Ben-Alexander Bohnke (2008, modifiziert aus „Integrale Logik“)

VERSCHIEDENE WAHRHEITSTAFELN

1. Aussagen-logische synthetische Wahrheitstafel
2. Aussagen-logische analytische Wahrheitstafel
3. Quantoren-logische analytische Wahrheitstafel

Der Artikel behandelt die *Wahrheitstafel*. Die folgenden Ausführungen sind recht detailliert und speziell, vor allem für Experten gedacht. Andere Leser können sie ggf. selektiv lesen. Man mag fragen, ob es notwendig ist, für ein scheinbar eher einfaches Thema wie die „Wahrheitstafel“ so ausführliche und differenzierte Ausführungen zu machen. Aber es wird sich zeigen, dass die Wahrheitstafel bzw. ihre viele verschiedenen Varianten ein äußerst anspruchsvolles Sujet sind. Und da andererseits die Wahrheitstafel m. E. zu den *Essentials* der Logik gehört, lohnt sich der Aufwand doch.

Die in diesem Artikel gemachten Ausführungen stellen sogar nur eine Auswahl meiner Analysen über Wahrheitstafeln dar.

Weitere Ausführungen, vor allem auch über die *quantitative Wahrheitstafel*, finden sich in meinem Buch „Integrale Logik“.

Man kann unterscheiden zwischen *Wahrheitstafeln* für *synthetische* und *analytische* Relationen (kurz *synthetische* bzw. *analytische Wahrheitstafel*). Ich behandele hier erst die synthetische Wahrheitstafel, doch benötigt man für deren Deutung bereits analytische Relationen.

Während die *aussagen-logische* Wahrheitstafel *systematisch* dargestellt wird, werden bei der quantoren-logischen und quantitativen Wahrheitstafel nur ausgesuchte Themen behandelt.

1. AUSSAGEN-LOGISCHE SYNTHETISCHE WAHRHEITSTAFEL

1.1 NORMALE WAHRHEITSTAFEL

Ein Beispiel für die *normale* Wahrheitstafel einer *synthetischen* Relation (Implikation) ist:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Auch wenn in der Wahrheitstafel Möglichkeiten für *Wahrheit* (+) und *Falschheit* (–) der Relation X → Y angegeben werden, so enthält X → Y doch eine *Wahrheits- bzw. Gültigkeits-Behauptung*. Diese ist eben nur *implizit* bzw. *unmarkiert*.

Dagegen wird die Behauptung „’X → Y’ ist ungültig“ durch die *Negation* gekennzeichnet, also *explizit* und *markiert*: ¬(X → Y).

„X → Y“ kann man somit auch umgekehrt formulieren als: „’X → Y’ ist gültig“.

Von daher kann man auch sagen, der Satz ‚X → Y’ macht die *Aussage* X → Y. Ansonsten würde es nahe liegen, nur zu sagen: wie ein *Wort* eine Sache o. ä. *bezeichnet*, so *bezeichnet* ein *Satz* einen Sachverhalt. Aber da der Satz eben darüber hinaus ausdrückt, dass der Sachverhalt besteht (oder nicht), macht er eine *Aussage*. Allerdings kann man auch eine *Wort*-Bezeichnung so begreifen, dass sie bereits implizit eine Aussage über *Existenz/Nicht-Existenz* beinhaltet, denn man kann nur etwas bezeichnen, das irgendwie existent ist (vgl. 0-4-4).

Die (normale) Wahrheitstafel enthält verschiedene *Deutungsmöglichkeiten* bzw. Schlussmöglichkeiten. Ich verdeutliche das anhand der Wahrheitstafel der beiden synthetischen Relation $X \rightarrow Y$ und $\neg X \rightarrow Y$.

