information.* Und der kontradiktorische Satz ‚jeder Ehemann ist unverheiratet' ist auch empirisch falsch, allerdings ist er empirisch *sinnlos*.

Dabei gilt: tautologisch ⇒ empirisch wahr, kontradiktorisch ⇒ empirisch falsch.

Dem entspricht in der Modal-Logik:

notwendig ⇒ tatsächlich, unmöglich ⇒ nicht tatsächlich.

Hier besteht allerdings die Gefahr eines Missverständnisses. Aus einem *analytisch-tautologischen* Satz kann nie logisch ein *synthetischer* Satz folgen; sondern eine Tautologie impliziert logisch nur wiederum eine Tautologie:

Tautologie ⇒ Tautologie

Man darf also „tautologisch ⇒ empirisch wahr" nicht so verstehen, als folge hier ein synthetisch wahrer Satz logisch aus einer Tautologie. Sondern gerade umgekehrt: aus jedem beliebigen synthetischen Satz folgt logisch jede beliebige Tautologie.

Man muss unterscheiden: Wenn ein Satz Φ *theoretisch* wahr (tautologisch) ist, dann ist er (also derselbe – tautologische – Satz) auch *empirisch* wahr. Aber aus einer Tautologie folgt nicht die empirische Wahrheit irgendeines *anderen* synthetischen Satzes. Diese Zusammenhänge sind im Punkt 0 – 5 schon erläutert worden.

Noch einmal: Man könnte einwenden, die analytischen Tautologien und Kontradiktionen haben gar keinen Bezug zur empirischen Welt, sie sind darauf nicht anzuwenden. Aber ich halte diese Auffassung für falsch. Natürlich kann ich eine *empirische* Untersuchung machen, ob alle Ehemänner auch Ehemänner sind – notwendig und sinnvoll ist das zwar nicht, aber doch möglich.

• synthetische Sätze

– Erstens, zur empirischen Wahrheit:

synthetische Sätze sind *empirisch* wahr oder *empirisch* falsch – bzw. haben sie ggf. einen *Grad* empirischer Wahrheit.

– Zweitens, zur theoretischen Wahrheit:

synthetische Sätze haben auch einen *Grad von theoretischer Wahrheit* zwischen 0 und 1
So ist z. B. der Satz ‚jeder Ehemann ist Vater' empirisch wahr oder falsch (bzw. partiell wahr) – und sein Tautologie-Grad (< 1 und > 0) hängt davon ab, wie viele Ehemänner es gibt.

Es kommt also – nach meiner Theorie – *synthetischen* Sätze auch eine theoretische Wahrheit oder Falschheit zu. Allerdings ist m. E. ein synthetischer Satz nie *tautologisch* (= *vollständig* theoretisch wahr) und nie *kontradiktorisch* (= *vollständig* theoretisch falsch), sondern er besitzt einen nur einen gewissen *Grad an theoretischer Wahrheit*, einen *Tautologie-Grad*.

Z. B. besitzt der Satz (mit Implikation → geschrieben) ‚x ist verheiratet → x ist glücklich' einen Tautologie-Grad von 3/4 = 0,75. Diese *theoretische* Wahrheit eines synthetischen Satzes ist *unabhängig* von seiner empirischen *Wahrheit*; auch ein Satz mit einer hohen theoretischen Wahrheit (z. B. 0,9, aber < 1) kann empirisch falsch sein, und ein Satz mit einer niedrigen theoretischen Wahrheit (z. B. 0,1, aber > 0) kann empirisch wahr sein.

	theoretische Wahrheit	empirische Wahrheit
analytischer Satz		
Tautologie	wahr	wahr (redundant)
Kontradiktion	falsch	falsch (sinnlos)
synthetischer Satz	partiell wahr partiell falsch ($> 0 \wedge < 1$)	wahr oder falsch

• Zukunfts-Aussagen
Ich möchte hier noch auf ein besonderes Problem hinweisen, das schon Aristoteles aufzeigte. Das Beispiel von Aristoteles war: ‚Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden'.

Die *theoretische* Wahrheit dieses Satzes ist unproblematisch, es handelt sich um einen synthetischen Satz mit einem Wert $p^T = w^T = 1/2$.

Wie sieht es aber mit der *empirischen* Wahrheit aus? Anscheinend kann der Satz – „heute" gesprochen – weder wahr noch falsch sein, weil am Vortag noch nicht sicher feststeht, ob das Ereignis eintrifft. Jan Lukasiewicz führte daher einen dritten Wahrheitswert „neutral" ein.

Ich halte das nicht für nötig bzw. nicht für richtig. Hier wird die *physikalische* Thematik der *Zeit* mit der Logik vermischt, aber die Zeit hat mit der Logik nichts zu tun. Die Logik ist zeitlos (atemporal) bzw. ewig, Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft sind irrelevant für die Logik. Der Satz ‚Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden' ist eben dann wahr, wenn morgen eine Seeschlacht stattfindet bzw. stattfinden wird. Und falsch, wenn das nicht der Fall ist. Die Frage, *wann* der Satz geäußert wird, ist für die Logik nicht von Bedeutung.

4-1-5-4 EMPIRISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT – THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Wir können jeder *empirischen Wahrscheinlichkeit p* eine *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T zuordnen, entsprechend einen Grad theoretischer Wahrheit bzw. einen Tautologie-Grad, wobei allerdings die *absoluten* Werte der empirischen Wahrscheinlichkeit benötigt werden. Die Formeln dafür habe ich im Text, vor allem im Kapitel 3, dargestellt.

Man kann eindeutig von p auf p^T schließen, der umgekehrte Schluss von p^T auf p ist aber nicht immer eindeutig.

Ein Beispiel:

$p(X \leftrightarrow Y)$	p^T
4/4	1/16
3/4	4/16
2/4	6/16
1/4	4/16
0/4	1/16

Man sieht:
Von p auf p^T sind eindeutige Schlüsse möglich: z. B. $p = 4/4 \Rightarrow p^T = 1/16$
Aber umgekehrt gilt das nur teilweise, je nach der betreffenden Struktur.
Aus $p^T = 1/16$ kann man nicht eindeutig ableiten, es ist p = 4/4 oder p = 0/4 möglich, also:

$$p^T = 1/16 \Rightarrow p = 4/4 \vee p = 0/4$$

Andererseits aus $p^T = 6/16$ ist ein sicherer Schluss möglich: $p^T = 6/16 \Rightarrow p = 2/4$.
Wenn man allerdings 6/16 kürzt, erhält man 3/8. Und für 3/8 gilt:

$$p^T = 3/8 \Rightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 1/3 \vee p(X \leftrightarrow Y) = 2/3$$

Sonderfälle sind, wenn $p^T = 1$ oder $p^T = 0$. Z. B.:

$$p^T[X \Rightarrow X] = 1 \Rightarrow p(X \Rightarrow X) = 1.$$

Auf diese Verhältnisse bin ich schon früher eingegangen.

4-1-5-5 MODALITÄT

Das Thema Modalität passt zu dem Thema *Wahrheit und Wahrscheinlichkeit*, denn Modalität lässt sich auch als eine besondere Form von Wahrheit oder Wahrscheinlichkeit verstehen, vor allem im Sinne der *theoretischen* Wahrscheinlichkeit p^T und der *theoretischen* Wahrheit w^T.

Die eigentliche, *alethische* Modal-Logik behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich* u. ä.

Wie ich schon gezeigt habe, ist die Modal-Logik auf eine *normale* Logik zurückzuführen. Allerdings lässt sich auf der *Aussagen-Logik* ausschließlich eine Modal-Logik aufzubauen, die nur *zwei* Werte unterscheidet: „*notwendig*" und „*unmöglich*" (bzw. „notwendig, dass nicht"). Für Einbeziehung von „möglich" und „möglich, dass nicht" benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere, *quantitative* Logik, wie sie in diesem Buch vorgestellt wird.

Im vorliegenden Kapitel über Aussagen-Logik beschränke ich mich daher auf die Analyse der Modal-Werte „notwendig" und „unmöglich". Dabei kann man die modal-logischen Werte mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T quantifizieren, ja diese quantitativen Werte zur Definition verwenden.

Und zwar gilt folgende Entsprechung:

Notwendig (N) = tautologisch	$p^T = 1$ bzw. $w^T = 1$
Unmöglich (U) = kontradiktorisch	$p^T = 0$ bzw. $w^T = 1$

Notwendig ist somit eine Relation, die *sicher* ist, deren Gültigkeit 100%ig zu erwarten ist, die andererseits keine Information beinhaltet.
Unmöglich ist eine Relation, die mit 0% zu erwarten ist, deren Ungültigkeit somit sicher ist.

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.
Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch
Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *in Beziehung* zu einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist *logische Folge* oder kontradiktorische „Folge" der anderen Relation.

- *Notwendigkeit* (Tautologie)
  - absolut

    z. B.: $X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) $p^T[X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X] = 1$

    Hier kann man auch nur schreiben 'Notwendig($X \vee \neg X$)', denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig" wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.

    Allgemein: notwendig(Φ) $=_{df}$ $p^T[{}^{+}\Phi^{+}] = 1$ oder einfacher $p^T[\Phi] = 1$ (vgl. unten)
  - relativ

    z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) $p^T[Y, X \wedge Y] = 1$

    Hier bietet sich die *Implikation* oder die *Positiv-Implikation* an, z. B.:

    $p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 1$

    Allgemein: notwendig(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$

- *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)

  Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht" oder „nicht möglich" darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.
  - absolut

    z. B. $X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) $p^T[X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X] = 0$

    Allgemein: unmöglich(Φ) $=_{df}$ $p^T[{}^{-}\Phi^{-}] = 0$
  - relativ

    z. B.: $(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

    Unmöglich[$(X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X)$] $p^T[(X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X)] = 0$

    z. B. $p^T[(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)] = 0$

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich" mittels der normalen Implikation ist nicht sehr überzeugend, denn $X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich (weil kontradiktorisch), es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch *relativ* unmöglich ist. Dies liegt an der schon mehrfach besprochenen Problematik, dass die normale Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn man von einer Tautologie auf eine Kontradiktion schließt.

Verwendet man nämlich die *Positiv-Implikation*, ergibt sich ein anderes Bild (zur Vereinfachung verwende ich U = Unmöglich):

Es gibt bei der Positiv-Implikation 2 Möglichkeiten, „Ψ ist unmöglich in Relation zu Φ" zu bestimmen:

1) $\Phi *\!\Rightarrow \neg\Psi$ 2) $\Phi *\!\not\Rightarrow \Psi$

Wie ich in 2-1-2-2 erläutert habe: Obwohl man zunächst denken könnte, diese Ausrücke sind äquivalent, kann eine *Tautologie* jedoch nicht mit einer *Kontradiktion* logisch äquivalent sein.

Ich wähle im Folgenden die einfachere Bestimmung über $\Phi *\!\not\Rightarrow \Psi$. Allerdings hätte auch die Bestimmung über $\Phi *\!\Rightarrow \neg\Psi$ ihre Vorteile, ist sogar unproblematischer.

So kann man bestimmen: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ $\Phi *\!\not\Rightarrow \Psi$

Mit Verwendung von p^T: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi *\!\not\Rightarrow \Psi] = 0$

z. B. : $*U(Y, (X *\!\rightarrow \neg Y) \wedge X) \Leftrightarrow (X *\!\rightarrow \neg Y) \wedge X *\!\not\Rightarrow Y$

mit p^T: $*U(Y, (X *\!\rightarrow \neg Y) \wedge X) \Leftrightarrow p^T[(X *\!\rightarrow \neg Y) \wedge X *\!\not\Rightarrow Y] = 0$

Da ich Zeichen für die Relatoren verwende, die immer schon angeben, ob eine tautologische oder kontradiktorische Relation vorliegt, also z. B. $\Rightarrow$ versus $\not\Rightarrow$, ist die Information $p^T = 1$ bzw. $p^T = 0$ allerdings eigentlich redundant, nämlich doppelt.

4 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

4-2-0 Einführung

Ich will in 4-2, wie schon manchmal zuletzt und auch zukünftig, partiell auf eine *numerische Differenzierung* der *Unterkapitel* (z. B. in 4-2-0-1- bis 4-2-0-5) verzichten, wenn der Inhalt es nicht erforderlich macht, weil der Text nicht zu sehr ausgedehnt werden soll.

4-2-1 Implikation

4-2-1-1 EINFACHE TAUTOLOGIEN

Einfache Relationen sind solche, in denen – grammatisch gesprochen – nur *eine* Prädikat-Variable vorkommt, z. B. Fx mit der Prädikatvariable ‚F'.

Generell gilt für die tautologische Implikation: $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$.
Ich nehme hier das Beispiel des *Schlusses* von „alle": Λ auf „einige": V.

- *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] = 1$

- *Prädikaten-logisch*: $p^T[(Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n) \Rightarrow (Fx_1 \vee ... \vee Fx_n] = (2/2)^n = 1$

Die *Berechnung von p^T* sei am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) – mittels der *Wahrheitstafel* – veranschaulicht. Auch bei den folgenden Fällen werde ich die Tabellen-Wahrheitstafel nutzen.

	Fx_1	$\wedge$	Fx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\vee$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	–	–	+	+	+	–
3	–	–	+	+	–	+	+
4	–	–	–	+	–	–	–
		1+		4+		3+	

Hier gilt : $p^T[(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2] = (2/2)^n = (2/2)^2 = 4/4 = 1$

4-2-1-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIEN

Komplexe Relationen sind solche, in denen, grammatisch gesprochen, mindestens *zwei* Prädikatvariablen vorkommen, z. B. ‚F' und ‚G' (außerdem außen-logische Relatoren wie →).

Ich nehme hier das Beispiel des Schlusses von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ auf $Vx(Fx \rightarrow Gx)$.

- *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

• *Prädikaten-logisch*:
$p^T[(Fx_1 \to Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \to Gx_n) \Rightarrow (Fx_1 \to Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \to Gx_n)] = (4/4)^n = 1$

Die *Berechnung von p^T* sei wieder am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) veranschaulicht:

$p^T[\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)]$, für n = 2 (vereinfacht)

	Fx_1	$\to$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\to$	Gx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\to$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\to$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−	+	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				16+				15+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)
$p^T[(Fx_1 \to Gx_1) \wedge (Fx_2 \to Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \to Gx_1) \vee (Fx_2 \to Gx_2)] = (4/4)^2 = 16/16 = 1$

Quantoren-logisch (generell und konkret bei n = 2)
Hier werden, wie auch bei den folgenden Beispielen, zusätzlich die p^T-Werte für die *synthetischen Teil-Relationen* und für den Schluss mit der *Positiv-Implikation* $*\Rightarrow$ angegeben.

– synthetisch:
$p^T[\Lambda x(Fx \to Gx)]$ $= (3/4)^n$ $= (3/4)^2$ $= 9/16$ $= 0{,}56$
$p^T[Vx(Fx \to Gx)]$ $= (4^n - 1)/4^n$ $= (4^2 - 1)/4^2$ $= 15/16$ $= 0{,}94$
– analytisch:
$p^T[\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)]$ $= (4/4)^n$ $= (4/4)^2$ $= 16/16$ $= 1$
$p^T[\Lambda x(Fx \to Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \to Gx)]$ $= (3/3)^n$ $= (3/3)^2$ $= 9/9$ $= 1$

Die *Dezimal-Werte* sind immer auf *2* (zwei) Stellen nach dem Komma *gerundet*.
Auf die Werte für die *Positiv-Implikation* $*\Rightarrow$ wird gesondert noch näher eingegangen.
Es mag irritieren, dass man z. B. $p^T[\Lambda x(Fx \to Gx)]$ eine Formel mit ‚n' zuordnet, obwohl ‚n' in dem logischen Ausdruck gar nicht vorkommt. Man muss für Λ(alle) hier n/n einsetzen, ansonsten verweise ich auf die *prädikaten-logische* Umformung.
Übersichtlicher wird die Darstellung mit der schon mehrfach verwendeten *Vereinfachung*. D. h. man schreibt $\Lambda(X \to Y)$ für $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und entsprechend.
Dabei gilt:

$$p^T[\Lambda(X \to Y) \longrightarrow V(X \to Y)],\ \textit{für } n = 2\ \ \textit{(vereinfacht)}$$

	X_1	$\to$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\to$	Y_2	$\Rightarrow$	X_1	$\to$	Y_1	$\vee$	X_2	$\to$	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−	+	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				16+				15+			

Die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T (allgemein und konkret bei n = 2) ist entsprechend:

– synthetisch:

$p^T[\Lambda(X \to Y)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	$= 9/16$	$= 0{,}56$
$p^T[V(X \to Y)]$	$= (4^n - 1)/4^n$	$= (4^2 - 1)/4^2$	$= 15/16$	$= 0{,}94$

– analytisch:

$p^T[\Lambda(X \to Y) \Rightarrow V(X \to Y)]$	$= (4/4)^n$	$= (4/4)^2$	$= 16/16$	$= 1$
$p^T[\Lambda(X \to Y)\ {*}{\Rightarrow}\ V(X \to Y)]$	$= (3/3)^n$	$= (3/3)^2$	$= 9/9$	$= 1$

(Eine Wahrheits-Tabelle für n = 3 wird im Kapitel 5: „System“ gebracht.)

4-2-1-3 SEMI-ANALYTISCH: UMKEHRSCHLUSS

Ich habe eben den *strengen* Schluss „alle ⇒ einige“ behandelt. Jetzt geht es um den *Umkehr-Schluss* „einige ⟶ alle“, der aber nur *semi-analytisch* gilt.

• *Einfache* Relationen

„Wenn *einige* Objekte x die Eigenschaft F haben, dann haben *alle* x die Eigenschaft F“.

$$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$$

Dieser Schluss ist nicht kontradiktorisch, aber offensichtlich auch nicht streng folgerichtig, daher gilt grundsätzlich die theoretische Wahrscheinlichkeit: $0 < p^T < 1$.

$$p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] > 0 \wedge < 1$$

Man kann p^T auch *genauer* berechnen, wenn man – wie schon beschrieben – eine prädikatenlogische Umformung vollzieht:

$$p^T\ [(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$$

Als Beispiel wieder n = 2.

	Fx_1	$\vee$	Fx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	−	−	+	−	−
3	−	+	+	−	−	−	+
4	−	−	−	+	−	−	−
		3+		2+		1+	

Konkret gilt bei n = 2: $p^T [(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2 = 0{,}5$
Die Formel $1/2^{n-1}$ gibt allerdings den *gekürzten* Wert wieder. Wie man an obiger Wahrheitstabelle sieht, ist der reale, ungekürzte Wert $p^T = 2/4$. Um dieses Ergebnis zu bekommen, könnte man schreiben: $p^T = (2/4)^{2-1} = 2/4$. Wenn man allerdings generell

$$(2/4)^{n-1} \text{ statt } (1/2)^{n-1}$$

einsetzen würde, erhielte man auch nicht notwendig die realen Werte.
Z. B. bei n = 3: real 2/8, nach der Formel $(2/4)^{n-1}$: 4/16.

Exakt die *realen* Werte gibt dagegen folgende Formel wieder:

$$p^T = 2/2^n: \; 2/2^2 = 2/4, \; 2/2^3 = 2/8, \; 2/2^4 = 2/16 \text{ usw.}$$

Noch eine Anmerkung: Bei n = 1 ergibt sich $p^T = 1$. Wie ist das zu erklären? Die Relation würde dann lauten: $Fx_1 \Rightarrow Fx_1$, und das ist eben eine *Tautologie* mit dem Wert $p^T = 1$.

Dagegen ergeben sich bei n = 0 „verbotene“ Werte von < 0 oder > 1, was eben zeigt, dass diese Formel für n = 0 nicht definiert bzw. nicht anwendbar ist.

• *Komplexe Relationen*
Hier lautet der Umkehrschluss:
Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$
Prädikaten-Logik:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	−	−	+	+
8	+	−	−	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	+	+	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				15+				10+				9+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$

$(3^2 + 1)/ 4^2 = 10/16 = 5/8 = 0{,}63$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2)

– synthetisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 1)/4^n = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3/4)^n = (3/4)^2 = 9/16 = 0{,}56$

– analytisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/4^n = (3^2 + 1)/4^2 = 10/16 = 0{,}63$

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/(4^n - 1) = 3^2/(4^2 - 1) = 9/15 = 0{,}60$

(Die Wahrheits-Tabelle für n = 3 wird im Systematik-Teil, Kap. 5, aufgestellt.)

4-2-1-4 SEMI-ANALYTISCH: EXTRA

Hier geht es wiederum um den Schluss von „alle“ auf „einige“, aber in einer anderen, nämlich der allgemein verbreiteten Formalisierung:

Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Es wurde schon gezeigt, dass hier *kein strenger Schluss* vorliegt. Somit gilt:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] > 0 \wedge < 1$

Prädikaten-Logik:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

Auch hier soll p^T wieder am Beispiel n = 2 hergeleitet werden:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+
12	−	+	+	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	−	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
				9+				12+				7+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2)
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)] = (4^2 - 2^2)/4^2 = 12/16$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2)
– *Synthetisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	$= 9/16$	$= 0{,}56$
$p^T[Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 3^n)/4^n$	$= (4^2 - 3^2)/4^2$	$= 7/16$	$= 0{,}44$

– *Analytisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 2^n)/4^n$	$= (4^2 - 2^2)/4^2$	$= 12/16$	$= 0{,}75$
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (3^n - 2^n)/3^n$	$= (3^2 - 2^2)/3^2$	$= 5/9$	$= 0{,}56$

(Die Wahrheits-Tabelle für n = 3 wird wiederum im 5. Kapitel aufgestellt.)

Dieser Fall ist besonders interessant. Denn in der hier gezeigten Weise werden *All-Sätze* und *Existenz-Sätze* meistens formalisiert; es geht um das Modell 4 (vgl. 1-2-3-4 u. a.)
Es zeigt sich, dass bei dieser Formalisierung aus „alle F sind G“ nicht sicher folgt „einige F sind G“, obwohl dies i. allg. als sichere Folge, als gültiger Schluss gilt.
Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses hoch: Schon bei n = 2 ist $p^T = 0{,}75$ und *steigt* mit steigendem n:

bei n = 3	$p^T = 56/64 = 0{,}88$
bei n = 4:	$p^T = 240/256 = 0{,}94$
bei n = 5	$p^T = 992/1024 = 0{,}97$
bei n = 6	$p^T = 4032/4094 = 0{,}98$
bei n = 7	$p^T = 16256/16384 = 0{,}99$

4-2-1-5 KONTRADIKTION
Auf die komplizierte Situation der *Kontradiktion* bei der Implikation bin ich schon ausführlich eingegangen. Hier gilt ausschließlich: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Natürlich gilt dies auch für die Quantoren-Logik, z. B.:

$p^T[\Lambda x(Fx \vee \neg Fx) \not\Rightarrow Vx(Fx \wedge \neg Fx)] = 0$

4-2-2 Positiv-Implikation

4-2-2-1 TAUTOLOGIE
Es wurden oben schon Beispiele für Berechnungen der p^T bei der *Positiv-Implikation* gebracht, im Vergleich zum Wert der *normalen* Implikation.
Wählen wir auch hier das Beispiel: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$
In *prädikaten-logischer* Formalisierung:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Berechnen wir als Beispiel wieder *prädikaten-logisch* n = 2.