Die wichtigsten Deutungen sind die *konjunktive* und die *implikative* Deutung. Die konjunktive Deutung ist die *zentrale*, die normale Wahrheitstafel enthält implizit bereits die *konjunktive* Deutung. Die implikative Deutung ist bei *Implikationen* bzw. Schlüssen zusätzlich heranzuziehen, in der quantitativen Logik ist sie besonders wichtig.

1.2 KONJUNKTIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei der *konjunktiven* Deutung wird aus der *Konjunktion* der beiden Einzel-Komponenten X,Y auf die Gesamt-Relation, z. B. $X \rightarrow Y$ geschlossen; dabei stehen die *Konjunktionen* von X und Y für die (vier) *möglichen Welten:* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$.

1.2.1 Analyse von $X \rightarrow Y$

Die *konjunktive Deutung* oder Interpretation verdeutlicht folgende Form der Wahrheitstafel:

	X	Y	$X \rightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Noch deutlicher wird die konjunktive Deutung in der folgenden Darstellung, die man daher auch ‚(vollständige) *konjunktive Wahrheitstafel*' nennen kann (vgl. 1-1-0-3).

	X	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	X	$\rightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	+	−	−
3.	−	−	+	+	−	+	+
4.	−	−	−	+	−	+	−

Wir können die *Zeilen* der Wahrheitstafel als *Relationen* schreiben.
Nun müssen wir hierfür eine Unterscheidung einführen, die uns noch viel beschäftigen wird:
• *Relations-Modell* • *Variablen-Modell* • *Kombinations-Modell*

• Relations-Modell
Beim Relations-Modell werden, für die *Umwandlung der Zeilen in Relationen*, nur die Werte (+ oder −) unter den *Relatoren* (hier $\wedge$, $\Rightarrow$, $\rightarrow$) berücksichtigt. Die folgende *verkürzte* Variante der Wahrheitstafel verdeutlicht dieses Modell, sie enthält nur die *Relations-Werte*.

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Dieses Modell entspricht der *Deutung in der Wahrheitstafel*. Letztlich kommt es in der *Wahrheitstafel* nur auf die Wahrheitswerte der *Relationen* an. So zählt z. B. bei $X \wedge Y$ nur der Gesamtwert der Konjunktion (+ oder −), egal ob das − unter dem $\wedge$ durch $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ oder $\neg X \wedge \neg Y$ bedingt ist.

Die Relations-Werte werden in der obigen Wahrheitstafel klar herausgestellt. Man sieht z. B. in der 3. Zeile auf den ersten Blick: Wenn die *Konjunktion* (Prämisse) $X \wedge Y$ ungültig (−) ist, dafür die *Implikation* (Konklusion) $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann ist die *Gesamtrelation* gültig (+), gemäß der Definition der Implikation, wonach gilt:
$- \Rightarrow +$.

Die Frage ist, wie man im Relations-Modell die *Zeilen* der Wahrheitstafel als *Relationen* schreibt. Generell wird ein − (Minus-Zeichen) aus der *Wahrheitstafel* bei der *Relation* in den *Negator* $\neg$ übersetzt. Folgendende Darstellung bietet sich konkret an:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$		
1.	+	+	+	$X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$+ - - - \Rightarrow + - + +$
2.	−	+	−	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$	$- + + + \longrightarrow - + - -$
3.	−	+	+	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow X \rightarrow Y$	$- + + + \longrightarrow + - + +$
4.	−	+	+	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow X \rightarrow Y$	$- + + + \longrightarrow + - + +$

Wie man sieht, sind hier von 4 Relationen 3 keine *strengen* Schlüsse ($\Rightarrow$), sondern nur *semi-analytische* Schlüsse ($\longrightarrow$). Das ist *unerwünscht*, denn hier soll ja *eindeutig* festgelegt werden, in welchen *Welten* $X \rightarrow Y$ gültig ist und in welchen ungültig, dafür benötigen wir aber strenge Schlüsse, der Art: Wenn die Welt $X \wedge Y$ realisiert ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig.