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$

Bei der Positiv-Implikation werden nur die Welten berücksichtigt, in denen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ *gültig* (+) ist.

Konkret werden also nur die *Welten* berücksichtigt, wo in der Wahrheitstafel unter dem $\wedge$ das Zeichen + steht. Bei den anderen Welten wird das Feld unter dem $*\Rightarrow$ leergelassen (man könnte auch □ für „nicht definiert“ hinschreiben).

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx)] \text{ für } n = 2$$

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−		+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+		+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−		+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+		+	−	−	+	−	+	+
8	+	−	−	−	−	+	−		+	−	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−		−	+	+	+	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−		−	+	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				9+				15+			

Eine andere Darstellungsmöglichkeit ist, dass man jeweils *die ganze Zeile löscht*, in der unter dem $\wedge$ das Zeichen – steht:

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2															
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5															
6															
7															
8															
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10															
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14															
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				9+				9+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) *\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (3/3)^2 = 9/9 = 1$

Quantoren-logisch (allgemein):
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (3/3)^n = 1$

4-2-2-2 TAUTOLOGIE EXTRA
Im obigen Fall habe ich *nur* als *Zentral-Relator* die *Positiv-Implikation* verwendet. Man könnte sie aber auch *in jedem Fall* verwenden (= *strikte* Positiv-Implikation). Dann ergibt sich:

- *Quantoren-logisch*: $\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx *\rightarrow Gx)$
- *Prädikaten- logisch*:
  $(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n *\rightarrow Gx_n) *\Rightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n *\rightarrow Gx_n)$

Berechnet man wieder n = 2, dann bleibt in der Tabelle nur *ein einziger* Fall übrig.

	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Alle anderen Möglichkeiten fallen heraus, weil gilt:
Fx_1 ist ungültig oder Fx_2 ist ungültig oder $(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)$ ist ungültig, also:
$\neg(Fx_1) \vee \neg(Fx_2) \vee \neg[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)]$
Daraus folgt für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T:

- *Prädikaten-logisch* (konkret für n = 2):
  $p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) *\Rightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)] = (1/1)^2 = 1/1 = 1$
- *Quantoren-logisch* (allgemein):
  $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx *\rightarrow Gx)] = (1/1)^n = 1$

4-2-2-3 SEMI-ANALYTISCHER UMKEHRSCHLUSS
Es geht um den *Umkehrschluss* zu 4-2-2-2, zunächst als generelle, *strikte* Positiv-Implikation.

- Strikte Positiv-Implikation (nur Verwendung der Positiv-Implikation)

Hier lautet der Umkehrschluss:
quantoren-logisch: $Vx(Fx *\rightarrow Gx) *\longrightarrow \Lambda x(Fx *\rightarrow Gx)$
prädikaten-logisch:
$(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n *\rightarrow Gx_n) *\longrightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n *\rightarrow Gx_n)$
Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2	$*\longrightarrow$	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
				3+				1+				1+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) *\longrightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_n *\rightarrow Gx_2)] =$
$1/(2^2 - 1) = 1/(4 - 1) = 1/3$

Quantoren-logisch (allgemein):

$p^T[\mathrm{V}x(Fx \ *\!\!\rightarrow Gx) \ *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \ *\!\!\rightarrow Gx)] = 1/(2^n - 1)$

• partielle Positiv-Implikation (Positiv-Implikation nur als *Zentral-Relator*)
Hier lautet der Umkehrschluss wie folgt:
Quantoren-logisch:

$\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \ *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-logisch:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n) \ *\!\!\longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Ich berechne p^T zunächst wieder am Beispiel n = 2:

$p^T[\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \ *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	→	Gx_1	∨	Fx_2	→	Gx_2	*⟶	Fx_1	→	Gx_1	∧	Fx_2	→	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	□	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	+	+	–	–	–	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				15+				9+				9+			

Hier steht nur *ein* – unter dem ∨, und zwar in der 6. Zeile, die daher als *nicht definiert* (□) gilt.
So ergibt sich ein Resultat, das dem bei der *normalen Implikation* sehr ähnlich ist:
dort ist $p^T = 10/16$, hier ist $p^T = 9/15$.
Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ *\!\!\longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$
$3^2/(4^2 - 1) = 9/(16 - 1) = 9/15 = 0{,}6$

Quantoren-logisch (allgemein):

$p^T[\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \ *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/(4^n - 1)$

4-2-2-4 SEMI-ANALYTISCH EXTRA

Hier wird eine *andere Formalisierung* für den Schluss von „alle“ auf „einige“ verwendet.
Quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ *\!\!\longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$

Prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \;\; {*}\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$$

Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T bzw. des *Grades der logischen Folge* wiederum am Beispiel n = 2. Ich lösche wieder alle *nicht definierten* Zeilen bzw. Relationen.

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \; {*}\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] \textit{ für } n = 2$$

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\!\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2															
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–
5															
6															
7															
8															
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10															
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	+
14															
15	–	+	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
				9+				5+				5+			

prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \; {*}\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)]$
$= (3^2 - 2^2)/3^2 = (9 - 4)/9 = 5/9 = 0{,}56.$

quantoren-logisch (allgemein):

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \; {*}\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (3^n - 2^n)/3^n$$

Wie gesagt gilt für den Schluss von „alle“ auf „einige“:
Erstens, er wird üblicherweise formalisiert als: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
Zweitens, er gilt als strenger Schluss, also mit $\Rightarrow$.
Aber ich habe gezeigt, dass dieser Schluss mit der *normalen Implikation* nicht gültig ist (vgl. 4-1-2-4); und wie sich jetzt zeigt, ist er auch mit der Positiv-Implikation nicht gültig. Es ist nur ein *semi-analytischer* Schluss.

4-2-2-5 KONTRADIKTION

Bei der Kontradiktion ergibt sich immer $p^T = 0$. Bei der normalen Implikation gibt es nur *eine* Kontradiktion im extremen Fall: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Bei der Positiv-Implikation gibt es dagegen (wie beschrieben) verschiedene Möglichkeiten der Kontradiktion, beispielsweise etwa Position $*\!\not\Rightarrow$ Negation. Daher ist es auch leicht, ein Beispiel zu geben, z. B. der Schluss von „alle“ auf „nicht alle“.

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \; {*}\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 0$$

4-2-3 Systematik

Es werden hier nur *ausgewählte Beispiele* gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten.

Dabei wird immer die einfachere *quantoren-logische* Form verwendet (anstatt der *prädikaten-logischen* Form).

Und es sei daran erinnert, dass gilt:

Λ(alle) = n/n

„Alle“ kann also sein:

1/1 (einer von einem), 2/2 (zwei von zwei), 3/3 (drei von drei), 4/4, 5/5, 6/6, 7/7 usw. usw.

4-2-3-1 EINFACHE TAUTOLOGIE

$p^T = (2/2)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

- $\neg Vx\neg(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda\neg(Fx)$
- $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda(Fx)$

4-2-3-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIE

$p^T = (4/4)^n$

- $\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$
- $\Lambda x(Fx \to \neg Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \to Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \to \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \to \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

4-2-3-3 EINFACH SEMI-ANALYTISCH

$p^T = 1/2^{n-1}$

- $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$
- $Vx\neg(Fx) \longrightarrow \Lambda x\neg(Fx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx)$
- $\neg\Lambda(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)$

4-2-3-4 KOMPLEX SEMI-ANALYTISCH

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

- $Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
- $Vx(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg\Lambda x(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

4-2-3-5 VERGLEICH
Ich bringe hier einen Vergleich von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

- einfach

	Implikation	Positiv-Implikation
einfach	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (2/2)^n = 1$	$\Lambda x(Fx) *\!\Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (1/1)^n = 1$
	$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/2^{n-1}$	$Vx(Fx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/(2^n - 1)$
komplex	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (4/4)^n = 1$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3/3)^n = 1$
	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (3^n - 2^n)/3^n$
	$Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3^n + 1)/4^n$	$Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = 3^n/(4^n - 1)$

- komplex

4-2-4 Inklusiv / Exklusiv

Hier geht es um das *Verhältnis* von „mindestens einige“ (*inklusiv*) zu „genau einige“ (*exklusiv*).

Ich beschränke mich hier auf *eine* Formalisierung (mit der Konjunktion):

- (mindestens) einige F sind G: $Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw. $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
- genau einige F sind G: $\exists x(Fx \wedge Gx)$ bzw. $(Fx_1 \wedge Gx_1) >\!< \ldots >\!< (Fx_n \wedge Gx_n)$

$p^T[Vx(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	><	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+
2	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−
5	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	+
8	+	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−
9	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	−	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	−
11	−	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	+
12	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−
13	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+
14	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−
15	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	+
16	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
				7+				15+				6+			

Es gelten folgende Werte für p^T:

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) >< (Fx_2 \wedge Gx_2)] =$
$(16 - 1)/16 = 15/16 = 0{,}94$

Quantoren-logisch (allgemein):
$p^T[Vx(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

Umgekehrt ist der Schluss *streng analytisch*:
$p^T[\exists x(Fx \wedge Gx)] \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (4/4)^n = 1$

4-2-5 Erweiterungen

4-2-5-1 INKLUSIVE MODAL-LOGIK

Ich habe schon mehrfach auf die Verbindungen von *Quantoren-Logik* und *Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T herstellen. Und zwar gilt (für eine *inklusive* Modal-Logik):

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

Man könnte entsprechend zu p^T einen Wert *p(modal)*: p^M einführen. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Andererseits ist ein solcher zusätzlicher Wert auch verzichtbar, denn offensichtlich gilt: $p^M = p^T$

Z. B. $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$.

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von *n* genauer bestimmen.

Ich hatte gezeigt, das gilt:

quantoren-logisch: $p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] = 1/2^{n-1}$ bzw.

prädikaten-logisch: $p^T [(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$
z. B. $p^T [(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen: ‚Der *Notwendigkeits-Grad* von $(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ beträgt 1/2'. Oder: ‚$Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ ist zu 50% notwendig'.

Es geht hier nur um eine *logische* (analytische) Bestimmung von Notwendigkeit usw., man könnte Modal-Begriffe auch *empirisch* bestimmen, z. B. im Hinblick auf *Kausalität*. Aber auch dann bleibt die logische Bestimmung fundamental.

4-2-5-2 EXKLUSIVE MODAL-LOGIK

Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich" als „*genau* möglich", es schließt somit „notwendig" aus. D. h. konkret: p^T[genau möglich] $< 1 \wedge > 0$. Anders formuliert:

$0 < p^T$[genau möglich] < 1

Wir hatten oben folgenden Schluss vorgeführt:

$p^T[\exists x(Fx \wedge Gx)] \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (4/4)^n = 1$

Modal-logisch wäre allgemein zu formulieren: Aus „genau möglich" folgt notwendig „möglich", es folgt also mit einem *Notwendigkeits-Grad* von $p^M = 1$.

4-2-5-3 ZEIT

Ich habe schon gezeigt, dass man vor allem die Quantoren-Logik auf die Dimension *Zeit* anwenden kann. Natürlich lässt sich dann auch p^T zuordnen. Allerdings geht es im Unterschied zur Modalität hier erst einmal um die *empirische* Wahrscheinlichkeit p, nicht um die *theoretische* p^T. Dabei gibt es folgende Entsprechungen:

Quantoren	Zeit	p
• alle	immer	1
• nicht alle	nicht immer	< 1
• einige	manchmal	> 0
• nicht einige	nicht manchmal	0

Generell kann man hier z. B. folgende „Zeit-Schlüsse" aufstellen bzw. folgende Werte von p^T feststellen:

p^T[immer $\Rightarrow$ manchmal] = 1

$0 < p^T$[nicht immer $\longrightarrow$ manchmal] < 1

Genauer kann man etwa folgendermaßen berechnen:
Es gilt quantoren-logisch: $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$

Man kann *zeit-logisch* umformulieren: $p^T[Vt(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda t(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$
Soll heißen: Wenn für *einige* Zeitpunkte (t) gilt: $Fx \rightarrow Gx$, dann gilt auch für *alle* Zeitpunkte (t): $Fx \rightarrow Gx$ mit der Wahrscheinlichkeit $(3^n + 1)/ 4^n$.
Angenommen, alle Zeitpunkte sind n = 10, dann ist $p^T = (3^{10} + 1)/ 4^{10}$

4-2-5-4 RAUM
Bei der Dimension *Raum* ergeben sich im Grunde dieselben Verhältnisse wie bei der Dimension *Zeit*:

Quantoren	Raum	p
• alle	überall	1
• nicht alle	nicht überall	< 1
• einige	mancherorts	> 0
• nicht einige	nirgends	0

Hier gilt „raum-logisch" z. B.:
p^T[überall $\Rightarrow$ mancherorts] = 1
p^T[nirgends $\Rightarrow$ nicht überall] = 1

4-2-5-5 KAUSALITÄT
Auch *kausal* kann man ähnliche Strukturen aufweisen:
Eine (vollständige) Ursache enthält *alle* Kausalfaktoren.
Eine Teil-Ursache enthält (mindestens) *einige* Kausalfaktoren.
Dann gilt z. B.
p^T[Ursache $\Rightarrow$ Teilursache] = 1
Oder etwas ausführlicher:
p^T[Φ ist Ursache von Ψ $\Rightarrow$ Φ ist (mindestens) Teilursache vonΨ] = 1
Auf *synthetisch-logische* Strukturen der Kausalität wurde bereits eingegangen, vor allem im Exkurs zu Kapitel 3, Punkt 5.3.

4 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

4-3-0 Einführung

Ich werde mich in diesem Unter-Kapitel 4-3 vorwiegend mit *Schlüssen* beschäftigen, mit dem *Grad ihrer Folgerichtigkeit*, und zwar primär unter Verwendung der *Positiv-Implikation*.

Bei der Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T eines Schlusses sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Ich erläutere das am Beispiel des *semi-analytischen* Schlusses $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$. Betrachten wir zunächst die *aussagen-logische*, qualitative Struktur des Schlusses, nämlich:

X ∨ Y	⟶	X ∧ Y
+ + +	+	+ + +
+ + –	–	+ – –
– + +	–	– – +
– – –	+	– – –

Strukturell hat $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ eine *theoretische* Wahrscheinlichkeit $p^T = 2/4 = 1/2 = 0{,}5$. Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ bzw. $\Phi \rightarrow \Psi$ besitzt zwar grundsätzlich eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 3/4$, aber bei einer (semi-)analytischen Relation kann sich das eben ändern, wenn für Φ und Ψ *komplexe* Relationen wie hier $X \vee Y$ und $X \wedge Y$ eingesetzt werden.

Man kann verschiedene Formen bzw. Varianten eines solchen Schlusses unterscheiden:

• $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	+ – – +	$p^T = 2/4$
• $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$	+ + + –	$p^T = 3/4$
• $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)$	+ – – –	$p^T = 1/4$
• $[(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)] \Rightarrow (X \wedge Y)$	+ + + +	$p^T = 4/4$

Wir werden nun die entsprechenden *quantitativen* Formen dieses Schlusses untersuchen, insbesondere auf ihre theoretische Wahrscheinlichkeit; quantitativ ergibt sich allerdings eine *zusätzliche* Möglichkeit, weil den *Einzel-Komponenten* unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden können.

- Gesamt-Relation:
  $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$
- Einzel-Komponenten:
  $p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Zusätzlicher Schluss auf Konklusion
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Bestätigung der Prämisse:
  $p((X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$
- Modus ponens:
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

Natürlich kann man diese Unterscheidungen auch für die *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$ treffen.

4-3-0-1 BERECHNUNG VON p^T EINER GESAMT-RELATION

Hier wird der Relation *als ganzes* eine *empirische* Wahrscheinlichkeit p zugewiesen, und zwar z. B. p = 1/5. Davon wird dann die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T berechnet. Nun gilt:

$$(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)\text{, entsprechend}$$

$$p((X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = p(X \leftrightarrow Y)$$

Daher kann man auch den p^T-Wert von $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ dem Wert der *synthetischen* Ä-quivalenz $X \leftrightarrow Y$ gleichsetzen. Also:

$$p^T[X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y] = p^T[X \leftrightarrow Y]$$

$$\text{Quantitativ: } p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5]$$

Und wie sich p^T-Wert von synthetischen (quantitativen) Relationen berechnen lässt, wurde bereits in 3-3-3 beschrieben.

$$p^T\,[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$$

$$\text{Somit : } p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$$

4-3-0-2 BERECHNUNG VON p^T BEI EINZEL-KOMPONENTEN

Hier werden der Prämisse $X \vee Y$ und der Konklusion $X \wedge Y$ *getrennt* empirische Wahrscheinlichkeiten p zugewiesen. Wählen wir z. B.: $p(X \vee Y) = 2/3$ und $p(X \wedge Y) = 1/3$.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt dann an, mit welchem Grad die Konklusion aus der Prämisse logisch folgt, also den *Grad der logischen Folge*. Es ergibt sich als theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. als Folge-Grad p^T:

$$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64 = 0{,}77$$

Wie sich diese und die folgenden Resultate berechnen lassen, wird später erläutert.

4-3-0-3 BERECHNUNG VON p^T BEI ZUSÄTZLICHEM SCHLUSS

Hier wird vom Schluss $p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ zusätzlich auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Dabei ergibt sich:

$$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64 = 0{,}42$$

4-3-0-4 BERECHNUNG VON p^T BEI BESTÄTIGTER PRÄMISSE

Man kann beim Schluss in 4-3-0-2 die Prämisse $p(X \vee Y) = 2/3$ noch *bestätigen*.

$$(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$$

Dies spielt gerade bei der *normalen Implikation* eine Rolle, die ja auch als wahr gilt, wenn die Prämisse falsch ist.

Wir haben es hier also mit einer *Konjunktion* zu tun. Man könnte vielleicht denken, man erhalte hier den p^T-Wert durch *Multiplikation*. Wie wir oben gesehen haben:

$$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64\text{, andererseits gilt wiederum:}$$

$$p^T[p(X \vee Y) = 2/3] = 27/64.$$

Gilt also im Beispiel $p^T = 49/64 \text{ x } 27/64 = 1323/4096 = 0{,}32$? Nein, denn man darf Wahrscheinlichkeiten nur *multiplizieren*, wenn die Glieder logisch *unabhängig* sind.
$p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ und $p(X \vee Y) = 2/3$ sind aber logisch abhängig.

Die richtige Rechnung lautet vielmehr:

$$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3] = 49/64 - 37/64 = 12/64 = 0{,}19$$

4-3-0-5 BERECHNUNG VON p^T BEIM MODUS PONENS
Hier wird aus der in 4-3-0-4 genannten Konjunktion auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Damit haben wir insgesamt das logische Gesetz des *Modus ponens* vor uns (wenn auch eben in einer quantitativen Form).

$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \wedge p(X \vee Y) = 2/3$
$\Rightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 64/64 = 1$

Wie man sieht, auch in diesem Fall ist der Modus ponens ein *strenges* Gesetz, führt zur einer strengen logischen Folge $\Rightarrow$.

Auf Berechnungen der Form in 4-3-0-2, auf Berechnungen des *Grades einer logischen Folge*, werde ich mich im Weiteren konzentrieren.

4-3-1 Implikation

4-3-1-1 HERLEITUNG DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT
Ich will hier nun herleiten, wie man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T für die (semi-) analytische *Implikation* berechnen kann. Dazu muss ich etwas ausholen.

Gehen wir von 3 *Individuen* x, y, und z aus (also n = 3) und fragen, wie sie auf 2 *Variablen* F und G verteilt sein können. F und G können als *Eigenschaften* oder auch als *Mengen* interpretiert werden. Es sind 4 Kombinationen von F und G möglich:

F+, G+ / F+, G– / F–, G+ /F–, G–.

Besser schreibt man mittels *Konjunktion* und *Negation*:

$F \wedge G$ / $F \wedge \neg G$ / $\neg F \wedge G$ / $\neg F \wedge \neg G$

Jedes Individuum kann nur *eine* Eigenschaftskombination besitzen bzw. nur Element *einer* Menge sein. Dabei ergeben sich insgesamt $2^6 = 64$ Möglichkeiten.

Der eine Extremfall ist, dass für x, y, z alle nur 1 Kombination gilt, z. B. nur $F \wedge G$, somit:

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$ (auf Indizes verzichte ich hier).

Da es hierfür nur 1 von insgesamt 64 Kombinations-Möglichkeiten gibt, gilt also: $p^T = 1/64$.

Welche Möglichkeiten gibt es, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$?

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge \neg Gz$
$Fx \wedge Gx$, $Fz \wedge Gz$, $Fy \wedge \neg Gy$
$Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$, $Fx \wedge \neg Gx$

Man kann nun von den speziellen *Verteilungen* abstrahieren und nur sagen, es gibt 3 Fälle, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$. Somit $p^T = 3/64$.

Präzise: $p^T[p(F \wedge G) = 2/3 \wedge p(F \wedge \neg G) = 1/3] = 3/64$.

Die genauen Tabellen hierfür bringe ich im Systematik-Teil (vgl. 5-3-2).

So kommt man zu folgender Verteilung. (Da im Folgenden von konkreten *Elementen* x, y, z abgesehen wird und nur die quantitativen Relationen zählen, verwende ich hier jetzt wieder die allgemeineren Variablen X und Y, also für F = X, für G = Y.)

4-3-1-2 TABELLE ZUR VERTEILUNG BEI n = 3
Erläuterung zur Tabelle:
Die *2) Zeile* bedeutet z. B.: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt und 1 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge \neg Y$, beträgt 3/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge \neg Y) = 1/3] = 3/64$

Oder allgemeiner: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt, beträgt 9/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3] = 9/64$.

Dies ergibt sich durch Addition der p^T-Werte aus den Zeilen 2), 5) und 6).

	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	a	b	c	d	
1)	3	0	0	0	1/64
2)	2	1	0	0	3/64
3)	1	2	0	0	3/64
4)	0	3	0	0	1/64
5)	2	0	1	0	3/64
6)	2	0	0	1	3/64
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64
9)	0	2	1	0	3/64
10)	0	2	0	1	3/64
11)	1	0	2	0	3/64
12)	1	0	1	1	6/64
13)	1	0	0	2	3/64
14)	0	1	2	0	3/64
15)	0	1	1	1	6/64
16)	0	1	0	2	3/64
17)	0	0	3	0	1/64
18)	0	0	2	1	3/64
19)	0	0	1	2	3/64
20)	0	0	0	3	1/64
					64/64

Die Einträge in der Tabelle ließen sich auch anders ordnen, aber m. E. ist diese Reihenfolge am übersichtlichsten.

Wir wollen nun das analytische Verhältnis von $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ untersuchen, zunächst als *Konjunktion*, dann als *Implikation*.

Stellen wir zunächst nur für n = 3 die theoretischen Wahrscheinlichkeiten von $p(X \rightarrow Y)$ und von $p(X \wedge Y)$ *getrennt* dar:

n	$p(X \rightarrow Y)$	p^T	$p(X \wedge Y)$	p^T
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$	
3	3/3	27/64	3/3	1/64
	2/3	27/64	2/3	9/64
	1/3	9/64	1/3	27/64
	0/3	1/64	0/3	27/64

4-3-1-3 DIE KONJUNKTION $p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\!\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/n$

Ehe wir uns der semi-analytischen *Implikation* zuwenden, betrachten wir zunächst die semi-analytische *Konjunktion*, weil sich so die Implikation anschließend besser verstehen lässt.

Wenden wir also die obige Verteilungs-Tabelle erst einmal auf folgende allgemeine semi-analytische Konjunktion an:

$p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/n$

Dabei ist daran zu erinnern, dass gilt:

$p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y)$ bzw. $r \geq s$, entsprechend:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{a}{a+b+c+d}$$

Wir untersuchen diese Relation für den Fall n = 3.

Z. B.: Wenn $p(X \rightarrow Y) = 2/3$, dann kann $p(X \wedge Y)$ folgende Werte annehmen: 2/3, 1/3, 0/3 (aber nicht 3/3).

Wenden wir nun die obige Tabelle auf diese *Konjunktion* an:

$p(X \rightarrow Y) = r/3 \ {}^{+}\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/3$

Dann erhalten wir für n = 3 die folgende Tabelle:

r	$p(X \rightarrow Y)$	${}^{+}\wedge^{-}$	$p(X \wedge Y)$	p^T	Zeile
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$		In Tabelle 4-3-1-2
3	3/3		3/3	1/64	1
			2/3	6/64	5, 6
			1/3	12/64	11,12,13
			0/3	8/64	17,18,19,20
2	**2/3**		2/3	3/64	2
			1/3	**12/64**	**7,8**
			0/3	12/64	14,15,16
1	1/3		1/3	3/64	3
			0/3	6/64	9,10
0	0/3		0/3	1/64	4
				64/64	

Erläuterung:

Nehmen wir als Beispiel: $p^T[(p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$

Dies bedeutet in Formeln:

$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \qquad \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 2/3 \qquad$ somit b = 1 $\qquad$ a + c + d = 2

$p(X \wedge Y) = 1/3 \qquad \frac{a}{a+b+c+d} = 1/3 \qquad$ somit a = 1 $\qquad$ b + c + d = 2

(wichtig: p ist immer die reale, *ungekürzte* Häufigkeit, kein gekürzter Wert)

Am *einfachsten* ist also, wie suchen nach Zeilen in der Tabelle, in denen gilt: b = 1 und a = 1.

Hierfür sind zwei Zeilen aus der Tabelle 4-3-1-2 relevant:

	a	b	c	d	p^T
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64

Nur in diesen zwei Zeilen gilt: $(a = 1) \wedge (b = 1)$. Man *addiert* die Wahrscheinlichkeiten p^T aus diesen beiden Zeilen: $6/64 + 6/64 = 12/64 = 3/16 = 0{,}19$.

Wie könnte eine allgemeine Formel für die Konjunktion $p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\!\wedge^{-}\ p(X \wedge Y) = s/n$ aussehen?

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass die *Multiplikation* der Einzelwahrscheinlichkeiten p^T nicht zum richtigen Ergebnis führt, weil $p(X \rightarrow Y)$ und $p(X \wedge Y)$ nicht voneinander unabhängig sind. $p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3] = 27/64$, ebenfalls $p^T[p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64$, die Multiplikation ergäbe $729/4096 = 0{,}18$. Der reale Wert ist aber wie gesagt $12/64 = 0{,}19$; die dezimale Nähe dieser beiden Werte ist vermutlich nur zufällig.

Ein andere Frage ist, ob gelten kann: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)] = p^T[X \wedge Y]$?
Dazu folgende Überlegung. Es gilt: $((X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)) \Leftrightarrow (X \wedge Y)$

Somit gilt auch: $p((X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)) = p(X \wedge Y)$

Somit auch: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)] = p^T[X \wedge Y]$

Nur hilft uns das hier gar nicht weiter. Denn diese Gleichung gibt p^T für die *Gesamtrelation* $p((X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)) = r/n$ an. Wir haben aber eine Relation vorliegen, bei der den *Einzelkomponenten* (ggf. unterschiedliche) Wahrscheinlichkeiten p zugeordnet werden, also:

$p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge \ p(X \wedge Y) = s/n$

Im Beispiel : $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ \wedge \ p(X \wedge Y) = 1/3$

Und die entsprechenden p-Werte müssen keinesfalls übereinstimmen, selbst wenn der p-Wert der Einzelkomponenten gleich dem der Gesamtrelation ist, z. B.:

$p^T[p((X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)) = 1/3] = p^T[p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64$

Aber: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 3/64$

(dies lässt sich obiger Tabelle entnehmen)

Nur in Ausnahmefällen ergibt sich hier eine Gleichheit, z. B. bei $p = 3/3$

$p^T[p((X \rightarrow Y) \wedge (X \wedge Y)) = 3/3] = p^T[p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/64$

$p^T[(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/64$

Die Entwicklung einer *allgemeinen Formel* zur Berechnung von

$p^T[(p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(X \wedge Y) = s/n]$

steht derzeit noch aus, ist aber nach den Vorarbeiten sicher durchzuführen.

4-3-1-4 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

Wenden wir nun die obigen Erkenntnisse über die semi-analytische *Konjunktion* auf verschiedene semi-analytische *Schlüsse* an. Dabei analysieren wir auch einen Schluss der *quantitativen Quantoren-Logik* und einen der *quantitativen Aussagen-Logik*, die aus systematischen Gründen eigentlich in die Unter-Kapitel 4-5 bzw. 4-4 gehörten; da ich mich dort aber (aus noch zu erklärenden Gründen) auf die *Positiv-Implikation* konzentriere, ziehe ich diese Schlüsse mit der *normalen Implikation* in dieses Unter-Kapitel 4-3 vor.

Zunächst zu dem *quantoren-logischen* Schluss, den wir z. B. schon aus 4-2-1-4 kennen.

$\Lambda(X \rightarrow Y) \longrightarrow V(X \wedge Y)$.

Er bedeutet : „Wenn für *alle* X gilt: X impliziert Y, dann gilt für *einige* X: X und Y".

Gemeint ist: „Wenn *alle* X zu Y gehören, dann gehören auch *einige* X zu Y".

Quantitativ lautet dieser Schluss: $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$.

Man kann den Schluss am besten darstellen, wenn man, als *Zentral-Relator*, statt der *Implikation* $\rightarrow$ die *Konjunktion* $\wedge$ verwendet. Es gilt ja: $\Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$

Hier bedeutet das:

$[p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0] \Leftrightarrow [\neg(p(X \rightarrow Y) = 1 \ {}^{+}\!\wedge^{-}\ \neg(p(X \wedge Y) > 0)]$

Man formt also die *Implikation* in eine *Konjunktion* um. Der Vorteil ist: Entsprechend ihrer Definition müssen bei der Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ auch die vielen Fälle mitgezählt werden, in denen Φ falsch ist, insgesamt gibt es *drei* Möglichkeiten: $\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi \wedge \neg\Psi$. Geht man dagegen von der Konjunktion aus, so gibt es nur *eine* Möglichkeit, man zählt nur die Fälle von $\Phi \wedge \neg\Psi$; und da diese Konjunktion *negiert* ist, also $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$, *subtrahiert* man den Wert für $\Phi \wedge \neg\Psi$ einfach vom Wert $p^T = 1$. Das hört sich vielleicht eher kompliziert an, wird aber unten am Beispiel veranschaulicht.

Ich bringe in der folgenden Tabelle die möglichen *Häufigkeits-Verteilungen* von:

$p(X \rightarrow Y) \wedge p(X \wedge Y)$, bei n = 3, mit den entsprechenden Werten von p^T

(die Tabelle entspricht im Wesentlichen der in 4-3-1-3, ist nur etwas erweitert, a + c + d, a und b werden gesondert angegeben):

r	$p(X \rightarrow Y)$			$\wedge$	$p(X \wedge Y)$		p^T
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		$\frac{a}{a+b+c+d}$	a	
3	**3/3**	3	0		3/3	3	1/64
					2/3	2	6/64
					1/3	1	12/64
					0/3	**0**	**8/64**
2	2/3	2	1		2/3	2	3/64
					1/3	1	12/64
					0/3	0	12/64
1	1/3	1	2		1/3	1	3/64
					0/3	0	6/64
0	0/3	0	3		0/3	0	1/64
							64/64

(Ich schreibe das *semi-analytische* $\wedge$ zuweilen der Einfachheit halber auch ohne Zusatz, ganz korrekt wird es in meiner Diktion als ${}^{+}\wedge^{-}$ geschrieben.)

Werten wir diese Tabelle nun aus im Hinblick auf unseren Schluss:

allgemein: $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$:

speziell: $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3$:

Dazu gehen wir am besten von der *Negation* der Implikation aus. Zunächst die Umformung in eine *Konjunktion*. Es gilt: $\Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$

Somit ergibt sich für die *Negation*: $\neg(\Phi \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\Phi \wedge \neg\Psi)$

Also: Die Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ ist nur *ungültig*, wenn Φ gültig und Ψ ungültig ist.

In unserem Fall gilt: $\Psi = p(X \wedge Y) > 0$.

$(X \wedge Y) > 0$ ist *falsch*, bedeutet $p(X \wedge Y) = 0$, formal:

$\neg(p(X \wedge Y) > 0) \Leftrightarrow p(X \wedge Y) = 0$

Der Schluss $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$ ist daher nur falsch, wenn:

$p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(X \wedge Y) = 0$

Konkret: Der Schluss $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3$ ist daher nur falsch, wenn:

$p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3$

Dies ist nur in *einem* Fall bzw. *einer* Zeile der obigen Tabelle gegeben (wenn r = 3, die 4. Zeile). Dort gilt: $p^T = 8/64$

Nun haben wir jetzt den *negativen* Fall $\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$ bzw. $(\Phi \wedge \neg\Psi)$ berechnet:

Konjunktion: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] = 8/64 = 0,13$ bzw.
Implikation: $p^T\neg[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = 8/64 = 0,13$

Daraus folgt für den *positiven* Fall $\Phi \rightarrow \Psi$ bzw. $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$:

Konjunktion: $p^T\neg[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] = 1 - (8/64)$ bzw.
Implikation: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = 1 - (8/64)$

$1 = 64/64 \quad 64/64 - 8/64 = 56/64$.

Unser gesuchtes Ergebnis ist also:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = 56/64 = 28/32 = 14/16 = 7/8 = 0,88$

(0,13 + 0,88 addieren sich nicht genau zu 1,0 wegen der Aufrundungen. Genau ergibt sich: 0,125 + 0,875 = 1.)

In 4-1-2-4 hatte ich im Bereich der *Quantoren-Logik* für diesen Schluss folgende allgemeine *Formel* zur Berechnung von p^T angegeben: $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

Man kann die Formel jetzt auf unseren Fall anwenden.

D. h. für n = 3: $p^T = (4^3 - 2^3)/4^3 = (64 - 8)/64 = 56/64$

Und man versteht hoffentlich nach der obigen Herleitung, wie sich die Formel begründet (wenn dies auch kein strenger Beweis ist).

Für diesen *quantoren-logischen* Schluss steht also eine *allgemeingültige* Formel zur Verfügung (dabei gilt: p = 1 bedeutet p = n/n, p > 0 bedeutet p > 0/n)

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0] = (4^n - 2^n)/4^n$

4-3-1-5 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

• $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$

Untersuchen wir zunächst einen Schluss der *quantitativen Aussagen-Logik*, nämlich:

$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$

Als konkretes *Beispiel* nehmen wir:

$p(X \rightarrow Y) = 3/3 = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3 = 1$

Auch hier formen wir, beim *Zentral-Relator*, die *Implikation* wieder in eine *Konjunktion* um:

$\neg(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = \neg 3/3)$

Für $\neg 3/3$ schreiben wir $\neq 3/3$, und das bedeutet hier konkret: $< 3/3$. Somit:

$\neg(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)$

D. h. wenn $p(X \wedge Y) = 3/3$ falsch ist, kann es sein: 2/3, 1/3 oder 0/3.

Ich schließe aus, dass $\neg 3/3$ auch für einen Wert > 1 oder < 0 steht, und dass ein *anderer Nenner* in Frage kommt; $\neg 3/3$ darf also z. B. nicht für 3/4 oder 2/5 stehen.

Für die Berechnung des gesamten Schlusses $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ zählen aber nicht nur die *Welten*, in denen gilt: $p(X \rightarrow Y) = 3/3$ und $p(X \wedge Y) = 3/3$. Sondern – gemäß der Definition der Implikation – zählen auch die Welten, in denen $p(X \rightarrow Y) = 3/3$ falsch ist, d. h. hier in denen $p(X \rightarrow Y) < 3/3$ ist (nämlich 2/3, 1/3 oder 0/3).

Konkret: *ungültig* (falsch) sind nur folgende Kombinationen:

$p(X \rightarrow Y)$	$p(X \wedge Y)$	p^T
3/3	2/3	6/64
	1/3	12/64
	0/3	8/64
		26/64

D. h. mit einer $p^T = 26/64$ ist der Schluss ungültig, somit ist er gültig mit einer $p^T = 1 - 26/64 = 38/64$. Also: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64 = 19/32 = 0,59$.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir jetzt eine allgemeine Tabelle für die Beispiel-Implikation aufstellen:

$p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$, für n = 3.
Dabei sei daran erinnert, dass gilt:
$p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$ bzw. $p(X \to Y) \geq p(X \wedge Y)$

r	$p(X \to Y)$	$\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T \longrightarrow$	$p^T \wedge \neg$	$p^T \wedge$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$		Negative Fälle : 1 – …	
3	3/3		3/3	38/64	6/64+12/64+8/64	1/64
			2/3	21/64	1/64+12/64+8/64	6/64
			1/3	49/64	1/64+6/64 + 8/64	12/64
			0/3	45/64	1/64+6/64+12/64	8/64
2	2/3		2/3	40/64	12/64+12/64	3/64
			1/3	49/64	3/64+12/64	12/64
			0/3	49/64	3/64+12/64	12/64
1	1/3		1/3	58/64	6/64	3/64
			0/3	61/64	3/64	6/64
0	0/3		0/3	64/64= 1	0/64	1/64
						64/64

Zur Erläuterung: Die 1. Zeile (unser Beispiel) ist z. B. wie folgt zu lesen:
$p^T[p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = p^T[\neg(p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)] =$

$1 - p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 2/3] - p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] -$
$p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] =$

$1 - (6/64 - 12/64 - 8/64) = 1 - 26/64 = 64/64 - 26/64 = 38/64$

Für den *deterministischen* Fall (beide Relationen p = 1) habe ich nun aus obiger und weiteren Tabellen eine *allgemeine Formel* zur Berechnung von p^T aufgestellt, nämlich:
$p^T[p(X \to Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n = 1] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$
Für unser Beispiel mit n = 3 ergibt sich, als Bestätigung des Wertes aus der Tabelle:
$p^T[p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = (4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64$

• $p(X \to Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3$
Als zweites Beispiel nehmen wir diesen *statistischen* Schluss.
Was ergibt sich hier für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T?

1) Negative Fälle: Ungültig ist die Relation, wenn gilt:
$p(X \to Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) \neq 2/3$, d. h. :
erstens: $p(X \to Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3$
zweitens: $p(X \to Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3$
$p(X \to Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 3/3$ ist logisch unmöglich, besäße also eine $p^T = 0$,
denn $p(X \to Y) \geq p(X \wedge Y)$.

2) p^T der negativen Fälle

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] = 12/64$

also: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) \neq 2/3] = 12/64 + 12/64 = 24/64$

3) Subtraktion der negativen Fälle

$1 - 24/64 = 64/64 - 24/64 = 40/64$

4) Resultat

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3] = 40/64 = 5/8 = 0{,}63$

Eine *allgemeingültige* Formel für $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n]$ habe ich bisher noch nicht entwickelt. Der erste Schritt könnte sein, eine Formel für die Konjunktion $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\!\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/n]$ herauszufinden.

Ich habe schon öfters darauf hingewiesen, dass die Verwendung der *normalen Implikation* $\rightarrow$ im quantitativen Bereich zu problematischen bis unbrauchbaren Ergebnissen führen kann. Das lässt sich auch hier wieder gut erkennen.

Plausibel für unseres normales Verständnis von Wenn-Dann-Relationen wäre (laut obiger Tabelle) beim Schluss $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ folgender Wert:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/64$

Real ist aber:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64$

Dazwischen liegen Welten.

Das ist ein Hinweis darauf, auch hier wieder mit der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ zu arbeiten.

4-3-2 Positiv-Implikation

Zunächst bringe ich eine *Tabelle*, die Übereinstimmungen und Unterschiede von p^T bei der *normalen Implikation* und der *Positiv-Implikation* sowie der *Konjunktion* an dem bekannten Beispiel aufzeigt:

$p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ (für n = 3, u.g. bedeutet *ungekürzt*)

Diese folgende Tabelle zeigt, dass der *Zähler* von p^T bei Verwendung von $\wedge$ und $*\!\!\rightarrow$ jeweils übereinstimmt, wenn man die ungekürzten Werte von $p^T[*\!\!\rightarrow]$ nimmt, nur der *Nenner* ist unterschiedlich. Es geht hier allein um den *Zentral-Relator*, bei $p(X \rightarrow Y)$ wird in jedem Fall der normale Implikator $\rightarrow$ verwendet.

Außerdem demonstriert die Tabelle, wie stark die Werte von $\rightarrow$ und $*\!\!\rightarrow$ differieren. Bei der Positiv-Implikation werden nur die Werte berechnet, wenn die Prämisse, also hier $p(X \rightarrow Y)$ *gültig* ist. Z. B.:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \ *\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/27 = 0{,}04$

Es gibt eben (bei n = 3) 27 von insgesamt 64 Möglichkeiten, dass $p(X \rightarrow Y) = 3/3$ gültig ist, und in 1 von diesen 27 Möglichkeiten ist auch $p(X \wedge Y) = 3/3$ gültig.

Wie gezeigt, erhält man bei der *normalen Implikation* hier den Wert $p^T = 38/64 = 0{,}59$. Zwischen diesen beiden Werten, $p^T = 0{,}04$ (Positiv-Implikation) und $p^T = 0{,}59$ (Normal-Implikation) besteht ein enormer Unterschied.

r	$p(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$, $\wedge$ bzw.$*\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T\rightarrow$	$p^T\wedge$	$p^T*\rightarrow$ u.g.	$p^T*\rightarrow$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$				
3	3/3		3/3	38/64	1/64	1/27	1/27
			2/3	21/64	6/64	6/27	6/27
			1/3	49/64	12/64	12/27	12/27
			0/3	45/64	8/64	8/27	8/27
2	2/3		2/3	40/64	3/64	3/27	1/9
			1/3	49/64	12/64	12/27	4/9
			0/3	49/64	12/64	12/27	4/9
1	1/3		1/3	58/64	3/64	3/9	1/3
			0/3	61/64	6/64	6/9	2/3
0	0/3		0/3	64/64	1/64	1/1	1/1
					64/64		

Konzentrieren wir uns aber jetzt auf die *Positiv-Implikation*: Die folgende Tabelle fokussiert noch einmal die Werte für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ $*\longrightarrow$ $p(X \wedge Y) = s/n$:

r	$p(X \rightarrow Y)$	$*\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T*\rightarrow$ u.g.	$p^T*\rightarrow$	$p^T*\rightarrow$ dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$			
3	3/3		3/3	1/27	1/27	0,04
			2/3	6/27	6/27	0,22
			1/3	12/27	12/27	0,44
			0/3	8/27	8/27	0,30
				27/27 = 1	27/27 = 1	
2	2/3		2/3	3/27	1/9	0,11
			1/3	12/27	4/9	0,44
			0/3	12/27	4/9	0,44
				27/27 = 1	9/9 = 1	
1	1/3		1/3	3/9	1/3	0,33
			0/3	6/9	2/3	0,66
				9/9 = 1	3/3 = 1	
0	0/3		0/3	1/1	1/1	1,00
				1/1 = 1	1/1 = 1	

Es geht nun darum, eine *Formel* anzugeben, durch die man allgemein die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T und damit den *Grad der Folgerichtigkeit* des hier gezeigten Schlusses berechnen kann. Ich habe folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \rightarrow Y) = r/n \ *\!\!\longrightarrow \ p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(2/3)^{r-s}(1/3)^{s}$$

Diese und entsprechende andere Formeln werde ich im folgenden Punkt 4-3-3 erläutern.

Abschließend hierzu ein Vergleich von *Implikation* und *Positiv-Implikation* (kurz: *Implikation) bei Varianten von Schlüssen – unter Rückgriff auf 4-3-0; dabei gehe ich von folgenden Beispielwerten aus: $p(X \vee Y) = 2/3$, $p(X \wedge Y) = 1/3$

- Einzel-Komponenten:
  Implikation:
  $p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64$
  *Implikation:
  $p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/27$
- Zusätzlicher Schluss auf Konklusion
  Implikation:
  $p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64$
  *Implikation :
  $p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) = 1/3) \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/12 = 1$
- Bestätigung der Prämisse:
  Implikation:
  $p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3] = 12/64$
  *Implikation:
  $p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3] = 12/64$
- Modus ponens:
  Implikation :
  $p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3)$
  $\Rightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 64/64 = 1$
  *Implikation :
  $p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3)$
  ${*}\Rightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/12 = 1$

Die Berechnungen für diese Werte sind dem vorausgegangenen Text zu entnehmen.