Nun könnte man einwenden: Es kommt nicht auf den *gesamten Wahrheitsverlauf* einer Relation an, sondern nur auf die *zentrale Zeile*. Das sei an einem Beispiel erläutert, für die Relation der 3. Zeile (gleich der 4. Zeile). Die Wahrheitstafel für diese Relation lautet:

	$\neg$	$(X \wedge Y)$	$\longrightarrow$	$X \rightarrow Y$
1.	−	+	+	+
2.	+	−	−	−
3.	+	−	+	+
4.	+	−	+	+

Wir schließen bei diesem Schluss von der Prämisse $\neg(X \rightarrow Y)$ auf die Konklusion $X \rightarrow Y$. Entscheidend sind daher die (identischen) Zeilen 3 und 4. Denn das $\neg$ in $\neg(X \rightarrow Y)$ muss ein + unter sich haben, die Negation muss bejaht sein. In diesen Fällen soll $X \rightarrow Y$ gültig sein (ein + aufweisen), und das ist auch gegeben. Dem entspricht ein + unter dem Haupt-Relator $\longrightarrow$. Nur in der 2. Zeile ist die Gesamt-Relation ungültig (ein − unter dem $\longrightarrow$). Aber hier wird eben auch von $\neg(X \rightarrow Y)$ auf ein *negiertes* $X \rightarrow Y$ geschlossen, und es scheint plausibel, dass dann die Gesamt-Relation ungültig ist.

Es stellt sich also die Frage: Muss eine *Relation*, die einer *Zeile der Wahrheitstafel* entspricht, überhaupt ein *strenger* Schluss sein? Reicht nicht ein *semi-analytischer* Schluss aus, der aber in seinen *zentralen* Zeilen gültig ist? Eine endgültige Klärung steht hier noch aus, aber nach meiner heutigen Auffassung dürfen wir bei der *konjunktiven* Deutung einer Relation nicht auf die Forderung verzichten: *alle* Relationen, die den Zeilen der Wahrheitstafeln entsprechen, müssen *strenge* Schlüsse, *Tautologien* sein (wir werden sehen, dass dies bei der implikativen Deutung anders ist). Das führt uns zum *Variablen-Modell*.

• Variablen-Modell

Das Variablen-Modell zeigt für die konjunktive Deutung von $X \rightarrow Y$ folgende (verkürzte) Wahrheitstafel mit folgenden Relationen:

	X	$\wedge$ Y	$\Rightarrow$	X $\rightarrow$	Y			
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$+ - - - \Rightarrow + - + +$
2.	+	−	+	+	−	$X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow \neg Y$	$- + - - \Rightarrow - + + +$
3.	−	+	+	−	+	$\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	$- - + - \Rightarrow + + + -$
4.	−	−	+	−	−	$\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X \rightarrow \neg Y$	$- - - + \Rightarrow + + - +$

Hier werden jetzt bei $X \wedge Y$ die Wahrheitswerte der *Variablen* X und Y genannt, aber nicht die der Konjunktion $\wedge$. Das hat folgenden Grund: Um die einzelnen *Zeilen* der Wahrheitstafel als Relationen zu schreiben, gelten hier nur die Einzel-Werte von X und Y als relevant, nicht der Gesamt-Wert der Konjunktion $X \wedge Y$. Entsprechend verfährt man bei $X \rightarrow Y$.