4-3-3 Systematik

In diesem Punkt beschränke ich mich (für den Zentral-Relator) nur auf Formeln für die *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$, weil diese wie beschrieben gerade im quantitativen Bereich der *Normal-Implikation* $\rightarrow$ deutlich überlegen ist. (Außerdem habe ich auch noch keine allgemeingültigen Formeln für die normale Implikation entwickelt.)

Es geht also allgemein um Schlüsse der Form: $p(\Phi) = r/n \;{*}{\longrightarrow}\; p(\Psi) = s/n$

Dabei möchte ich hier 6 unterschiedliche Formeln vorstellen.

Grundsätzlich gibt es 2 Typen von Formeln, welche *mit n* und welche *ohne n* (ausschließlich mit *r* und *s*); beide Typen werden verwendet.

Es mag verwundern, dass Formeln, die nicht auf den *Nenner n* Bezug nehmen, gültig sein können. Aber in der Tat ist der p^T-Wert von s/n in bestimmten Fällen nur von r abhängig (und unabhängig von n).

Strukturell unterscheide ich die Formeln nach:

- der *Prämisse* und • der *Konklusion*

• *Prämisse*: Bei der *Prämisse* p(Φ) = r/n differenziere ich zwischen Relationen mit $p^T = 3/4$, 2/4 und 1/4. *Tautologien* mit $p^T = 4/4 = 1$ sind weniger interessant. Erstens gilt für die Tautologie nicht nur $p^T = 1$, sondern auch immer p = 1. Außerdem gilt z. B.:

(Tautologie *⟶ Konjunktion) ⇔ Konjunktion

Und das gilt nicht nur für die Konjunktion, sondern für *jede* Relation; übrigens stimmt dieses Gesetz auch bei der *Normal*-Implikation.

Kontradiktionen mit $p^T = 0/4 = 0$ brauchen nicht berücksichtigt zu werden, denn bei der Positiv-Implikation gelten ja alle Schlüsse von einer Kontradiktion aus als *nicht definiert.*

• *Konklusion*: Schwieriger ist es mit der Konklusion p(Ψ) = s/n; ich habe verschiedene Prinzipen zur *Unterscheidung der Konklusion* getestet: Übereinstimmung von + mit der Prämisse in der Wahrheitstafel, Übereinstimmung von + und –, theoretische Wahrscheinlichkeit p^T u. a., aber kein Unterscheidungsprinzip erfüllt alle Anforderungen. Ich unterscheide jetzt wie bei der Prämisse nach p^T ($p^T = 3/4, 2/4$ oder 1/4), aber das ist keine vollständige Lösung.

In jedem Fall erfasst man mit den 6 Formeln *nicht alle* möglichen Schlüsse der Positiv-Implikation. So zeige ich 2 Formeln für einen Schluss von p(X → Y) = r/n aus. Aber z. B. für Schlüsse wie p(X → Y) *⟶ p(X ← Y) oder p(X → Y) *⟶ p(X) benötigte man modifizierte Formeln, wie die Tabellen in Kap. 5 zeigen. Ohnehin geht es hier nur um Schlüsse mit *zwei* Variablen, für mehrere Variablen wären die Formeln zu modifizieren. Es ist weiterer Forschungsarbeit vorbehalten, zusätzliche Formeln aufzustellen.

4-3-3-1 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 3/4$

Das sind X → Y, X ← Y, X ∨ Y oder X | Y.

Dabei unterscheide ich, in wie vielen Welten die *Konklusion* strukturell in der Wahrheitstafel positiv ist, also ein + unter dem Zentral-Relator besitzt; anders gesagt, wie hoch *strukturell* die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T der Konklusion ist.

Z. B.: X ↔ Y + – – +, also $p^T = 2/4$, X ∧ Y: + – – –, $p^T = 1/4$

Wie schon oben angemerkt, reicht dieses Kriterium der Unterscheidung allerdings nicht wirklich aus. Die folgende Angabe „semi-analytisch“ oder „analytisch“ bezieht sich auf die *qualitative* Struktur der Schlüsse, quantitativ kann sich eine Veränderung ergeben.

• Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden, jeweils in *quantitativer* Form:

(X → Y) *⟶ (X ↔ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ↔ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(Y) = s/n

• Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden (jeweils in quantitativer Form):

(X → Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n

4-3-3-2 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 2/4$ (Z. B. $X \leftrightarrow Y$, $X >< Y$)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden

$(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\Rightarrow} \ (X \rightarrow Y)$	quantitativ: $p(X \leftrightarrow Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \rightarrow Y) = s/n$
$X \ {*}{\Rightarrow} \ (X \vee Y)$	quantitativ: $p(X) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \vee Y) = s/n$

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^{s}(1/2)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\longrightarrow} \ (X \wedge Y)$	quantitativ: $p(X \leftrightarrow Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \wedge Y) = s/n$
$X \ {*}{\longrightarrow} \ (X \wedge Y)$	quantitativ: $p(X) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \wedge Y) = s/n$

4-3-3-3 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 1/4$ (Z. B. $X \wedge Y$, $X \nabla Y$)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y) \ {*}{\Rightarrow} \ (X \rightarrow Y)$	quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \rightarrow Y) = s/n$
$(X \wedge Y) \ {*}{\Rightarrow} \ (X \vee Y)$	quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X \vee Y) = s/n$

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y) \ {*}{\Rightarrow} \ X$	quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(X) = s/n$
$(X \wedge Y) \ {*}{\Rightarrow} \ Y$	quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow} \ p(Y) = s/n$

4-3-3-4 DEMONSTRATION: VOLLSTÄNDIGER SCHLUSS

Ich möchte mich für eine genaue Demonstration auf zwei Beispiele beschränken (zunächst in 4-3-3-4 einen *strukturell gültigen* Schluss, dann in 4-3-3-5 einen *strukturell partiell gültigen* Schluss).

Dabei bringe ich jeweils:

- zunächst den Schluss, der die mögliche *empirische* Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion* angibt (aus dem Wert p der *Prämisse* ableitet)
- dann die Formel, mit der man die zugehörige *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T des obigen Schlusses bestimmt.

Als Beispiel für den strukturell *vollständigen*, d. h. gültigen Schluss nehme ich die *Abtrennungsregel* bzw. *Simplifikationsregel* (die gilt auch für die Normal-Implikation $X \wedge Y \Rightarrow Y$).

Für die *Abtrennungsregel* $X \wedge Y \ {*}{\Rightarrow}\ Y$ (mit Positiv-Implikation) ergibt sich:

• Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse*
auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

□ qualitative Basis: $X \wedge Y \ {*}{\Rightarrow}\ Y$
□ quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) \geq r/n$
bzw. $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n$

□ Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ {*}{\Rightarrow}\ \dfrac{a+c}{a+b+c+d} \geq \dfrac{r}{n}$

bzw. $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ {*}{\longrightarrow}\ \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

Dabei gilt $r \leq s$, also $s = r, r+1, r+2, \ldots, n$. Nur, wenn man $r \leq s$ bzw. diese alternativen Werte hinzufügt, gilt der *strenge* Schluss auch in der Form $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = s/n$.

Ansonsten muss man $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n$ als *partiellen* Schluss deuten.
Es gibt nämlich 2 Alternativen zu unterscheiden:

Erstens, man gibt für p(Y) nicht eine bestimmte Lösung an, sondern eine *Auswahl* mehrerer Möglichkeiten, dann gilt der *strenge* Schluss: $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) \geq r/n$.

Zweitens, man gibt für die Konklusion p(Y) einen *bestimmten* Wert an, z. B. soll gelten: $s/n = (r+1)/n$. Hier besteht nur ein *partieller* Schluss $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = (r+1)/n$

Schreiben wir $p(Y) \geq r/n$, dann gibt es also verschiedene mögliche *Lösungen* für die Konklusion p(Y): $p(Y) = r/n$, $p(Y) = (r+1)/n$, ... , $p(Y) = n/n$.

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Um zu berechnen, mit welcher *theoretischen* Wahrscheinlichkeit p^T, mit welchem *Grad von Folgerichtigkeit,* eine *bestimmte Lösung* gilt, habe ich die folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n] = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$$

Man könnte das auch als Schluss angeben:

$$[p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n] \ \Rightarrow\ [p^T = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}]$$

• Beispiel
$p(X \wedge Y) = 1/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) \geq 1/4$.
Somit: $r/n = 1/4$. Dann gibt es für s/n: 4 Lösungen
$L_1 = 1/4$, $L_2 = 2/4$, $L_3 = 3/4$, $L_4 = 4/4$

Z. B. will man die Wahrscheinlichkeit p^T für $L_3 = 3/4$ berechnen.
Also: $r = 1$, $n = 4$, $s = 3$

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 1/4 \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = 3/4] =$$

$$\binom{4-1}{4-3}(2/3)^{4-3}(1/3)^{3-1} = 3 \times 2/3 \times 1/9 = 6/27 = 2/9 = 0{,}22$$

In Worten: wenn p(X ∧ Y) = 1/4 dann besteht eine theoretische Wahrscheinlichkeit von p^T = 2/9, dass p(Y) = 3/4.
Anders gesagt: p(Y) = 3/4 folgt logisch mit einem Grad von 2/9 aus p(X ∧ Y) = 1/4.
Man muss hier den Pfeil *⟶ für *partielle* logische Folge verwenden. Zwar ist der Schluss p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) ≥ r/n (unter Verwendung von Variablen) *vollständig*, aber mit den Beispiel-Werten (Konstanten) gilt er nur *partiell*, eben nur mit einem Grad von 0,22.

4-3-3-5 DEMONSTRATION: PARTIELLER SCHLUSS
Es geht hier um einen *Schluss, der von der Struktur her nur partiell analytisch ist.*
Daher muss ich in der *Basisform* den Pfeil *⟶ (für *partielle* logische Folge) verwenden. Dennoch gilt der Schluss in der *quantitativen* Form bzw. in der Bruchform *vollständig*, daher ist hier der Doppelpfeil *⇒ einzusetzen.

Umgekehrte Abtrennungsregel X *⟶ X ∧ Y

• Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse*
auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

- qualitative Basis: X *⟶ X ∧ Y
- quantitative Form: p(X) = r/n *⇒ p(X ∧ Y) ≤ r/n
- Bruch-Form: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ *⇒ $\frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$

bzw. $\frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ *⟶ $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Wie berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit p^T für diese Lösungen?
Ich habe folgende Formel aufgestellt:

$$p^T[(p(X) = r/n \ {*}\!\longrightarrow\ p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^{s}$$

• Beispiel
p(X) = 4/5 *⇒ p(X ∧ Y) ≤ 4/5. Folglich: r = 4, n = 5.

Folgende fünf Lösungen für p(X ∧Y): L_1 = 4/5, L_2 = 3/5, L_3 = 2/5, L_4 = 1/5, L_5 = 0/5.
Berechnung für Lösung: L_2 = 3/5. Es gilt also: n = 5, r = 4, s = 3.

$$p^T[(p(X) = 4/5 \ {*}\!\longrightarrow\ p(X \wedge Y) = 3/5] =$$

$$\binom{4}{4-3}(1/2)^{4-3}(1/2)^3 = 4\times 1/2\times 1/8 = 4/16 = 1/4 = 0{,}25$$

4-3-4 Inklusiv / Exklusiv

Ich möchte hier den (partiellen) Schluss vom *inklusiven* „oder" (∨) auf das *exklusive* „oder" (><) behandeln: (X ∨ Y) *⟶ (X >< Y)

• Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse* auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

□ qualitative Basis: (X ∨ Y) *⟶ (X >< Y)
□ quantitative Form: p(X ∨ Y) = r/n ⇒ p(X >< Y) ≤ r/n

□ Bruch-Form: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ $*\Rightarrow$ $\frac{b+c}{a+b+c+d} \le \frac{r}{n}$

bzw. $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ $*\longrightarrow$ $\frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$

Es gilt s ≤ r.

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses

p^T berechne ich nach folgender Formel: $\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$

• Beispiel
p(X ∨ Y) = 3/3 *⇒ p(X ><Y) ≤ 3/3. Somit: r = 3, n = r.

Folgende vier Lösungen gibt es für p(X >< Y): L_1 = 3/3, L_2 = 2/3, L_3 = 1/3, L_4 = 0/3.
Dann ergibt sich für alle 4 Lösungen:

L_1: p^T[p(X ∨ Y) = 3/3 *⟶ p(X ><Y) = 3/3] = 8/27
L_2: p^T[p(X ∨ Y) = 3/3 *⟶ p(X ><Y) = 2/3] = 12/27
L_3: p^T[p(X ∨ Y) = 3/3 *⟶ p(X ><Y) = 1/3] = 6/27
L_4: p^T[p(X ∨ Y) = 3/3 *⟶ p(X ><Y) = 0/3] = 1 /27

4-3-5 Erweiterungen

Die wichtigsten bisherigen *Unterscheidungen* sollen noch einmal zusammengefasst und ergänzt werden.
Dazu zunächst eine Übersicht.
Wir unterscheiden zwischen:

1) synthetischen – analytischen Strukturen
2) struktureller – quantifizierter Wahrscheinlichkeit
3) empirischer – theoretischer Wahrscheinlichkeit
4) gleichgewichtigen – ungleichgewichtigen Relatoren

1. synthetische Strukturen	Beispiele:
1.1 strukturell	
1.1.1 Form	$X \rightarrow Y$
1.1.2 theoret. Wahrsch. p^T	$p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$
1.2 quantitifiziert	
1.2.1 empir. Wahrsch. p	$p(X \rightarrow Y) = 4/5$
1.2.2 theoret. Wahrsch. p^T	$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/5] = 405/1024$
2. analytische Strukturen	
2.1 strukturell	
2.1.1 Form	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
2.1.2 theoret. Wahrsch. p^T	$p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 4/4$
quantifiziert	
2.2.1 empir. Wahrsch. p	$p(X \wedge Y) = 1/3 \;{*}\!\!\longrightarrow p(Y) = 2/3$
2.2.2 theoret. Wahrsch. p^T	$p^T[p(X \wedge Y) = 1/3 {*}\!\!\longrightarrow p(Y) = 2/3] = 4/9$

Diesem letzten Unterschied, zwischen *gleichgewichtigen* und *ungleichgewichtigen* Relatoren, werde ich mich hier in den „Erweiterungen" widmen. Die Bedeutung der Unterscheidung von *Gleichgewichts- und Ungleichgewichts-Relatoren* bei *synthetischen* Relationen wurde im *Exkurs* zum Kapitel 3 dargelegt. Hier geht es jetzt um diesen Unterschied bei *analytischen* Relationen. Im Mittelpunkt wird allerdings der Ungleichgewichts-Relator $\rightarrow$ stehen, der *Implikator*.

Zur Erinnerung: Ich nenne Relatoren wie den Äquivalentor $\leftrightarrow$ ‚*Gleichgewichts-Relatoren'*, weil in der Wahrheitstafel die Anzahl ihrer + und – (unter dem Zentral-Relator) im *Gleichgewicht* stehen, also gleich häufig vorkommen. Bei ‚Ungl*eichgewichts-Relatoren'* wie $\rightarrow$ differiert die Anzahl ihrer + und – (unter dem Zentral-Relator), steht also im *Ungleichgewicht*. Entsprechend unterscheide ich zwischen Gleichgewichts- und Ungleichgewichts-*Relationen*.

4-3-5-1 PSEUDO-SCHLÜSSE

Ich möchte hier zunächst auf *Pseudo-Schlüsse* eingehen. Ein Pseudo-Schluss ist z. B.:
$X \rfloor Y \;{*}\!\!\longrightarrow X \lfloor Y$ (vgl. 0-5-4-2), quantitativ $p(X \rfloor Y) = r/n \;{*}\!\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$
Hier wird von der *Gleichgewichts-Relation* $X \rfloor Y$ auf die *Gleichgewicht-Relation* $X \lfloor Y$ geschlossen.

Nehmen wir obiges Beispiel mit n = 4, so ergibt sich beim Pseudo-Schluss:

$p(X \rfloor Y)$ *⟶	$p(X \lfloor Y)$	p^T
4/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Wenn wir für $p(X \rfloor Y)$ nicht 4/4 , sondern 0/4, 1/4, 2/4 oder 3/4 einsetzen, ergibt sich genau dasselbe Bild, z. B.:

$p(X \rfloor Y)$ *⟶	$p(X \lfloor Y)$	p^T
3/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Hier zeigt sich nun Folgendes:
• Wenn man $p(X \lfloor Y)$ mit n = 4 für sich alleine betrachtet, so erhält man denselben Verlauf von p^T wie in Abhängigkeit von $p(X \rfloor Y)$:

z. B.: $p^T[p(X \lfloor Y) = 4/4] = p^T[p(X \rfloor Y) = 4/4 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = 4/4] = 1/16$

$p(X \lfloor Y)$	p^T
4/4	1/16
3/4	4/16
2/4	6/16
1/4	4/16
0/4	1/16

• Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ kann ebenfalls jeden *beliebigen* Wert 0/n bis n/n annehmen.
• Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n, konkret von 0/4 bis 4/4 man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ hat immer die *gleiche* p^T-Verteilung, konkret 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16.

Das beweist aber alles, dass $p(X \lfloor Y)$ vollständig *unabhängig* von $p(X \rfloor Y)$ ist. Dies verwundert auch nicht, denn es gilt ja: $X \Leftrightarrow X \rfloor Y$ und $Y \Leftrightarrow X \lfloor Y$.

Bei $X \rfloor Y \ {*}\!\!\longrightarrow X \lfloor Y$ handelt es sich also gar nicht um einen echten Schluss, sondern in Wahrheit um eine *synthetische* Relation: $X \ {*}\!\!\rightarrow Y$ bzw. $X \rightarrow Y$.

Daher kann man p^T von $p(X \rfloor Y) = r/n \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$ nach einer Formel für synthetische Relationen berechnen, die ich in 3-3-3 aufgestellt habe. Danach ergibt sich:

$$p^T[p(X \rfloor Y) = r/n \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n] = p^T[p(X \lfloor Y) = s/n] = \binom{n}{r}(1/2)^s(1/2)^{n-s}$$

4-3-5-2 (PARTIELL) ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wir haben es hier mit dem *Gleichgewichts-Relator* $\leftrightarrow$ zu tun. Allerdings geht es darum, von einer Gleichgewichts-Relation $(X \leftrightarrow Y)$ auf eine Ungleichgewichts-Relation $X \rightarrow Y$ zu schließen, es sind also keineswegs *alle* dabei verwendeten Relatoren auch Gleichgewichts-Relatoren. Kommen wir nun zu folgendem Schluss:

$X \leftrightarrow Y \ {*}\!\!\Rightarrow X \rightarrow Y$

Es handelt sich in der *qualitativen* Form um einen *strengen* Schluss, je nach eingesetzten Zahlenwerten aber nur um einen *partiellen* bzw. *semi-analytischen* Schluss:

Folgendes Beispiel: bei $p(X \leftrightarrow Y) = 1/4$ und n = 4.
Zunächst: $p(X \rightarrow Y)$ in Abhängigkeit von $p(X \leftrightarrow Y)$

$p(X \leftrightarrow Y)$ *⟶	$p(X \rightarrow Y)$	p^T	p^T dez.
2/4	4/4	1/4	0,25
	3/4	2/4	0,5
	2/4	1/4	0,25

(Die p^T-Werte sind hier *gekürzt*, ungekürzt gilt: 24/96, 48/96, 24/96.)

Betrachten wir zum Vergleich dazu die Werte von $p(X \rightarrow Y)$ *für sich alleine*:

$p(X \rightarrow Y)$	p^T	p^T dez.
4/4	81/256	0,32
3/4	108/256	0,42
2/4	54/256	0,21
1/4	12/256	0,05
0/4	1/256	≈ 0

Wie man sieht: anders als bei einem Pseudo-Schluss, sind bei einem *semi-analytischen* Schluss die Werte p und p^T der Konklusion (hier $X \rightarrow Y$) durchaus *unterschiedlich*, je nachdem, ob man sie *isoliert* betrachtet oder in *Abhängigkeit* von der Prämisse.

Zu den konkreten Werten im obigen Beispiel: $p(X \leftrightarrow Y) = 2/4$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = r/4$. Zunächst, wenn $p(X \leftrightarrow Y) = 2/4$, dann kann $p(X \rightarrow Y)$ nicht alle möglichen Werte annehmen, denn $2 \leq r \leq 4$. Somit sind $p(X \rightarrow Y) = 1/4$ und $p(X \rightarrow Y) = 0/4$ unmöglich, dies zeigt, dass $p(X \leftrightarrow Y)$ und $p(X \rightarrow Y)$ logisch voneinander *abhängig* sind und hier kein Pseudo-Schluss vorliegt.

Außerdem sind die Einzel-p^T-Werte von $p(X \rightarrow Y)$, bei $n = 4$, *anders* als bei dem Schluss $p(X \leftrightarrow Y) = 2/4$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = r/4$ (vgl. obige Tabelle).

Allerdings, bei der Belegung $p(X \leftrightarrow Y) = 0/4$ sind alle Werte von $p(X \rightarrow Y)$ möglich: 4/4, 3/4, 2/4, 1/4, 0/4. Zwar sind die Einzel-Wahrscheinlichkeiten $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n]$ anders als bei dem Schluss, aber das ist nicht entscheidend (wie hier nicht weiter ausgeführt werden kann). Im Gegensatz zum *totalen* Pseudo-Schluss wie $p(X \rfloor Y) = r/n$ *⟶ $p(X \lfloor Y) = s/n$ könnte man bei $p(X \leftrightarrow Y) = 0/4$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = r/4$ von einem *selektiven* Pseudo-Schluss sprechen.

Bei $p(X \rightarrow Y) = 3/4$ hat der Schluss $p(X \leftrightarrow Y) = 2/4$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = r/4$ die höchste p^T, eben 0,5. Man kann sagen, hier besteht der *höchste Tautologie-Grad*, hier gilt der Schluss mit der größten (logischen)Wahrscheinlichkeit.

Halten wir fest (immer bezogen auf Schlüsse mit der *Positiv-Implikation* *→):

1. für *semi-analytische* Schlüsse
- bei *Gleichgewichts-Relationen als Prämisse* (z. B. $X \leftrightarrow Y$) gilt: Die p^T-Werte des Schlusses verlaufen in einer *symmetrischen* Kurve (z. B. 1/4 – 2/4 –1/4), wie bei der Prämisse.
- p^T ist *maximal* 0,5, aber dieser Wert kann (anders als bei *synthetischen* Relationen) auch bei beliebig hohem n auftreten. Z. B. $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 7/8$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 8/8] = 1/2 = 0,5$
(Dies lässt sich leicht nach der in 4-3-3-2 vorgestellten Formel berechnen.)
- Generell gilt bei *semi-analytischen* Schlüssen (der hier verwendeten Struktur): $0 < p^T \leq 0,5$; d. h. der Bereich zwischen 0,5 und 1 ist nicht belegt.

2. Für *streng analytische* Schlüsse: hier gilt allerdings $p^T = 1$, z. B.:
$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 4/4 = 1$ *⇒ $p(X \rightarrow Y) = 4/4 = 1] = 1$

4-3-5-3 ANALYTISCHE ABHÄNGIGKEIT

Jetzt wird die *analytische Abhängigkeit* weiter präzisiert – vor allem für *Spezialisten*.

Man kann beginnen mit der Frage: Ist bei analytischen Relationen auch der Begriff der ‚*Zufalls-Erwartung'* sinnvoll anzuwenden? Könnte man sagen:

$p(X \rightarrow Y) = 3/4$ ist die Zufalls-Erwartung von $p(X \leftrightarrow Y) = 2/4$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = r/4$?

Denn in diesem Fall ist p^T am höchsten ($p^T = 2/4 = 0{,}5$). Und bei der Zufalls-Erwartung ist ja der höchste Wert von p^T gegeben. Das Problem ist nur: Bei der Zufalls-Erwartung soll *keine Abhängigkeit* bestehen, aber wir verstehen einen (relativ) *hohen Tautologiegrad* doch gerade als Zeichen *hoher Abhängigkeit*.

Nun muss genau unterschieden werden:

1. *empirische Abhängigkeit*: bei synthetischen Relationen

   z. B. zwischen X und Y, bei $p(X \rightarrow Y) = r/n$

2. *logische Abhängigkeit*: bei analytischen Relationen

Hier geht es uns nur um die logische Abhängigkeit, die eben z. B. zwischen $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$ und $p(X \rightarrow Y) = s/n$ besteht.

Dabei können wir bei der logischen (analytischen) Abhängigkeit weiter differenzieren:

- *tautologische* Abhängigkeit
- *kontradiktorische* Abhängigkeit
- *integrative* Abhängigkeit

Dies sei an einem anderen Beispiel verdeutlicht:

$p(X \leftrightarrow Y)$ *⟶	$p(X \rightarrow Y)$	p^T	p^T dez.	Schluss
1/5	5/5	1/16	0,06	schwacher Schluss
	4/5	4/16	0,25	mittlerer Schluss
	3/5	6/16	0,38	stärkster Schluss
	2/5	4/16	0,25	mittlerer Schluss
	1/5	1/16	0,06	schwacher Schluss

Hier hat $p(X \rightarrow Y) = 3/5$ den *höchsten* Wert von p^T (6/16), wäre also (bei der empirischen Abhängigkeit) die „Zufallserwartung".

Aber wie hoch ist hier die *logische* Abhängigkeit? Wir greifen zur Antwort auf die o. g. Unterscheidung zurück:

- *tautologische* Abhängigkeit

sie ist umso größer, je höher p^T, das prinzipielle Maximum ist also die *Tautologie* mit $p^T = 1$. Im obigen Beispiel ist der höchste Tautologiegrad ($p^T = 0{,}38$) gegeben, wenn $p(X \rightarrow Y) = 3/5$

- *kontradiktorische* Abhängigkeit

sie ist umgekehrt umso höher, je niedriger p^T ist, das Maximum ist also die Kontradiktion mit $p^T = 0$. Im obigen Beispiel ist der höchste Kontradiktionsgrad gegeben, wenn $p(X \rightarrow Y) = 5/5$ oder $p(X \rightarrow Y) = 1/5$. Man könnte allerdings noch hinzufügen:

$$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5 \;\; {*}\!\not\Rightarrow \;\; p(X \rightarrow Y) = 0/5] = 0$$

Hier liegt dann eine *vollständige Kontradiktion* vor, dieser Wert mit $p^T = 0$ taucht daher gar nicht in der Tabelle auf.

Aus der tautologischen Abhängigkeit und der kontradiktorischen Abhängigkeit kann man eine *integrative Abhängigkeit* p^A ableiten (‚p' steht hier allgemein für *relative Größe*, nicht speziell für Wahrscheinlichkeit). Dabei greife ich einerseits zurück auf den Ansatz der integrativen Abhängigkeit für quantitative *synthetische* Relationen (im Exkurs zum Kapitel 3); dort basiert p^A allerdings auf p und nicht auf p^T. Vor allem greife ich zurück auf den Ansatz der integrativen Abhängigkeit für analytische Relationen, allerdings *qualitativ*-aussagenlogische Relationen (in 4-1-1-4). Jetzt geht es aber um *quantitative analytische* Relationen.

Der Abhängigkeitsbegriff p^A integriert die *tautologische* und *kontradiktorische* Abhängigkeit. Dabei gehe ich von folgendem Verhältnis aus: Die tautologische Abhängigkeit entspricht dem Tautologie-Grad bzw. der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T (dennoch darf man Tautologie-Grad und tautologische Abhängigkeit nicht identifizieren). Die kontradiktorische Abhängigkeit entspricht dem Kontradiktions-Grad und misst demnach als: $1 - p^T$. Man berechnet p^A als *Betrag* der Differenz zwischen tautologischen und der kontradiktorischen Abhängigkeit: $p^A = |p^T - (1 - p^T)|$. Bei $p^T = 1/16$: $p^A = |1/16 - (1 - 1/16)| = |1/16 - 15/16| = 14/16$.

tautolog. Abhängigkeit p^T	kontradikt. Abhängigkeit $1 - p^T$	integrative Abhängigkeit p^A
1/16	15/16	$\|1/16 - 15/16\| = 14/16 = 0,88$
4/16	12/16	$\|4/16 - 12/16\| = 8/16 = 0,5$
6/16	10/16	$\|6/16 - 10/16\| = 4/16 = 0,25$
4/16	12/16	$\|4/16 - 12/16\| = 8/16 = 0,5$
1/16	15/16	$\|1/16 - 15/16\| = 14/16 = 0,88$

Hier zeigt sich: Der Fall, wo p^T am höchsten ist ($p^T = 6/16$), hat den niedrigsten Wert von p^A, nämlich $p^A = 4/16 = 0,25$. Es mag zunächst verwundern, dass bei der höchsten tautologischen Abhängigkeit die integrative Abhängigkeit am geringsten ist. Aber die kontradiktorische Abhängigkeit ist (bei diesem Beispiel) in jedem Fall höher als die tautologische Abhängigkeit. Zöge man den Tautologie-Grad vom Kontradiktions-Grad ab, brauchte man gar keine Betrags-Rechnung. Dies führt zu dem obigen Ergebnis, was aber insofern plausibel ist, weil es eben um die Integration von tautologischer *und* kontradiktorischer Abhängigkeit geht.

Im obigen Beispiel sind alle Relationen semi-analytisch. Bei einer *streng analytischen* Relation, einer Tautologie mit $p^T = 1$, ergibt sich aber: $p^A = |1 - (1 - 1)| = 1$.

Und bei einer Kontradiktion ergibt sich: $p^A = |0 - (1 - 0)| = 0$

Kommen wir jetzt zum Verhältnis zwischen *empirischer* und *logischer* Abhängigkeit.

Vergleich zwischen *empirischer* und *logischer* Abhängigkeit

1. Bei der *empirischen* Abhängigkeit gilt normalerweise: je niedriger p^T, desto größer die Abhängigkeit. Bei der kontradiktorischen (logischen) Abhängigkeit ist das genauso, aber bei der wichtigeren tautologischen (logischen) Abhängigkeit ist es umgekehrt: je höher p^T, desto höher die Abhängigkeit.

2. Der p-Wert mit der höchsten p^T (Zufalls-Erwartung) steht *empirisch* (normalerweise) für keine Abhängigkeit oder mittlere Abhängigkeit. Dagegen steht der höchste p^T-Wert bei analytischen Relationen für die höchste tautologische Abhängigkeit (bzw. die niedrigste kontradiktorische Abhängigkeit). Dennoch kann man indirekt auch die *Tautologie* eine Zufallserwartung nennen: die Tautologie (z. B. $p(X \Rightarrow X) = 1$) ist der Wert mit der *höchsten Erwartungswahrscheinlichkeit*, sie ist nämlich völlig sicher zu erwarten.

Für eine *mittlere* analytische Abhängigkeit steht ein mittlerer p^T-Wert. Gar keine Abhängigkeit kommt nur *bei* Pseudoschlüssen vor, wobei es sich also um verkappte synthetische Relationen handelt. Ansonsten ist es für analytische Relationen gerade kennzeichnend, dass *immer* eine Abhängigkeit besteht.

Beziehung zwischen *empirischer* und *logischer* Abhängigkeit

1. Bei *synthetischen* Relationen können wir zwar einen Tautologiegrad angeben, aber keine analytische Abhängigkeit. Synthetische Relationen sind nicht für einen analytischen Abhängigkeitsgrad definiert.

2. Umgekehrt gilt grundsätzlich dasselbe. Denn synthetische und analytische Relationen sind eben so definiert, dass sie sich gegenseitig ausschließen, insofern sind auch analytische Rela-

tionen nicht für einen synthetischen Abhängigkeitsgrad definiert. Dennoch ist bei analytischen Relationen die Situation komplizierter.

Betrachten wir zunächst vollständige Tautologien, z. B.: $p(X \rightarrow X) = 5/5$. Im Beispiel: „5 von 5 Rauchern sind Raucher". Diese Aussage ist mit Sicherheit wahr, man braucht nicht empirisch zu untersuchen, ob sie stimmt. Andererseits, wenn man sie empirisch untersucht, wird man auch da ihre Wahrheit finden.

Ein anderes Beispiel:

$$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 5/5 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = 5/5] = 1/1 = 1.$$

Man könnte eventuell sagen: Wenn die *logische* Abhängigkeit von $p(X \rightarrow Y) = 5/5$ in Relation zu $p(X \leftrightarrow Y) = 5/5$ den Wert $p^T = 1$ besitzt, dann muss auch die *empirische* Abhängigkeit $p = 1$ sein. Aber, bei einer empirischen Abhängigkeit von $p = 1$ ist (wie aufgezeigt) p^T minimal. Hier besteht noch Klärungsbedarf.

Ich würde jedoch sagen, in diesem Fall liegt eine rein formale, analytische Abhängigkeit vor, die sich aber eben auch in der realen Welt widerspiegelt; dennoch sind synthetische und analytische Abhängigkeit voneinander zu trennen.

4-3-5-4 GEMISCHTE ABHÄNGIGKEIT

Bei *semi-analytischen* Relationen ist die Situation noch komplizierter, denn diese sind bestimmt worden als *Mittelglied zwischen synthetischen und analytischen Relationen*, man kann auch sagen, sie haben einen synthetischen und einen analytischen *Anteil*.

z. B. $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 3/5 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = 4/5] = 2/4 = 0{,}5$

Zunächst ist zu fragen: Um welche *empirische* Beziehung soll es dabei überhaupt gehen? Die zwischen X und Y wird ja nicht durch den Schluss, sondern durch die Einzel-Relationen ausgedrückt.

Es muss also um die Beziehung von $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ und $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ gehen, nur die war eben als semi-analytisch bestimmt worden. Die Frage ist: Gibt es neben der *analytischen* Beziehung auch eine *empirische* Beziehung zwischen $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ und $p(X \rightarrow Y) = 4/5$? Man könnte das postulieren, denn da hier eine semi-analytische Relation vorliegt, muss man, um sicher aus $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ auf $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ zu schließen, auch empirische Untersuchungen vornehmen. Aber was wäre hier die empirische synthetische Beziehung?

Nochmals das Beispiel mit den Rauchern („gesund" ist definiert als „nicht krank"):

$X \wedge Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg X \wedge Y$	$\neg X \wedge \neg Y$
a	b	c	d
Raucher und krank	Raucher und gesund	Nicht-Raucher und krank	Nicht-Raucher und gesund

Die *Prämisse* ist: $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$. Das bedeutet:

Von 5 untersuchten Personen sind: 3 Raucher $\wedge$ krank oder Nichtraucher $\wedge$ gesund.

Es gibt aber noch 2 Personen, über die wir nicht wissen, gilt für sie:

Raucher $\wedge$ gesund oder Nicht-Raucher $\wedge$ krank?

Technisch gesprochen: wir wissen zwar, dass $b + c = 2$, aber wir kennen nicht die genaue Aufteilung: $b = 2$ ($c = 0$), $b = 1$ ($c = 1$) oder $b = 0$ ($c = 2$).

Was folgt daraus für die *Konklusion* $p(X \rightarrow Y) = 4/5$?

Zunächst ist sie möglich, denn sie widerspricht der Prämisse nicht. Aber sie geht darüber hinaus, sie legt fest, dass $b = 1$ und $c = 1$. Denn nur dann ergibt sich:

$a + d + c = 3 + 1 = 4$. Und: $a + d + c + b = 4 + 1 = 5$

D. h. im Beispiel: „Wenn 3 von 5 Menschen rauchen und krank sind oder nicht rauchen und gesund sind, dann folgt daraus mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/4 (0,5) zusätzlich für 1 Menschen, dass raucht und gesund ist und für 1 (anderen) Menschen, dass er nicht raucht und krank ist“. Es bleibt Zweifel, ob hier sinnvoll von einem *empirischen* Verhältnis gesprochen werden kann.

Sinnvoll wäre eher folgende Darstellung: „Von 5 Menschen sind 3 Raucher und krank oder Nicht-Raucher und gesund, 1er ist Raucher und gesund und 1er ist Nicht-Raucher und krank“. Nur entspricht das nicht genau dem obigen Schluss.

Dennoch, eine denkbare Interpretation ist, dass man einen analytischen und einen synthetischen *Anteil* der Relation unterscheidet: der *analytische* Anteil legt den *Rahmen* fest, sagt was (empirisch) möglich und was unmöglich und wie (theoretisch) wahrscheinlich das ist; der *synthetische* Anteil gibt den konkreten Wert innerhalb dieses Rahmens an.

Machen wir uns zunächst die möglichen Verteilungen klar:

$p(X \leftrightarrow Y)$ *⟶	$p(X \rightarrow Y)$	p^T		
3/5	5/5	1/4	0,25	schwacher Schluss
	4/5	2/4	0,50	mittlerer Schluss
	3/5	1/4	0,25	schwacher Schluss

• analytischer Anteil

$p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *$\Rightarrow$ $p(X \rightarrow Y) \geq 3/5$ bzw.

$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *$\Rightarrow$ $p(X \rightarrow Y) \geq 3/5] = 1$

d. h. es gibt folgende Möglichkeiten:

$p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 5/5$

$p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 4/5$

$p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 3/5$

• synthetischer Anteil

Er legt fest, welchen Wert genau $p(X \rightarrow Y)$ besitzt.

Im analytischen Anteil wird festgelegt, welche Werte möglich sind und welche theoretische Wahrscheinlichkeit diesen Möglichkeiten zukommt.

Aber welcher dieser möglichen Werte *realisiert* ist, das legt erst der synthetische Anteil fest. Z. B. kann man eben *empirisch* herausfinden, dass $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ gilt.

So gesehen, besteht sowohl eine *logisch-analytische* wie eine *empirisch-synthetische* Abhängigkeit. Im synthetischen Bereich kann man wohl auch den Begriff der *Zufalls-Erwartung* anwenden, im obigen Beispiel wäre das $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, weil eben hier p^T am höchsten ist. Die Zufalls-Erwartung würde man in diesem Fall am ehesten als *mittlere Abhängigkeit* deuten; aber selbst wenn man (was auch möglich ist) die Zufalls-Erwartung so interpretiert, dass *keine synthetische Abhängigkeit* besteht, eine *analytische Abhängigkeit* besteht dennoch.

Noch eine Anmerkung: Wir haben oben gesehen, das es drei *mögliche* Werte für $p(X \rightarrow Y)$ gibt, aber *real* kann ja nur *ein* Wert richtig sein, z. B. $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ Allerdings habe ich eine solche Schreibweise für einen *semi-analytischen* Schluss verwendet, bei dem also nicht sicher ist, ob er und die Konklusion wahr sind.

Zur Abgrenzung könnte man zur Kennzeichnung einer *realen* Relation schreiben:

$p(p(X \leftrightarrow Y) = 3/5$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = 4/5) = 1$

Ich habe aber schon darauf hingewiesen, dass man hier nur schwer ein gehaltvolles empirisches Verhältnis erkennen kann; sinnvoller wäre vielleicht zur Darstellung der Realität, die *Konjunktion* anstatt der Implikation zu verwenden: z. B.: $p(X \leftrightarrow Y) = 3/5 \wedge p(X \rightarrow Y) = 4/5$.

Bei diesen Punkten besteht aber noch erheblicher Forschungs- und Klärungsbedarf.

4-3-5-5 UNGLEICHGEWICHTS-RELATOREN

Hier geht es darum, dass von einer *Ungleichgewichts-Relation* auf eine andere Ungleichgewichts-Relation geschlossen wird.

Beispiel: $(X \rightarrow Y)$ $*\longrightarrow$ $(X \leftarrow Y)$, bei $p(X \rightarrow Y) = 4/4 = 1$, $n = 4$

$p(X \rightarrow Y)$ $*\longrightarrow$	$p(X \leftarrow Y)$	p^T
4/4	4/4	16/81
	3/4	32/81
	2/4	24/81
	1/4	8/81
	0/4	1/81

Entsprechend zu den *synthetischen* Strukturen gilt auch hier, bei den (semi)analytischen Strukturen: Beim Schluss von einer Ungleichgewichts-Relation (mit *asymmetrischer* p^T-Verteilung) Struktur erhält man auch eine *asymmetrische* p^T-Verteilung der Konklusion.

Generell gilt – nach meinen bisherigen Berechnungen – bei semi-analytischen Strukturen der hier verwendeten Form: p^T ist maximal 2/3 = 0,66 (periode), aber dieser Wert kann auch bei beliebig hohem n auftreten.

Z. B. $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1/8$ $*\longrightarrow$ $p(X \leftarrow Y) = 8/8] = 2/3$.
Allgemein gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1/n$ $*\longrightarrow$ $p(X \leftarrow Y) = n/n = 1] = 2/3$.

Bei streng analytischen Strukturen ist allerdings: $p^T = 1$.
z. B. $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0/4$ $*\Rightarrow$ $p(X \leftarrow Y) = 4/4] = 1/1 = 1$

ZUSAMMENFASSUNG

Generell ist wesentlich, die Unterschiede der *empirischen* Wahrscheinlichkeit p und vor allem der *theoretischen* Wahrscheinlichkeit p^T bei synthetischen und analytischen Strukturen festzuhalten (auf *semi-analytische* Relationen gehe ich hier nicht noch einmal ein).

1) <u>bei *synthetischen* Strukturen</u>

• empirische Wahrscheinlichkeit p

p gibt die *Größe* einer *empirischen* Abhängigkeit an. Bei einer einfachen Struktur $X *\rightarrow Y$ kann man sagen:
$p = 0{,}5$: kein Zusammenhang, $p > 0{,}5$: positiver Zusammenhang, $p < 0{,}5$: negativer Zusammenhang. $p = 1$ max.: positiver Zusammenhang, $p = 0$: max. negativer Zusammenhang.

Wenn z. B. 70% aller Raucher erkranken, also $p = 0{,}7$, dann ist dies ein deutlicher *positiver* Zusammenhang. (Man gibt allerdings oft nicht nur die Implikation an, sondern umfassender z. B. die Äquivalenz bzw. in der Statistik sogenannte Korrelationskoeffizienten).

• theoretische Wahrscheinlichkeit p^T

– Größe der Abhängigkeit

Anders als oft dargestellt, gibt p^T auch Informationen über die Größe des empirischen Zusammenhangs. Denn je höher p^T, desto niedriger der empirische Zusammenhang. Beim der niedrigsten Abhängigkeit, der *Zufalls-Erwartung*, ist die höchste p^T gegeben. Z. B. ist beim obigen Beispiel p^T am höchsten, wenn $p(X *\rightarrow Y) = 0{,}5$.

– Sicherheit der Abhängigkeit
p^T gibt aber auch die *Sicherheit* der Abhängigkeit an. Je niedriger p^T, desto sicherer die *empirische* (korrelative) *Abhängigkeit*. Betrachte man z. B. die Kette: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6 usw. p ist hier immer gleich, nämlich p = 1. Aber p^T fällt jeweils um die Hälfte: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 usw. Obwohl also die *Größe* der Abhängigkeit gleich bleibt (p = 1), nimmt die *Sicherheit* der Abhängigkeit ständig zu. Bei $p(X \rightarrow Y) = 6/6$ ist die Abhängigkeit – dass alle X auch Y sind – deutlich höher als bei p = 4/4. Die Sicherheit des Zusammenhangs hängt allerdings auch von der Größe von n ab und von der Vergleichsgruppe: man muss wissen, wie viele Menschen unter sonst gleichen Umständen überhaupt erkranken.

– tautologischer bzw. kontradiktorischer Grad
Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt aber auch den Grad *theoretischer Wahrheit* bzw. den *tautologischen Grad* einer synthetischen Relation an. Oder den kontradiktorischen Grad. Man kann (für Gleichgewichts-Relatoren) bestimmen, dass ein Wert $p^T > 0,5$ eher tautologisch ist, ein Wert $p^T < 0,5$ eher kontradiktorisch. Während bei den *qualitativen* Relatoren der Aussagen-Logik wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw. das Verhältnis von tautologischer und kontradiktorischer Dominanz ausgeglichen ist, sind *quantifizierte* Relationen wie $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n$ bis auf wenige Ausnahmen kontradiktorisch ausgerichtet, sie besitzen also einen Wert $p^T < 0,5$.

Allerdings gilt für synthetische Relationen: $0 < p^T < 1$. D. h. synthetische Relationen sind nicht *vollständig* tautologisch oder *vollständig* kontradiktorisch. Dennoch können synthetische Relationen einen p^T-Wert beliebig nahe an 1 oder 0 besitzen. Wenn man die *Grenzwertrechnung* mit einbezieht, $n \rightarrow \infty$, könnte man auch Werte von 1 und 0 berücksichtigen. Aber ich möchte das unterlassen, es ist mir wichtig, synthetische Relationen gegen analytische abzugrenzen, indem ich nur den *streng* analytischen Relationen (Tautologie bzw. Kontradiktion) p^T-Werte von 1 bzw. 0 zuweise.