Ein Vorteil ist, dass bei diesem Modell alle Relationen *echte* Schlüsse, also *Tautologien* sind. Ein Problem ist aber: Wir wollen die Wahrheitsbedingungen von $X \rightarrow Y$ angeben, in Abhängigkeit von X und von Y. Wir wollen aber gar nicht Aussagen machen über $X \rightarrow \neg Y$, $\neg X \rightarrow Y$ und $\neg X \rightarrow \neg Y$, denn das sind ganz andere Relationen. Aus diesem Grund lehnen wir auch das *Variablen-Modell* ab, und das führt uns zum *kombinierten Modell.*

• kombiniertes Modell

Hier ergeben sich folgende Wahrheitstafel bzw. folgende Relationen für eine konjunktive Deutung von $X \rightarrow Y$:

	X	$\wedge$ Y	$\Rightarrow$	X $\rightarrow$ Y		
1.	+	+	+	+	$X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$+ - - - \Rightarrow + - + +$
2.	+	−	+	−	$X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$	$- + - - \Rightarrow - + - -$
3.	−	+	+	+	$\neg X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$- - + - \Rightarrow + - + +$
4.	−	−	+	+	$\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$- - - + \Rightarrow + - + +$

Zur Erläuterung der Umsetzung von der Wahrheitstafel in die Relation als Beispiel die 2. Zeile (übrigens gilt in der 2. Zeile sogar $\Leftrightarrow$):

$X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ entspricht:

$+ - -\;\; + \;\; -$ $\quad X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$

Es wird also aus den *Konjunktionen* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ und $\neg X \wedge \neg Y$ auf die Gesamt-Relation $X \rightarrow Y$ geschlossen, entsprechend der obigen Wahrheitstafel. Und zwar handelt es sich um *strenge* Schlüsse ($\Rightarrow$), damit um Tautologien.

$X \wedge Y$ wird hier also gemäß dem *Variablen-Modell* behandelt, $X \rightarrow Y$ gemäß dem *Relations-Modell*. Das mag unsystematisch wirken, aber die Vorteile sprechen dennoch für das *Kombinations-Modell*.

Es wären allerdings auch noch andere Formen eines Kombinations-Modells denkbar, vor allem eine *vollständige* Kombination: Hier werden in der *gleichen* Relation sowohl die Variablen-Werte und der Relations-Wert berücksichtigt. Kehren wir noch einmal zurück zum Beispiel der 2. Zeile. Die Prämisse wird dort folgendermaßen übersetzt (die Konklusion lassen wir erst einmal beiseite):

$X \wedge Y$ entspricht:

$+ - -$ $\quad \neg(X \wedge \neg Y)$

Nun muss man sich jedoch klarmachen: Die *Negation* von $X \wedge Y$, also $\neg(X \wedge Y)$ kann stehen für $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ oder $\neg X \wedge \neg Y$, es ist gewissermaßen eine *Zusammenfassung* dieser Relationen. Formal: $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$. Wenn man nun z. B. $X \wedge \neg Y$ *zusätzlich verneint* und als $\neg(X \wedge \neg Y)$ schreibt, dann ist es unzulässigerweise *doppelt negiert*. Man schreibt eben entweder $\neg(X \wedge Y)$ oder $X \wedge \neg Y$ (u. ä.). Außerdem zeigt sich: Wenn man $\neg(X \wedge \neg Y)$ als Prämisse einsetzt, dann erhält man in keinem Fall einen *echten* Schluss, egal wie man die Implikations-Konklusion formuliert, als $X \rightarrow \neg X$, als $\neg(X \rightarrow \neg Y)$ oder als $\neg(X \rightarrow Y)$. Daher verwerfe ich auch diese Lösung.

Kehren wir zurück zu dem ursprünglichen, bevorzugten *Kombinations-Modell*.
Sprachlich kann man seine Zeilen folgendermaßen fassen:
1. Zeile: wenn X gültig (+) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
2. Zeile: wenn X gültig (+) ist und Y ungültig (–) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ ungültig (–).
3. Zeile: wenn X ungültig (–) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
4. Zeile: wenn X ungültig (–) ist und Y ungültig (–) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).