Dass synthetische Relationen auch einen tautologischen Grad besitzen, bedeutet nicht, dass bei ihnen eine *analytische* Abhängigkeit gegeben wäre. Z. B. gibt es bei $p(X \rightarrow Y) = 6/6$ *keine analytische Abhängigkeit* zwischen X und Y. Synthetische Relationen beinhalten schon *definitorisch* keine analytische Abhängigkeit.

2) <u>bei analytischen Relationen</u>

• empirische Wahrscheinlichkeit p
Die empirische Wahrscheinlichkeit p spielt bei analytischen Relationen eine untergeordnete Rolle.

Allerdings gilt unter bestimmten Bedingungen, dass eine Tautologie mit p = 1 verbunden ist und eine Kontradiktion mit p = 0. Z. B. gilt:

$$(X *\!\Rightarrow X) \Rightarrow p(X *\!\Rightarrow X) = 1 \text{ oder einfach } p(X *\!\Rightarrow X) = 1 \text{ Bzw.: } p(X *\!\Rightarrow \neg X) = 0$$

Ein X ist eben in *allen* Fällen ein X und in *keinem* Fall kein X (vgl. 4-4-0).

• theoretische Wahrscheinlichkeit p^T

– tautologischer bzw. kontradiktorischer Grad
Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt auch bei analytischen Relationen den Tautologie-Grad an, dabei gilt: p^T[Tautologie] = 1, p^T[Kontradiktion] = 0.

Umgekehrt hat eine Tautologie einen Kontradiktions-Grad von 0 und eine Kontradiktion hat einen Kontradiktions-Grad von 1.

– analytische Abhängigkeit
Man kann aber auch sagen, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T den Grad der analytischen *Abhängigkeit* angibt. Dabei gilt: je höher p^T, desto größer die analytisch-tautologische Abhängigkeit. Je höher z. B. bei einem Schluss der p^T-Wert, desto sicherer der Schluss. Bei einer vollständigen Tautologie ist der Wert dann $p^T = 1$, hier besteht vollständige tautologische Abhängigkeit (für die kontradiktorische Abhängigkeit gilt Entsprechendes).
Fazit: Für die *synthetische* Abhängigkeit gilt: je *niedriger* p^T, desto höher die Abhängigkeit. Für die *analytische* Abhängigkeit gilt: je *höher* p^T, desto höher die Abhängigkeit.

Es ist bemerkenswert, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T diese Doppelfunktion erfüllt.

Man kann das allerdings auch als 2 Seiten eines Wertes ansehen, nämlich des *Informationsgehaltes*. Die theoretische Wahrscheinlichkeit ist ja umgekehrt proportional zum Informationsgehalt:
– eine *synthetische* Relation, die unerwartet ist (überzufällig oder unterzufällig: niedriger p^T-Wert) hat einen hohen Informationsgehalt
– bei einer *analytischen* Relation andererseits fällt der Tautologie-Grad (p^T-Wert) mit steigendem Informationsgehalt, eine vollständige Tautologie hat keinen Informationsgehalt.

4 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

4-4-0 Einführung

Es geht hier um Schlüsse, bei denen Prämisse und Konklusion *deterministisch* sind, also den Wert p = 1 oder p = 0 besitzen. Im Gegensatz zu *statistischen* Schlüssen, bei denen für die Prämissen (und/oder die Konklusion) gilt: 0 < p < 1.

Ehe wir uns aber der *Analyse* eines Schlusses in seine Komponenten *Prämisse(n)* und *Konklusion* zuwenden, wollen wir die *Gesamtbetrachtung* eines Schlusses vornehmen. Um den Unterschied von p und p^T noch einmal herauszuarbeiten.

Denn gerade bei der *Tautologie* kann man leicht die *empirische* Wahrscheinlichkeit p und die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T verwechseln. Beide haben nämlich prinzipiell den Wert 1.

Da jede Tautologie bzw. jeder gültige Schluss (bei 2 Variablen) die Wahrheitsfolge + + + + aufweist, kann man letztlich jede solche Tautologie durch den Bruch $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$ darstellen.

Es gilt dann:

• *empirische Wahrscheinlichkeit* p

Für jede Tautologie (bei 2 Variablen X, Y) gilt:

$$\text{p(Tautologie)} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1$$

p hat also immer, *notwendig* den Wert 1, kann aber für verschiedene konkrete Brüche stehen. p kann z. B. folgende Werte annehmen: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

• *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T

Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit einer Tautologie hat immer den Wert 1.
Dies kann man sich leicht verdeutlichen: p^T gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass gilt:

$$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und diese Gleichung gilt sicher, d. h. sie gilt mit 100% (theoretischer) Wahrscheinlichkeit.
Allerdings kann $p^T = 1$ ebenfalls für verschiedene Brüche stehen. Im einfachsten Fall, nämlich bei n = 1 gibt es nur *ein* x, nämlich x_1. Dieses x_1 kann unter a, b, c oder d fallen; es ergeben sich hier also 4 Möglichkeiten. In jedem Fall beträgt aber der Wert des Bruches $p^T = 1$.

Denn es gilt:

p	p^T
1/1	$4^1/4^1$
2/2	$4^2/4^2$
....	
n/n	$4^n/4^n$

Als Formel können wir schreiben:

$$p^T[p = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1] = 4^n/4^n = 1$$

Es gilt also: p(Tautologie) = 1, p^T(Tautologie) = 1.
Entsprechend gilt bei Kontradiktionen: p(Kontradiktion) = 0 und p^T(Kontradiktion) = 0.

Die obigen Überlegungen gelten uneingeschränkt nur für Schlüsse (Tautologien), bei denen der *Gesamt-Schluss* quantifiziert ist. Anders sieht es bei Schlüssen aus, bei denen Prämisse und Konklusion *getrennt* quantifiziert sind, z. B.:

$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$ $\qquad \frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Hier gilt zwar auch p = 1 und $p^T = 1$, aber beim folgenden Schluss ist p = 0, dabei $p^T = 1$.

$p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \wedge Y) = 0$ $\qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} = 0$

Nachfolgend werden wir uns auf solche, *getrennt quantifizierte*, Schlüsse, konzentrieren.
Dabei sollen wieder folgende Schlüsse unterschieden werden:
• *streng analytische*, z. B.: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
In diesem Fall ist $p^T = 1$, wenn die Prämissen *deterministisch* (p = 1 bzw. p = 0) sind.
• *partiell analytische*, z. B. $p(Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$
Hier muss p^T nicht den Wert 1 haben, auch wenn die Prämissen deterministisch sind.

4-4-1 Implikation

Ich möchte mich hier auf *zwei* Beispiele beschränken:
• den *semi-analytischen* Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$
• und seine *analytische* Umkehrung $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$
Der erste Schluss lautet in quantitativer Form:
$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$, *allgemein* $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$.
In der quantitativen Aussagen-Logik werden wie gesagt nur die *deterministischen* Werte p = 1 und p = 0 verwendet. Wir verwenden bei diesem Beispiel nur p = 1. Somit gilt: r = s = n
Durch *Wahrheitstafeln* kann man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T ermitteln, deshalb stelle ich die Formen des Schlusses zunächst *aussagen-logisch*, qualitativ dar:

n = 1	$(X_1 \rightarrow Y_1) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1)$	$p^T = 2/4$
n = 2	$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge (X_2 \wedge Y_2)$	$p^T = 8/16$
n = 3	$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \rightarrow Y_3) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \wedge Y_3)$	$p^T = 38/64$

In quantitativer Darstellung (falsch wäre dabei $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \wedge Y)) = 1/1$ u. ä.):

n = 1	$p(X \rightarrow Y) = 1/1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/1$	$p^T = 2/4$
n = 2	$p(X \rightarrow Y) = 2/2 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/2$	$p^T = 8/16$
n = 3	$p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$	$p^T = 38/64$

Hier ist ein Fall, der schön demonstriert, wie leicht man sich bei der Aufstellung von Formeln täuschen kann. Betrachtet man nur n = 1 und n = 2, so könnte man leicht vermuten, dass gilt: $p^T = 1/2$, denn 2/4 und 8/16 sind beide gleich 1/2 und ein Zufall scheint unwahrscheinlich. Zieht man aber n = 3 hinzu, so ergibt sich ein anderes Bild. In Wirklichkeit ist die Formel viel komplizierter und lautet: $(4^n - 3^n + 1)/4^n$.

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$$

also für n = 1: $(4^1 - 3^1 + 1)/4^1 = (4 - 3 + 1)/4 = 2/4 = 0{,}5$

n = 2: $(4^2 - 3^2 + 1)/4^2 = (16 - 9 + 1)/16 = 8/16 = 0{,}5$

n = 3: $(4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64 = 0{,}59$ usw.

Kommen wir jetzt zum *Umkehr-Schluss*: $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$.
Dieser Schluss ist *tautologisch*.
Er lautet in der quantitativen Aussagen-Logik:

$$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1 \text{ bzw. } p(X \wedge Y) = n/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n.$$

Hier benötigt man keine komplizierte Formel zur Berechnung, denn bei einer Tautologie gilt immer $p^T = 1$.

$$p^T[p(X \wedge Y) = n/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n] = 4^n/4^n = 1.$$

4-4-2 Positiv-Implikation

Als Beispiel ein Schluss, der von der Struktur her vollständig analytisch ist:

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)

- qualitative Basis: $X \wedge Y \ {*}{\Rightarrow}\ Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = s/n = 1$
- Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Ich gebe hier ein Zahlenbeispiel: $(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4$
also: r = 4, n = 4, s = 4

Nach der in 4-3-3 vorgestellten Formel ergibt sich:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4] =$$

$$\binom{4-4}{4-4}(2/3)^{4-4}(1/3)^{4-4} = 1 \times (2/3)^0 \times (1/3)^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Der Schluss hat also eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$, er ist somit *vollständig*. (Davon ist zu unterscheiden, dass auch beide Einzel-Relationen eine empirische Wahrscheinlichkeit p = 4/4 = 1 besitzen, vgl. 4-4-0 .) Die Formel gilt generell, man muss keine konkreten Zahlenwerte einsetzen.

Auf die Berechnung eines negativen Beispiels, z. B. $p(Y) = 0$ $*\Rightarrow$ $p(X \wedge Y) = 0$, verzichte ich hier.

4-4-3 Systematik

Ich habe in 4-3-3 sechs Formeln zur Berechnung von p^T bei quantitativen Schlüssen mit der *Positiv-Implikation* aufgestellt.

Es handelt sich um Schlüsse der Form:
– *semi-analytisch*: $p(\Phi) = r/n$ $*\longrightarrow$ $p(\Psi) = s/n$ oder
– *analytisch*: $p(\Phi) = r/n$ $*\Rightarrow$ $p(\Psi) = s/n$
Hier soll nun demonstriert werden, was sich ergibt

- im *deterministischen* Fall: p = 1, konkret: $p(\Phi) = 1$ und $p(\Psi) = 1$, r = s = n, r > 0 (somit auch s > 0 und n > 0)
- im *nullistischen* Fall: p = 0, konkret: $p(\Phi) = 0$ und $p(\Psi) = 0$, r = s = 0 (allerdings n > 0, ein Nenner von 0 ist nicht erlaubt)

1. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \to Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Für die erste Formel sei das genauer erklärt:

Positiver Fall: p = 1: $p^T = (2/3)^S$

Erklärung:
Wenn r = s, dann gilt: $\binom{r}{r-s} = 1$ und $(1/3)^{r-s} = 1$, somit:

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1 \times (2/3)^s \times 1 = (2/3)^s$$

Beispiel : $p^T[p(X \to Y) = s/s = 1$ $*\longrightarrow$ $p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1] = (2/3)^s$

Negativer Fall: p = 0: $p^T = 1$

Erklärung:

Wenn r = s = 0, dann gilt ebenfalls: $\binom{r}{r-s}$ = 1 und $(1/3)^{r-s}$ = 1, somit

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1\times(2/3)^0\times 1 = 1\times 1\times 1 = 1$$

Beispiel : $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \leftrightarrow Y) = 0] = 1$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Positiver Fall: p = 1, $p^T = (1/3)^S$
Negativer Fall: p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \to Y) \ {*}{\longrightarrow}\ (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \to Y) = s/s = 1 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/3)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \wedge Y) = 0] = 1$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \to Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

p = 1, $p^T = 1$
p = 0, $p^T = (1/2)^n$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\Rightarrow}\ (X \to Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \to Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \to Y) = 0/n = 0] = (1/2)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

p = 1, $p^T = (1/2)^s$
p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\longrightarrow}\ (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/2)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \wedge Y) = 0] = 1$

3. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

$p = 1$, $p^T = 1$
$p = 0$, $p^T = (1/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ $(X \rightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1 *\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 *\!\longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/3)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

$p = 1$, $p^T = 1$
$p = 0$, $p^T = (2/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ $(X \leftrightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1 *\!\Rightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 *\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0] = (2/3)^n$

4-4-4 Inklusiv - Exklusiv

Zunächst der *semi-analytische* Schluss vom *inklusiven* auf das *exklusive* „oder“, und zwar mit der *Normal*-Implikation $\rightarrow$.

- qualitative Basis: $X \vee Y \longrightarrow X >< Y$
- quantitative Form: $p(X \vee Y) = r/n = 1 \longrightarrow p(X >< Y) = s/n = 1$ $\quad r = s = n$
- Bruch-Form: $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \dfrac{b+c}{a+b+c+d} = 1$

Nachfolgend die Werte für n = 1, n = 2 und n = 3, bei p = 1:

$n = 1$ $(X_1 \vee Y_1) \longrightarrow (X_1 >< Y_1)$ $\quad p^T = 3/4$

$n = 2$ $(X_1 \vee Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2) \longrightarrow (X_1 >< Y_1) \wedge (X_2 >< Y_2)$ $\quad p^T = 11/16$

$n = 3$ $(X_1 \vee Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2) \wedge (X_3 \vee Y_3) \longrightarrow$
$(X_1 >< Y_1) \wedge (X_2 >< Y_2) \wedge (X_3 >< Y_3)$ $\quad p^T = 55/64$

Wenn man diese Reihe fortsetzt, kommt man zu:

$(X_1 \vee Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \vee Y_n) \longrightarrow (X_1 >< Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n >< Y_n)$.

Dies schreibt man *streng quantitativ* als: $p(X \vee Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X >< Y) = n/n = 1$

Die allgemeine Formel zur Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T dieses Schlusses lautet:

$$p^T[p(X \vee Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X >< Y) = n/n = 1] = (4^n - 2^n - 1)/4^n$$

Der *umgekehrte* Schluss vom exklusiven auf das inklusive „oder" ist eine *Tautologie* und somit einfach zu handhaben:

$$p^T[p(X >< Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \vee Y) = n/n = 1] = 4^n//4^n = 1.$$

4-4-5 Erweiterungen

Ich behandele hier folgende Schluss-Strukturen der Normal-Implikation (mit Beispielen):

$p = 1$ auf $p = 1$
$p = 1$ auf $p = 0$
$p = 0$ auf $p = 1$
$p = 0$ auf $p = 0$
Aber nur *echte* Schlüsse mit $p^T = 1$.

• $p = 1 \Rightarrow p = 1$
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1] = 1$

• $p = 0 \Rightarrow p = 0$
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

• $p = 1 \Rightarrow p = 0$
a) kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht in Kontravalenz zu $X \mid Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \mid Y) = 0] = 1$

b) nicht kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht nicht in Kontravalenz zu $X \nabla Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \nabla Y) = 0] = 1$

• $p = 0 \Rightarrow p = 1$
a) kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \Rightarrow p(X \nabla Y) = 1] = 1$

b) nicht kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \Rightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$

4 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

4-5-0 Einführung

Dieses Kapitel knüpft vor allem an Unter-Kapitel 4 – 2, *Quantoren- und Prädikaten-Logik*.
Entsprechend früheren Erläuterungen findet primär folgende *Quantifizierung* statt:

• alle	Λ	$p = 1$	n/n
• alle nicht	$\Lambda\neg$	$p = 0$	0/n
• einige	V	$p > 0$	> 0/n
• einige nicht	$V\neg$	$p < 1$	< n/n

Auf der Basis dieser Quantifizierungen werden die in 4 – 2 dargestellten Gesetze formuliert.

4-5-1 Implikation

• Strenger Schluss: von alle auf einige

Einfach:

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X) = n/n \Rightarrow p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$

Komplex:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (4/4)^n = 1$

• Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle

Einfach:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = (1/2)^{n-1}$ bzw. einfacher $1/2^{n-1}$

Beispiel: alle = n = 3: $p^T[p(X) > 0/3 \longrightarrow p(X) = 3/3] = (1/2)^{3-1} = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$

Komplex:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n] = (3^n +1)/4^n$

Beispiel für alle = n = 3:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/3 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 3/3] = (3^3 +1)/4^3 = 28/64 = 7/16 = 0{,}44$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / Formalisierung mit* $\wedge$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n] = (4^n - 2^n)/4^n$

Beispiel für n = 3:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = (4^3 - 2^3)/4^3 = 56/64 = 7/8 = 0{,}88$

4-5-2 Positiv-Implikation

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \; {*}{\Rightarrow} \; p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \; {*}{\Rightarrow} \; p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (3/3)^n = 1$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) = 1 \; {*}{\Rightarrow} \; p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) = n/n \; {*}{\Rightarrow} \; p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) > 0/n] = (1/1)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \rightarrow Y) = n/n] = 3^n/(4^n - 1)$

Beispiel für n = 2:
$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/2 \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \rightarrow Y) = 2/2] = 3^2/(4^2 - 1) = 9/15 = 3/5 = 0{,}6$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) > 0/n \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) = n/n] = 1/(2^n - 1)$

Beispiel für n = 2:
$p^T[p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) > 0/2 \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \; {*}{\rightarrow} \; Y) = 2/2] = 1/(2^2 - 1) = 1/3 = 0{,}33$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / andere Formalisierung mit* $\wedge$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \wedge Y) > 0/n \;] = (3^n - 2^n)/3^n$

Beispiel für n = 4:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \wedge Y) > 0/4] = (3^4 - 2^4)/3^4 = (81 - 16)/81 = 65/81 = 0{,}8$

Dieses Beispiel will ich etwas genauer erläutern und zeigen, wie man das obige Ergebnis prüfen kann.

$p(X \rightarrow Y) = 4/4 \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \wedge Y) > 0/4$

Wenn $p(X \rightarrow Y) = 4/4$ ergibt sich für

$p(X \wedge Y)$	p^T
4/4	1/81
3/4	8/81
2/4	24/81
1/4	32/81
0/4	16/81
	81/81

So kann man sagen:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 0/4] = 16/81 = 0{,}20$ Daraus folgt:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/4] = 81/81 - 16/81 = 65/81 = 0{,}80$

Der einfachste Weg ist der oben beschrittene:
Man berechnet erst den Wert für $p(X \wedge Y) = 0$, hier $p^T = 16/81$.
Nun subtrahiert man diesen Wert von dem der Gesamtverteilung: $81/81 - 16/81 = 65/81$.
Da gilt: $p^T[p(\Phi) = 0] + p^T[p(\Phi) > 0] = 1$, hat man so das gewünschte Ergebnis.

Die Verwendung der *Implikation* $\rightarrow$ für All-Strukturen: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und der *Konjunktion* $\wedge$ für Partikulär-Strukturen: $Vx(Fx \wedge Gx)$ ist wie gesagt gebräuchlich. Hier, bei der wahrscheinlichkeits-theoretischen Analyse, zeigt sich erneut, dass bei Verwendung dieser Relatoren der Schluss von „alle" auf „einige" nicht streng gilt (das hieße $p^T = 1$), sondern nur wahrscheinlich ist. Und zwar gilt das sowohl bei der Verwendung der *Implikation* $\rightarrow$ wie bei Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$. Man hält aber den Schluss von „alle" auf „einige" normalerweise für *sicher*, wieder ein Hinweis auf die Problematik dieser Formalisierung.

4-5-3 Systematik

Es werden hier nur ausgewählte Beispiele gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten.

Dabei sei daran erinnert: Für p = 1 („alle") ist ganz korrekt p = 1,0 oder p = 100% zu schreiben, da p eben eine *relative* Größe ist. Am klarsten ist es, wenn man p = n/n schreibt, also mit Angabe der *absoluten* Größen von Zähler und Nenner, zumal auch p^T von den absoluten Werten n abhängt, also unterschiedlich ausfällt, je nachdem ob p ist: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

Entsprechendes gilt für die anderen Werte wie p < 1, p = 0 und p > 0. Allerdings ist die 0 ein Sonderfall, weil hier *absoluter* und *relativer* Wert zusammenfallen: $p = 0 \Leftrightarrow p = 0\%$.

Der Einfachheit verwende ich aber nachfolgend die kürzere Schreibweise, ohne immer n einzusetzen, also z. B. nur p = 1 statt p = n/n oder p = 0 statt p = 0/n.

• Einfache Tautologie

$p^T = (2/2)^n = 1$

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$

$p^T[p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1]$

• Komplexe Tautologie

$p^T = (4/4)^n = 1$

$p^T[p(X \to Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) > 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \Rightarrow p(X \to \neg Y) > 0]$
$p^T[p(X \to Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y) < 1]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 0 \Rightarrow p(X \to \neg Y) < 1]$

• Einfach semi-analytisch
$p^T = 1/2^{n-1}$
$p^T[p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1]$
$p^T[p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0]$

• Komplex semi-analytisch
$p^T = (3^n + 1)/4^n$
$p^T[p(X \to Y) > 0 \longrightarrow p(X \to Y) = 1]$
$p^T[p(X \to \neg Y) > 0 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 1]$
$p^T[p(X \to Y) < 1 \longrightarrow p(X \to Y) = 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) < 1 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 0]$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$
$p^T[p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0]$?

4-5-4 Inklusiv / Exklusiv

1) *Einfach*
• Das inklusive „einige“: *mindestens einige* x sind F bzw. *mindestens ein* x ist ein F
$Vx(Fx) \Leftrightarrow p(Fx) > 0$
vereinfacht: $p(X) > 0$
• Das exklusive „einige“: *genau* einige x sind F
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow 0 < p(Fx) < 1$
vereinfacht: $0 < p(X) < 1$

strenger Schluss von „genau einige“ auf „mindestens einige“:
$p^T[0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(Fx) > 0] = 2^n/2^n = 1$
partieller Schluss von „mindestens einige“ auf „genau einige“:
$p^T[p(Fx) > 0 \Rightarrow 0 < p(Fx) < 1] = (2^n - 1)/2^n$

2) *Komplex*
(ich verwende hier die Formalisierung mit der Konjunktion $\wedge$)

• Das inklusive „einige“: *mindestens* ein F ist G
$Vx(Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow p(Fx \wedge Gx) > 0$
vereinfacht: $p(X \wedge Y) > 0$
• Das exklusive „einige“: *genau* einige F sind G
$\exists x(Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow 0 < p(Fx \wedge Gx) < 1$
vereinfacht: $0 < p(X \wedge Y) < 1$

strenger Schluss von „genau einige“ auf „mindestens einige“:

$p^T[0/n < p(X \wedge Y) < n/n \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) > 0/n] = (4/4)^n = 1$

vereinfacht: $p^T[0 < p(X \wedge Y) < 1 \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) > 0] = 1$

partieller Schluss von „mindestens einige“ auf „genau einige“:

$p^T[p(X \wedge Y) > 0/n \longrightarrow 0/n < p(X \wedge Y) < n/n] = (4^n - 1)/4^n$

Beispiel für n = 2:

$p^T[p(X \wedge Y) > 0/2 \longrightarrow 0/2 < p(X \wedge Y) < 2/2] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0,94$

vereinfacht: $p^T[p(X \wedge Y) > 0 \longrightarrow 0 < p(X \wedge Y) < 1] = (4^n - 1)/4^n$

4-5-5 Erweiterungen

Ich möchte hier einige Anmerkungen zur *Modal-Logik* machen. Schon mehrfach habe ich auf die *Verbindungen von Quantoren-Logik und Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T herstellen. Und zwar gilt:

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

In 2-5-5-3 bzw. 2-5-5-4 habe ich – entsprechend zu p – einen Wert *p(modal)*: p^M eingeführt. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Man kann aber auch entsprechend zu p^T einen Modal-Wert p^{TM} einführen, der den Grad der Notwendigkeit eines Schlusses bemisst. ‚p’ wie ‚p^T’ (in p^M) wird hier wieder allgemein für *relative Größe* genommen, steht nicht spezifisch für *Wahrscheinlichkeit*.

Z. B. $p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1$

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von n genauer bestimmen: $p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n$

Ich hatte gezeigt, dass gilt:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = 1/2^{n-1}$

z. B. für n = 2: $p^T[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen bzw. schreiben:

$p^{TM}[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Bedeutet: Der Notwendigkeits-Grad von $p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$ beträgt 1/2.

Oder: „$p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$“ ist zu 50% notwendig.

Wir haben uns eben mit der *inklusiven* Modal-Logik befasst. Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich“ als „genau möglich“, es schließt somit „alle“ aus. Man könnte formulieren:

genau möglich $\Rightarrow$ möglich

oder: p^T[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1

oder: p^{TM}[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1

Das wäre sprachlich zu formulieren: aus „genau möglich“ folgt *notwendig* „möglich“, also mit einem Notwendigkeits-Grad von $p^{TM} = 1$.

EXKURS: DER STATISTISCHE SYLLOGISMUS

1. AUSGANG

Der *Syllogismus* ist eine logische *Schluss-Form*, die erstmals von Aristoteles aufgestellt wurde. Aus der heutigen Sicht handelt es sich um *Quantoren-Logik*.

Der wohl bekannteste Syllogismus (Modus: *barbara*) hat folgende Form:

Alle G sind H	100% der G sind H	z. B.	Alle Philosophen sind weise
Alle F sind G	100% der F sind G		Alle Logiker sind Philosophen
Alle F sind H	100% der F sind H		Alle Logiker sind weise

Es handelt sich um einen logischen Schluss der Form:

Alle G sind H $\wedge$ Alle F sind G $\Rightarrow$ Alle F sind H

Übersichtlicher ist eigentlich, ihn folgendermaßen zu formulieren (aber im Syllogismus wird die erste Variante gewählt):

Alle F sind G $\wedge$ Alle G sind H $\Rightarrow$ Alle F sind H

Alle steht bekanntlich für 100 % (p = 1), die beiden Prämissen und der Schluss-Satz sind also *deterministisch*, und es ist ein strenger Schluss: $p^T = 1$

Man kann als zweite These aber auch einen *individuellen* Satz wählen – obwohl Aristoteles nie individuelle Termini verwendete –, dann ergibt sich (mit Beispiel):

Alle F sind G	Alle Philosophen sind weise
x_i ist ein F	Sokrates ist ein Philosoph
x_i ist ein G	Sokrates ist weise

Beim sogenannten *Statistischen Syllogismus* steht in der ersten Prämisse statt dem *deterministischen* „alle" (p = 1) ein *statistischer* Wert, zwischen 0 und 1 bzw. 0% und 100%.

Also z. B.: 80% der F sind G

Bei der zweiten Prämisse wird wiederum ein *individueller* Satz eingesetzt.

Beispiel für einen statistischen Syllogismus ist:

80% der F sind G	80% der Philosophen sind weise
x_i ist ein F	Sokrates ist ein Philosoph
x_i ist mit p = 0,8 ein G	Mit 80% Wahrscheinlichkeit ist Sokrates weise

Dies wäre nach dem herkömmlichen Verständnis des statistischen Syllogismus folgendermaßen zu deuten:

80% der F sind G
x_i ist ein F
――――――― 0,8 Wahrscheinlichkeit
x_i ist ein G

D. h. die Wahrscheinlichkeit (z. B. 0,8) wird der *logischen Ableitung* zugeschrieben, nicht dem *Schluss-Satz* ‚x_i ist ein G'.

2. DAS PROBLEM

Der *statistische Syllogismus* hat mich über lange Zeit beschäftigt. Ich hatte ein Modell der *graduellen logischen Folge* entwickelt, mit Hilfe der *theoretischen Wahrscheinlichkeit*. Diese Wahrscheinlichkeit nannte ich auch ‚*logische Wahrscheinlichkeit'*, genauso wie die Schlusswahrscheinlichkeit beim statistischen Syllogismus ‚logische Wahrscheinlichkeit' genannt wird. Bei meinem Modell der logischen Wahrscheinlichkeit gab bzw. gibt es aber große Unterschiede zum statistischen Syllogismus, die ich erst nach umfangreichen Untersuchungen einordnen konnte. Um die wichtigsten Unterschiede gegenüberzustellen:

1) *Modell statistischer Syllogismus*

- normalerweise 2 Prämissen
- die erste Prämisse ist statistisch, sie hat eine (empirische) Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$
- die zweite Prämisse ist individuell (ihr wird keine Wahrscheinlichkeit zugewiesen).
- der Schluss-Satz ist individuell (ihm wird ebenfalls keine Wahrscheinlichkeit zugewiesen).
- die logische Wahrscheinlichkeit der Deduktion ist gleich dem p-Wert der ersten Prämisse

2) *Modell theoretische Wahrscheinlichkeit*
Dieses Modell ist viel breiter angelegt, es können eine beliebige Anzahl von Prämissen, z. B. 2 Prämissen verwendet werden, die Prämissen können deterministisch oder statistisch sein.

Die entscheidenden Unterschiede sind aber:

- allen Sätzen wird eine Wahrscheinlichkeit zugewiesen, auch den individuellen
- es muss klar unterschieden werden zwischen der *empirischen Wahrscheinlichkeit* des *Schluss-Satzes* und der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* der Schlussfolgerung (Ableitung)
- die logische Wahrscheinlichkeit der Ableitung (p^T) ist normalerweise *ungleich* dem p-Wert der ersten Prämisse
- die Angabe der logischen Wahrscheinlichkeit verlangt i. allg. komplizierte Berechnungen und ist nicht einfach an der ersten Prämisse ablesen (wie beim statistischen Syllogismus).

Die Frage ist: Bestehen hier *zwei unterschiedliche* Arten von *logischer Wahrscheinlichkeit*? Oder lässt sich der statistische Syllogismus in mein Modell der theoretischen Wahrscheinlichkeit integrieren, so dass letztlich *nur* ein Modell logischer Wahrscheinlichkeit übrig bleibt? Dies wäre natürlich erwünscht, und daher werde ich im Folgenden eine Vereinheitlichung versuchen, indem ich den statistischen Syllogismus innerhalb meines Ansatzes analysiere.

3. AUSSAGEN-LOGISCHE ANALYSE

Streng genommen besitzt der statistische Syllogismus zwar eine *quantoren*- bzw. *prädikaten-logische* Struktur, aber wichtig ist dabei auch die – einfachere – *aussagen-logische* bzw. junktoren-logische Struktur. Daher analysiere ich das Problem zunächst (quantitativ) aussagen-logisch. Und zwar liegt hier die Struktur des *Modus ponens* vor:

A impliziert B	$A \to B$	quantitativ:	$p(A \to B) = 1$
<u>A ist wahr</u>	$\underline{A\quad}$		$\underline{p(A) = 1}$
B ist wahr	B		$p(B) = 1$

Der statistische Syllogismus müsste in der hier vorgestellten Symbolik – entsprechend einem *statistischen Modus ponens* – im *Beispiel* dann folgendermaßen lauten:

$$\frac{\begin{array}{l} p(A \to B) = 0{,}8 \\ p(A) = 1 \end{array}}{p(B) = 0{,}8}$$

Anders geschrieben:

$$p(A \to B) = 0{,}8 \wedge p(A) = 1 \;\Rightarrow\; p(B) = 0{,}8$$

(Warum ich hier den Doppelfeil für *vollständige* Deduktion nehme, wird gleich ersichtlich.)

Zur genaueren Erläuterung die Darstellung in Formeln, wie sie im Text entwickelt wurden:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0{,}8 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0{,}8$$

Aus dem zweiten Ausdruck (der zweiten Prämisse) ergibt sich: c = 0, d = 0.
Somit müssen der erste und der dritte Ausdruck, also die erste Prämisse und die Konklusion, den gleichen Wert haben, nämlich 0,8.

• Diese Analyse zeigt zwei vielleicht überraschende Ergebnisse:
Erstens, $p(A \to B) = 0{,}8 \wedge p(A) = 1 \Rightarrow p(B) = 0{,}8$ ist kein "Wahrscheinlichkeits-Schluss". Hier liegt *kein partieller* Schluss vor, sondern ein *vollständiger* Schluss. Der Schluss-Satz ist vollständig aus den beiden Prämissen ableitbar, der Ableitungsgrad, d. h. die *theoretische* Wahrscheinlichkeit beträgt $p^T = 1$.

$$p^T[p(A \to B) = 0{,}8 \wedge p(A) = 1 \Rightarrow p(B) = 0{,}8] = 1$$ Anders dargestellt:

$$\frac{\begin{array}{l} (A \to B) = 0{,}8 \\ p(A) = 1 \end{array}}{p(B) = 0{,}8}\; p^T = 1$$

Zweitens, nicht der Wert der *Ableitung* stimmt mit dem Wert der *ersten Prämisse* überein – die Ableitung besitzt eben die (*theoretische*) Wahrscheinlichkeit 1,0 ($p^T = 1{,}0$), sondern die *Konklusion* besitzt die gleiche (*empirische*) Wahrscheinlichkeit wie die erste Prämisse, nämlich 0,8, d. h. p = 0,8.

Nun sind A und B zunächst *unstrukturierte* Aussagen, es fragt sich, ob und wie weit sich solche Aussagen zur Analyse des statistischen Syllogismus verwenden lassen. Allerdings ist – wie beschrieben – nach meinem Verständnis die „Aussagen-Logik" nicht auf Aussagen festgelegt, sondern A und B können auch für Individuen oder Klassen o. a. stehen. Das wäre dann für das Beispiel wie folgt darzustellen:

$$\frac{\begin{array}{l} (\text{Philosoph} \to \text{weise}) = 0{,}8 \\ p(\text{Philosoph}) = 1 \end{array}}{p(\text{weise}) = 0{,}8}\qquad p^T = 1$$

Hier könnte man einwenden, dass damit das Wesen des statistischen Syllogismus (bzw. des Beispiels) nicht erfasst wird, allein schon, weil eben gar kein *Eigennamen* oder keine Individuumskonstante auftaucht. Ich werde daher später den statistischen Syllogismus mittels *Prädikaten-Logik* analysieren, die auf *Individuen* Bezug nimmt.

Die Frage ist aber, ob in der *aussagen-logischen* Analyse nicht dennoch die wesentliche logische Struktur des statistischen Syllogismus. erfasst wird. Allerdings geht es dabei aus der Sicht meines Modells um einen Sonderfall, wie ich im nächsten Punkt erläutere.

• Der *Modus ponens* mit p(A) = 1 ist ein *Sonderfall*.

Der *Modus ponens* wie im obigen Beispiel $p(A \rightarrow B) = 0{,}8 \wedge p(A) = 1 \Rightarrow p(B) = 0{,}8$ ist ein *Sonderfall*, weil hier gilt p(A) = 1, also die zweite Prämisse ist (positiv) *deterministisch*.

Unter dieser Bedingung gilt tatsächlich, dass man aus dem Wert der *ersten Prämisse* den Wert der *Konklusion* automatisch ablesen kann, wie wir es aus dem statistischen Syllogismus kennen, also $p(A \rightarrow B) = p(B)$.

Allgemein gilt: $p^T[p(A \rightarrow B) = r/n \wedge p(A) = 1 \Rightarrow p(B) = r/n] = 1$

Wenn $p(A) \neq 1$, ist die Berechnung jedoch wesentlich komplizierter. Ein wirklich statistischer Schluss mit der Struktur des Modus ponens, ein *„echter" statistischer Syllogismus* könnte z. B. lauten:

$$p^T[p(A \rightarrow B) = 2/3 \wedge p(A) = 1/3 \longrightarrow p(B) = 1/3] = 58/64$$

Oder anders geschrieben:

$$\frac{\begin{array}{l} p(A \rightarrow B) = 2/3 \\ p(A) = 1/3 \end{array}}{p(B) = 1/3} \qquad p^T = 58/64$$

In diesem Fall sind *alle* Werte *statistisch* (also ≠ 1 und ≠ 0): die Werte der beiden Prämissen, der Wert der Konklusion, und der Wert der Ableitung. Somit liegt auch nur ein *partieller* oder *semi-analytischer* oder eben *statistischer* Schluss vor.

Hier reicht es nicht, nur einen *Dezimalwert* wie z. B. 0,66 (statt 2/3) einzugeben, denn p^T hängt von der *absoluten* Größe ab, ist unterschiedlich, je nachdem, ob z. B. p = 2/3, 4/6, 6/9 usw. ist.

Nachfolgend erläutere ich eine Möglichkeit der Berechnung von p^T, ohne dass hier eine Formel entwickelt werden soll.

Zunächst ist aber zu klären, welche Werte p(B) annehmen kann.

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 2/3 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1/3 \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = ?$$

aus dem *ersten* Bruch:	a + c + d = 2, a + b + c + d = 3, also b = 1
aus dem *zweiten* Bruch:	a + b = 1, c + d = 2
zusammen bzw. Ergebnisse:	a = 0, b = 1, c + d = 2

Das bedeutet: Für p(B), als Bruch $\frac{a+c}{a+b+c+d}$, gibt es drei Möglichkeiten:

c = 2, d = 0: p(B) = 2/3
c = 1, d = 1: p(B) = 1/3
c = 0, d = 2: p(B) = 0/3

Zwar *könnte* in diesem Beispiel auch der Wert der Konklusion p(B) mit dem Wert der ersten Prämisse p(A → B) = 2/3 übereinstimmen. Aber dies ist nicht notwendig (und wäre zufällig).

Und in keinem Fall stimmen der Wert der ersten Prämisse p(A → B) = 2/3 und der Wert der Ableitung p^T überein.

Wählen wir aber die Möglichkeit p(B) = 1/3 und bestimmen den Grad der Ableitung: p^T.

Die Frage ist also: wenn p(A → B) = 2/3 und p(A) = 1/3, wie wahrscheinlich ist es dann, dass p(B) = 1/3?

Die Werte von a (a = 0) und b (b = 1) stehen fest, aber wir müssen zwischen c und d differenzieren, wobei 3 Elemente x_1, x_2 und x_3 zu unterscheiden sind, da a + b + c + d = n = 3.

Nr.	a	b	c	d
1	0	x_3	x_1,x_2	0
2	0	x_2	x_1,x_3	0
3	0	x_1	x_2,x_3	0
4	0	x_3	x_1	x_2
5	0	x_3	x_2	x_1
6	0	x_2	x_1	x_3
7	0	x_2	x_3	x_1
8	0	x_1	x_2	x_3
9	0	x_1	x_3	x_2
10	0	x_3	0	x_1,x_2
11	0	x_2	0	x_1,x_3
12	0	x_1	0	x_2,x_3

Zunächst die einfachere Berechnung für die *Positiv-Implikation* *——›:

Es gibt 12 Möglichkeiten, dass die Prämissen wahr sind, dass a = 0, b = 1 und c + d = 2.
Wir müssen klären, in wie vielen von diesen 12 Fällen gilt: c = 1

In den *Zeilen* 4 bis 9 steht 1 x unter c, d. h. von 12 Möglichkeiten ist in 6 Fällen c = 1.
Somit p^T = 6/12.

Man kann also im Ganzen formulieren:

$$p^T[p(A \rightarrow B) = 2/3 \wedge p(A) = 1/3 \ {*}\!\longrightarrow \ p(B) = 1/3] = 6/12 = 1/2 = 0{,}5$$

Nun zur Berechnung für die *Normal*-Implikation ——›:

Eine Implikation ist nur falsch, wenn das *Vorderglied wahr* ist und das *Nachglied falsch*.
D. h. hier: p(A → B) = 2/3 ∧ p(A) = 1/3 ——› p(B) = 1/3 ist nur falsch, wenn
p(A → B) = 2/3 ∧ p(A) = 1/3 wahr ist und p(B) = 1/3 falsch ist (also p(B) = 2/3 oder 0/3).
Das ist in den Zeilen 1 bis 3 und 9 bis 12 der Fall, also in 6 Möglichkeiten.

Die Gesamtanzahl ist aber hier nicht 12, sondern 64 (4^3), weil eben nicht nur die Fälle zählen, in denen die Prämissen *wahr* sind (wie bei der Positiv-Implikation), sondern alle Möglichkeiten.

Die 6 *negativen* Fälle zieht man ab von *allen* Fällen, also von 64.

So erhält man: p^T = 64/64 – 6/64 = 58/64 = 0,91

Man kann somit vollständig formulieren:

$$p^T[p(A \rightarrow B) = 2/3 \wedge p(A) = 1/3 \longrightarrow p(B) = 1/3] = 58/64 = 29/32 = 0{,}91$$

4. PRÄDIKATEN-LOGISCHE ANALYSE MITTELS IMPLIKATION

Kehren wir jetzt zurück zum statistischen Syllogismus im üblichen Sinne, bei dem wie beschrieben gilt:
- Die erste Prämisse ist statistisch: $0 < p < 1$
- Die zweite Prämisse ist deterministisch: $p = 1$.
- Der Schluss-Satz ist statistisch, und sein Wert stimmt überein mit der ersten Prämisse.

Genauer kann man den statistischen Syllogismus darstellen, wenn man ihn *prädikaten-logisch* analysiert. Denn er ist eine logische Form, bei der (anders als in der Aussagen-Logik) die Innen-Struktur der Sätze, das Verhältnis von Subjekt und Prädikat, eine Rolle spielt.

Nehmen wir einen Satz wie z. B. ‚Sokrates ist weise' Ein solcher Satz hat eine prädikaten-logische Struktur, weil hier einem Subjekt (Argument) ein Prädikat zugeordnet wird. Man schreibt normalerweise logisch: Fx_i oder $x_i \in F$. Das Problem ist, dass sich, bei dieser Formalisierung, prädikaten-logische Strukturen nicht ohne weiteres in mathematische Formeln übersetzen lassen.

Es bieten sich daher – wie vor allem im Punkt 0-4-3 erläutert – zwei alternative Formalisierungen an:
1. mittels der *Implikation*: ‚Sokrates ist weise' schreibt man dann: Sokrates → weise
   Formal $x_i \rightarrow F$ bzw. quantitativ $p(x_i \rightarrow F) = 1$
2. mittels der *Positiv-Implikation*: Sokrates *→ weise
   Formal: x_i *→ F bzw. quantitativ $p(x_i$ *→ F$) = 1$

In diesem 4. Punkt verwende ich erst einmal die übliche Implikation →:
Es stellt sich also die Frage, ob die folgende *Hypothese* gültig ist. Gilt

$$p(F \rightarrow G) = r/n \ \wedge \ p(x_i \rightarrow F) = 1 \ \Rightarrow p(x_i \rightarrow G) = r/n \ ?$$

Ich übersetze diesen Ausdruck wieder in mathematische Formeln. Da wir es hier mit 3 Ausdrücken F, G und x zu tun haben, ergeben sich *umfangreichere Formeln* (mit 8 Zahl-Variablen), die sich – wie in 1-3-1-5 beschrieben – aus den Wahrheitstafeln ableiten lassen.

Die entsprechenden Wahrheitstafeln sind:

F	G	x_i		$F \rightarrow G$	$x_i \rightarrow F$	$x_i \rightarrow G$
+	+	+	a	+	+	+
+	+	–	b	+	+	+
+	–	+	c	–	+	–
+	–	–	d	–	+	+
–	+	+	e	+	–	+
–	+	–	f	+	+	+
–	–	+	g	+	–	–
–	–	–	h	+	+	+

Wir erhalten also 3 Formeln:

(1) $$p(F \rightarrow G) = \frac{a+b+e+f+g+h}{a+b+c+d+e+f+g+h} = \frac{r}{n}$$

(2) $$p(x_i \rightarrow F) = \frac{a+b+c+d+f+h}{a+b+c+d+e+f+g+h} = 1$$

(3) $p(x_i \rightarrow G) = \dfrac{a+b+d+e+f+h}{a+b+c+d+e+f+g+h} = \dfrac{s}{n}$

<u>1. Fall: p(F → G) = 1</u>
Prüfen wir die Gleichungen zunächst für den einfachen, nämlich *determistischen* Syllogismus, bei dem auch die erste Prämisse p(F → G) den Wert p = 1 hat.
- Dann ergibt sich aus der (1) Gleichung: c + d = 0
- Und aus der (2) Gleichung: e + g = 0
- Dann bleibt bei der (3) Gleichung stehen:

$\dfrac{a+b+f+h}{a+b+f+h} = 1$ Dies ist also das erwünschte Resultat. Denn hier gilt:

$$p(F \rightarrow G) = r/n = 1 \ \wedge p(x_i \rightarrow F) = 1 \ \Rightarrow \ p(x_i \rightarrow G) = r/n = 1$$

Es ist also ein *strenger* Schluss gegeben, mit $p^T = 1$.

<u>2. Fall: p(F → G) = r/n, dabei gilt: 0 < p < 1</u>
Hier ist p(F → G) also variabel bzw. statistisch. Sonst gilt wieder $p(x_i \rightarrow F) = 1$.
Gemäß dem statistischen Syllogismus müsste man erwarten, dass dann gilt: $p(Fx_i \rightarrow G) = r/n$.

Das lässt sich aber nicht aus den Formeln ableiten.
- Aus der (2) Formel ergibt sich wie gesagt: e = 0, g = 0
- Aus der (1) Formel ergibt sich: a + b + e + f + g + h = r.
  Da e = 0, g = 0, folgt daraus: a + b + f + h = r
- Bei der (3) Formel ist der Zähler: a + b + d + e + f + h. Da e = 0, bleibt: a + b + d + f + h.

Wenn gelten sollte a + b + d + f + h = r, dann müsste d = 0 sein. Das steht aber nicht fest.
Das Problem ist der *unbestimmte* Wert von d. Man kann nur sagen: c + d = n – r. Somit d = n – r – c
$p(F \rightarrow G) = r/n \ \wedge p(x_i \rightarrow F) = 1 \ \longrightarrow \ p(x_i \rightarrow G) = r/n$ ist also nur ein *semi-analytischer* Schluss ($0 < p^T < 1$), kein strenger Schluss.

<u>3. Fall: p(F → G) = 4/5</u>
Versuch, ob sich durch Einsetzung *konkreter* (statistischer) Zahlen für p(F → G) eine Lösung ergibt.
Aus obiger Gleichung ergibt sich: c + d = 1. Also kann man den Wert von d auch hier nicht genau bestimmen. Es sind möglich: d = 1 oder d = 0. Nur wenn d = 0, hat $p(x_i \rightarrow G)$ den gleichen Wert wie p(F → G), nämlich 4/5. Nur dann liegt ein typischer statistischer Syllogismus vor. Wenn d = 1, ergibt sich dagegen $p(x_i \rightarrow G) = 5/5$.

Es ergibt sich (bei d = 0)**:**

$$\begin{array}{l} p(F \rightarrow G) = 4/5 \\ p(x_i \rightarrow F) = 1 \\ \hline p(x_i \rightarrow G) = 4/5 \end{array} \; p^T < 1$$

D. h. auch hier gibt es keinen deterministischen, keinen vollständiger Schluss. (Wie die logische Wahrscheinlichkeit p^T oben genau zu berechnen ist, soll nicht erläutert werden.)

4. Zusätzliche Prämisse

Man könnte postulieren, dass noch eine Prämisse $p(x_i) = 1$ einzuführen ist. Wie unten gezeigt wird, ergibt sich in diesem Fall in der Tat ein *deterministischer* Schluss, und der Schluss-Satz hat den Wert p = r/n bzw. im Beispiel 4/5, wie die erste Prämisse. Das entspricht also genau dem Modell des statistischen Syllogismus.

Zur Erklärung:

$p(x_i) = 1$ bedeutet: $\frac{a+c+e+g}{a+b+c+d+e+f+g+h} = 1$

Daraus resultiert: b = 0, d = 0 , f = 0, h = 0. Aus der (2) Formel ergab sich: e = 0, g = 0.

Somit folgt für die Formel (3): $\frac{a}{a+c} = r/n$

Und exakt dies ergibt sich auch für die Formel (1)

$p(F \to G) = \frac{a+b+e+f+g+h}{a+b+c+d+e+f+g+h} = \frac{r}{n}$

wenn man alle Variablen mit dem Wert 0 herausstreicht. Man erhält also:

$$\begin{array}{ll} p(F \to G) = r/n & \\ p(x_i \to F) = 1 & \\ p(x_i) = 1 & \\ \hline p(x_i \to G) = r/n & p^T = 1 \end{array}$$

5. PRÄDIKATEN-LOGISCHE ANALYSE MITTELS POSITIV-IMPLIKATION

Da die Implikation ja wie beschrieben einige Probleme aufwirft, ist zu prüfen, wie sich der statistische Syllogismus mittels der *Positiv-Implikation* $*\!\!\to$ darstellen lässt.

Gilt hier die Hypothese:

$p(F *\!\!\to G) = r/n \wedge p(x_i *\!\!\to F) = 1 \;\; *\!\!\Rightarrow \;\; p(x_i *\!\!\to G) = r/n$?

Ich übersetze diesen Ausdruck wieder in *mathematische* Formeln, entsprechend den Formeln für die Positiv-Implikation, wie sie im Text aus den Wahrheitstafeln entwickelt wurden.

(1) $p(F \to G) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

(2) $p(x_i \to F) = \dfrac{a+c}{a+c+e+g} = 1$

(3) $p(x_i \to G) = \dfrac{a+e}{a+c+e+g} = \dfrac{s}{m}$

Unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

<u>1. Fall: p(F *→ G) = 1</u>
Prüfen wir die Gleichungen zunächst wieder für den einfachsten, *deterministischen* Fall, dass auch der Wert für p(F *→ G) = 1 ist.
- Dann ergibt sich aus der (1) Gleichung: c + d = 0
- Aus der (2) Gleichung: e + g = 0
- Somit ergibt sich für die (3) Formel:

$$\frac{a+0}{a+0+0+0} = \frac{a}{a} = 1$$

Für den deterministischen Fall stimmt also die Formel
$p(F *\to G) = 1 \wedge p(x_i *\to F) = 1 \;\; *\Rightarrow \;\; p(x *\to G) = 1$. Entsprechend $p^T = 1$.

<u>2. Fall: p(F *→ G) = r/n, dabei 0 < p < 1</u>
Hier ist p(F *→ G) also variabel bzw. statistisch.
Gemäß dem statistischen Syllogismus müsste man erwarten, dass dann gilt: $p(x_i \to G) = r/n$.
Bei der normalen Implikation lässt sich das aber nicht aus den Formeln ableiten.
Wie sieht es bei der *Positiv-Implikation* aus?

- Aus der (1) Gleichung ergibt sich z. B.: a + b = r, also a = r – b
- Aus der (2) Gleichung ergibt sich wie gesagt: e = 0, g = 0

- Daraus folgt für die Gleichung (3): $\dfrac{a+e}{a+c+e+g} = \dfrac{s}{m}$

$\dfrac{a}{a+c} = \dfrac{s}{m}$ Vergleichen wir die mit der (1) Gleichung $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n}$

Damit ist aber die Übereinstimmung von (1) und (3) keineswegs gesichert. Der *Zähler* wäre nur gleich, wenn b = 0. Der *Nenner* wäre nur gleich, wenn zusätzlich d = 0; beides ist nicht beweisbar.

D. h. auch mit der *Positiv-Implikation* gilt die folgende Ableitung nur als *partieller Schluss*:
$p(F *\to G) = r/n \wedge p(x_i *\to F) = 1 \;\; *\longrightarrow \;\; p(x_i *\to G) = r/n$
Denn nur wenn $b = 0 \wedge d = 0$, ist der Wert von Gleichung (1) und der Wert von Gleichung (3) gleich.

Auch hier gilt die Ableitung nur, wenn man eine *Zusatzhypothese* $p(x_i) = 1$ einführt, also:
$p(F *\to G) = r/n \wedge p(x_i *\to F) = 1 \wedge p(x_i) = 1 \;\; *\Rightarrow \;\; p(x_i *\to G) = r/n$

Diese prädikaten-logische Analyse – mit Zusatzhypothese – führt somit wie gewünscht zu einem gültigen Schluss, bei dem gilt: $p(F \to G) = p(x_i \to G)$, entsprechend auch für die Positiv-Implikation.

BILANZ: STATISTISCHER SYLLOGISMUS

1) ERGEBNISSE
Als *statistischen Syllogismus* kann man eine Schluss-Form bezeichnen, die – nach meiner Analyse – folgende Eigenschaften besitzt:

- Die erste Prämisse ist statistisch: $p = r/n$, $0 < p < 1$.
- Die zweite Prämisse ist deterministisch: $p = 1$.
- Der Schluss-Satz ist statistisch, und sein Wert stimmt überein mit der ersten Prämisse.
- Die Ableitung selbst, mittels *theoretischer Wahrscheinlichkeit*, ist deterministisch: $p^T = 1$

Wichtig ist: Anders als sonst dargestellt, besitzt der Schluss-Satz eine *empirische* (statistische) Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$, *keine logische*. Dagegen ist die Deduktion *deterministisch*, sie besitzt eine *theoretische* (oder *logische*) Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$.

2) AUSSAGEN-LOGISCHE ANALYSE
Aussagen-logisch lässt sich die Formalisierung des statistischen Syllogismus überzeugend durchführen:

$$p^T[p(A \rightarrow B) = r/n \ \wedge \ p(A) = 1 \ \Rightarrow \ p(B) = r/n] = 1$$

Aber diese Formalisierung berücksichtigt nicht konkret *individuelle* Sätze, wie sie im statistischen Syllogismus vorkommen.

3) PRÄDIKATEN-LOGISCHE ANALYSE
Prädikaten-logisch werden die individuellen Sätze erfasst, aber man erhält zunächst nur einen *partiellen* Schluss:

$$p(F \rightarrow G) = r/n \ \wedge \ p(x_i \rightarrow F) = 1 \ \longrightarrow \ p(x_i \rightarrow G) = r/n, \text{ also } 0 < p^T < 1$$

Doch durch Einführung einer *Zusatz-Prämisse* $p(x_i) = 1$ wird der Schluss *streng gültig*:

$$p(F \rightarrow G) = r/n \ \wedge \ p(x_i \rightarrow F) = 1 \ \wedge \ p(x_i) = 1 \ \Rightarrow \ p(x_i \rightarrow G) = r/n, \text{ also } p^T = 1$$

Bei Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$ wird die Situation nicht verändert.

Es bleiben allerdings einige *Probleme* bestehen:
- Die Formalisierung eines individuellen Satzes wie ‚Sokrates ist Philosoph' mittels des aussagen-logischen *Implikators* als $x_i \rightarrow F$.
  Im Punkt 0-4 (vor allem 0-4-3-2) habe ich aber erläutert, warum dies m. E. legitim ist.
- Die *quantitative Darstellung* eines solchen individuellen Satzes mit der empirischen Wahrscheinlichkeit p als $p(x_i *\!\rightarrow G) = 1$
  Wie ist ein solcher Satz zu interpretieren? Man könnte ihn z. B. verstehen als „Sokrates ist in allen Fällen Philosoph" (vgl. hierzu 1-4-5, vor allem 1-4-5-1 und unten im Text).
- Die Zuordnung eines Wahrheitswertes für die *Zusatz-Hypothese* ‚x_i'.

Man könnte einwenden, ‚x_i' ist kein Satz, sondern ein Zeichen, man kann ihm keinen Wahrheitswert zuordnen. Wie ich aber in 0-4-4 gezeigt habe, ist das im Rahmen einer *funktionalen* Logik doch möglich. ‚x_i' steht dann für „x_i existiert" oder „x_i ist belegt".
- Die *quantitative Darstellung* der Zusatz-Hypothese als $p(x_i) = 1$.

Wie ist das zu verstehen? Man könnte es im Beispiel so deuten, als „Sokrates existiert *in allen Fällen*".

4) DIE ZUORDNUNG DES STATISTISCHEN WERTES
Es geht hier genau um die Zuordnung der *statistischen* Wahrscheinlichkeit zum *Schluss-Satz, nicht zur Ableitung*.

Die Analyse dieses Problem ist sehr komplex und richtet sich vor allem an Experten.
Kehren wir zur Einstieg noch einmal zum Anfangsbeispiel zurück:

80% der F sind G	80% der Philosophen sind weise
<u>x_i ist ein F</u>	<u>Sokrates ist ein Philosoph</u>
x_i ist mit $p = 0{,}8$ ein G	Mit 80% Wahrscheinlichkeit ist Sokrates weise

Dies wäre nach dem *herkömmlichen* Verständnis des statistischen Syllogismus folgendermaßen zu deuten: Die Wahrscheinlichkeit (z. B. 0,8) – als *logische* Wahrscheinlichkeit – wird der *Ableitung* zugeschrieben, nicht dem *Schluss-Satz* ‚x_i ist ein G'.

Dieser individuelle Schluss-Satz ‚x_i ist ein G' wird *gar nicht quantifiziert*, genauso wie die individuelle Prämisse ‚x_i ist ein F'.

Bei allen Formalisierungen ergab sich jedoch das Umgekehrte:
Der Schluss-Satz ist vollständig aus den beiden Prämissen ableitbar, der Ableitungsgrad, d. h. die *theoretische* oder *logische* Wahrscheinlichkeit beträgt $p^T = 1$.

Und nicht der Wert der *Ableitung* stimmt mit dem Wert der *ersten Prämisse* überein, sondern die *Konklusion* besitzt die gleiche (*empirische*) Wahrscheinlichkeit wie die erste Prämisse, nämlich 0,8, d. h. $p = 0{,}8$.

Wenn dem aber so ist, wie lässt sich ein *individueller* Satz wie ‚x_i ist mit $p = 0{,}8$ ein F' oder ‚Sokrates ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise' deuten?

• *Variabler* individueller Satz
Nehmen wir zunächst einen *variablen* individuellen Satz wie: ‚Ein beliebiger (oder jeder beliebige) Philosoph ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise'. Und setzen ihn in Relation zu einem allgemeinen statistischen Satz:

‚80% der Philosophen sind weise'.
‚Ein *beliebiger* Philosoph ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise'.

Man könnte denken, der zweite Satz ist ein *Schluss* aus dem ersten Satz, aber dem ist nicht so. Die beiden Sätze sind einfach *synonyme* Umformungen oder Umformulierungen (man könnte auch sagen Äquivalenzen).

Der zweite Satz ist also *keine* Ableitung aus dem ersten mit $p^T = 80\%$, sondern auch hier gilt in beiden Fällen: $p = 0{,}8$, *nicht* $p^T = 0{,}8$. Nur ist der erste Satz mit der *relativen Häufigkeit* formuliert, der zweite mit der entsprechenden *Wahrscheinlichkeits*-Angabe.

• *Konstanter* individueller Satz
Nun zu einem *bestimmten* individuellen Satz, wie er im statistischen Syllogismus verwendet wird, z. B. ‚Sokrates ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise'. Welche Interpretationen sind hier möglich?

– *Umformung*
Ist hier auch denkbar, dass der Satz nur eine Umformung ist? Wohl kaum, $p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$ ist nicht äquivalent $p(F \rightarrow G) = 0{,}8 \wedge p(x_i \rightarrow F) = 1$ (bzw. mit Zusatzhypothese $p(x_i) = 1$).

Allerdings, wenn man die singuläre Prämisse dem Schluss-Satz hinzufügt, gilt doch generell

$A \rightarrow B \wedge A \Leftrightarrow A \wedge B$ bzw. $p(A \rightarrow B) = r/n \wedge p(A) = 1 \Leftrightarrow p(A) = 1 \wedge p(B) = r/n$,

aber das will ich nicht weiter verfolgen.

– *Umdeutung*
Eine weitere Frage ist: Wenn gilt: $p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$ folgt mit $p^T = 1$ aus den Prämissen, könnte man das umdeuten in: $p(x_i \rightarrow G) = 1$ folgt mit $p^T = 0{,}8$ aus den Prämissen? Dann wäre also der Schluss-Satz *deterministisch* und die Ableitung *statistisch* – und das scheint unproblema-

tischer zu handhaben. Aber diese Umformung ist falsch, wenn $p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$ *sicher* folgt ($p^T = 1$), dann folgt $p(x_i \rightarrow G) = 1$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit $p^T = 0$. Außerdem, das Grundproblem, wie ein quantitativer (bestimmter) individueller Satz zu deuten ist, ergibt sich vergleichbar bei p = 1 wie bei z. B. p = 0,8.

Allenfalls, wenn man $p(x_i \rightarrow G) = 1$ quasi *de-quantifizieren* würde, zu „$x_i \rightarrow G$"; entsprechend $p(x_i \rightarrow G) = 0$ zu $\neg(x_i \rightarrow G)$, entsprechend der qualitativen Aussagen-Logik. Dann wäre das Problem der Quantifizierung individueller Sätze erledigt. Nur dann könnte man eben keine *mathematisch-quantitative* Berechnung des statistischen Syllogismus mehr vornehmen, wie sie hier gerade angestrebt wird.

– *quantitative Wahrheit*

Könnte man ‚$p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$' deuten als: „Der Satz ‚$x_i \rightarrow G$' ist zu 80% (empirisch) wahr, hat einen *Wahrheitsgrad* von 0,8"? Normalerweise wird die (empirische) Wahrheit ja nicht quantifiziert, man unterscheidet nur *qualitativ* zwischen *wahr* und *falsch*. Ich habe aber gezeigt, dass es unter bestimmten Bedingungen durchaus sinnvoll ist, Wahrheit zu quantifizieren (vgl. 1-3-0-2). Das wäre hier wie folgt zu deuten:

Der reale Sachverhalt sei: $p(x_i \rightarrow G) = 1{,}0$.

Wenn der Satz aussagt, $p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$, dann hat er einen Wahrheitsgrad von 0,8.

Diese Argumentation ist sinnvoll, aber sie trifft nicht das, was mit dem statistischen Syllogismus intendiert ist; dort ist nicht gemeint, dass der Schluss-Satz einen bestimmten Wahrheits-Grad besitzt.

– *intensionale Quantität*

In eine ähnliche Richtung geht der Ansatz der intensionalen Quantität (vgl. vor allem 1-4-5). Man deutet p hier so, dass damit etwas über das *Ausmaß der Eigenschaft* ausgesagt wird. Am konkreten Beispiel: Man würde dann nicht sagen ‚Sokrates ist *mit* 80% (Wahrscheinlichkeit) weise', sondern ‚Sokrates ist *zu* 80% weise'. Aber auch das trifft nicht die Intentionen des statistischen Syllogismus.

– extensionale Quantität

Man interpretiert hier ‚$p(x_i \rightarrow G) = 0{,}8$', indem man z. B. über die *Zeit* quantifiziert. Im Beispiel hieße das: „Sokrates ist in 80% seiner Lebenszeit weise, in 20% aber nicht". Das mag bei einer – eher konstanten – Eigenschaft wie Weisheit nicht sehr plausibel sein, aber bei einer anderen Eigenschaft wie z. B. „gut gelaunt" durchaus vorstellbar. In der Tat interpretiert man quantitative Individual-Sätze in dieser Art am besten, mit Bezug auf Zeit. Ähnlich könnte man sagen: In 80% aller *Fälle* ist Sokrates gut gelaunt. Oder unter 80% aller *Bedingungen* (vgl. 1-4-5-1).

Man mag zunächst denken, dass man hier auch von *möglichen Welten* sprechen könnte. ‚Sokrates ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise' wäre dann wie folgt zu verstehen: „Sokrates ist in 80% der möglichen Welten weise, in 20 % aber nicht". Aber Vorsicht, die Rede von möglichen Welten bezieht sich auf die *theoretische* Wahrscheinlichkeit (oder theoretische Wahrheit), nicht auf die empirische.

Jedenfalls ist die extensionale Quantität die angemessene Form, um einen *unabhängigen*, quantitativen, singulären Satz darzustellen. Man kann hier von *objektiver* oder *absoluter* Wahrscheinlichkeit sprechen (was nichts daran ändert, dass Wahrscheinlichkeit eine relative Größe ist).

Allerdings ist auch dieser Ansatz dem statistischen Syllogismus nicht angemessen. Der Schluss-Satz im Beispiel ist keineswegs eine Aussage über Sokrates Verhalten zu unterschiedlichen Zeiten, sondern eine *Ableitung von den Häufigkeitsverhältnissen* bei allen Philosophen, von denen eben 80% weise sein sollen.

– *subjektive Wahrscheinlichkeit*

Am richtigsten ist es daher, die Wahrscheinlichkeit bei der Konklusion zu *relativieren*.

Eine Möglichkeit ist, von einer *subjektiven* Wahrscheinlichkeit auszugehen. Man argumentiert: real, *objektiv*, gilt *entweder* Sokrates ist weise *oder* er ist nicht weise (d .h. quantitativ: er ist mit 100% Wahrscheinlichkeit weise oder ist er mit 0% Wahrscheinlichkeit weise). Wir wissen aber *subjektiv* nicht sicher, welche der beiden Möglichkeiten zutrifft, wir wissen nur mit 80% Sicherheit, dass er weise ist. Wenn wir allein wissen, dass Sokrates Philosoph ist, aber sonst keine weitere, spezifische Information über ihn haben, dann sind die 80% eben die einzige Aussage, die wir treffen können.

– *bedingte Wahrscheinlichkeit*

Am besten ist es aber, beim statistischen Syllogismus von einer *relativen* oder *bedingten* Wahrscheinlichkeit auszugehen.

D. h. man kann einen Satz wie ‚Sokrates ist mit 80% Wahrscheinlichkeit weise' gar nicht für sich *allein* deuten, sondern nur *in Relation* zu den Prämissen.

Die 80% im Schluss-Satz sagen nichts über das *spezifische* Individuum Sokrates aus, sondern, wie die Oberprämisse, letztlich nur etwas über die *Klasse* der Philosophen. Für einen (jeden) anderen Philosophen, z. B. Platon, ergäben sich die gleichen 80% Wahrscheinlichkeit. Es wird eigentlich nur ausgesagt, dass ein Individuum zu einer bestimmten Gruppe (Klasse) gehört, für die eine bestimmte *Häufigkeitsverteilung* gilt. Nur wenn für diese Gruppe 100% oder 0% gelten würden, dann wäre auch das Individuum *eindeutig* bestimmt.

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit könnte man wie folgt schreiben:

p(Sokrates ist weise, 80% der Philosophen sind weise $\wedge$ Sokrates ist Philosoph) = 0,8.

Aber wie erläutert, es ist die *empirische Wahrscheinlichkeit p*, mit p^T könnte man schreiben.

p^T[p(Sokrates ist weise, 80% der Philosophen sind weise $\wedge$ Sokrates ist Philosoph) = 0,8] = 1

Hier sind noch Fragen bzw. Antworten offen. Dennoch glaube ich sagen zu können: Es ist gelungen, ein mathematisches Modell des statistischen Syllogismus anzugeben. Und es ist gelungen, den statistischen Syllogismus in meine Theorie zu integrieren, nach welcher der *Grad der Folgerichtigkeit* mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T berechnet wird.