Allerdings macht die Konjunktion – als *symmetrische* Relation – nicht deutlich, dass die *Reihenfolge* von X und Y wesentlich ist. Dies kann man verdeutlichen, wenn man einsetzt: X = *Vorder-Satz*, Y = *Nach-Satz*, $X \rightarrow Y$ = *Gesamt-Satz*, also *meta-sprachlich*, in Bezug auf *Sätze* formuliert. Dann ergibt sich:
1. Zeile: wenn der Vorder-Satz gültig (+) ist und der Nachsatz gültig (+) ist,
 dann ist der Gesamt-Satz gültig (+).
2. Zeile: wenn der Vorder-Satz gültig (+) ist und der Nachsatz ungültig (–) ist,
 dann ist der Gesamt-Satz ungültig (–).
3. Zeile: wenn der Vorder-Satz X ungültig (–) ist und der Nachsatz gültig (+) ist,
 dann ist der Gesamt-Satz gültig $X \rightarrow Y$ gültig (+).
4. Zeile: wenn der Vorder-Satz ungültig (–) ist und der Nachsatz ungültig (–) ist,
 dann ist der Gesamt-Satz gültig $X \rightarrow Y$ gültig (+).

Natürlich kann man für diese 4 Relationen wiederum eigene *Wahrheitstafeln* aufstellen, was aber nicht erforderlich ist. Ebenso kann man die *konjunktive Deutung* weiter *fortsetzen*. So würde z. B. die Tautologie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ gedeutet als:

$$[(X \wedge Y) \wedge (X \rightarrow Y)] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y]$$

Die konjunktive Deutung einer *Tautologie* ist aber nicht besonders sinnvoll, wie (bei Behandlung der analytischen Wahrheitstafel) noch gezeigt werden wird.

Fassen wir die schwierige Thematik (veranschaulicht an der 2. Zeile) noch einmal zusammen:

Zunächst zur *Prämisse* $X \wedge \neg Y$: In der *Wahrheitstafel* zählt zwar letztlich nur der Wahrheitsverlauf unter den *Relatoren*, also z. B. unter $\wedge$: + – – –. Diese drei – (minus bzw. „negativ“) gehen aber nicht direkt in die *Zeilen* der konjunktiven Deutung ein. Schriebe man in der 2. Zeile mit *Negation* $\neg(X \wedge \neg Y)$ oder auch $\neg(X \wedge Y)$, käme man nicht zu einem *strengen* Schluss. Die Wahrheitstafel für $X \wedge \neg Y$ hat den Verlauf: – + – –; d. h. sie besitzt in der *1. Zeile* den Wert –. Und genau das wird in der Wahrheitstafel von $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ durch das – unter dem $\wedge$ (in der 2. Zeile) ausgedrückt, das – braucht bzw. darf also nicht zusätzlich eingeführt werden.

Jetzt zur *Konklusion* $X \rightarrow Y$ bzw. in der 2. Zeile $\neg(X \rightarrow Y)$: Hier wird bei der konjunktiven Deutung nur der Wahrheitsverlauf unter dem $\rightarrow$ berücksichtigt: + – + +, und zwar einschließlich der *Negation*. Das mag zunächst irritieren. Man könnte ja fordern, in der 2. Zeile muss (analog zur Prämisse) z. B. $X \rightarrow \neg Y$ stehen, anstatt $\neg(X \rightarrow Y)$. Es erklärt sich aber wie folgt: Man betrachte die ursprüngliche Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, es geht hier nur um die Relation

$X \to Y$ bzw. deren Negation $\neg(X \to Y)$, es geht somit nicht um ganz andere Relationen wie $X \to \neg Y$, $\neg X \to Y$ oder $\neg X \to \neg Y$ (diese spielen später bei der implikativen Deutung eine Rolle). Es wird nur die Abhängigkeit der Relation $X \to Y$ von X und Y dargestellt, und genau das leistet explizit die *konjunktive* Deutung bzw. Wahrheitstafel in der obigen Form.

Der konjunktiven Deutung entspricht folgende *konjunktive Definition* der Relationen $X \to Y$ bzw. $\neg(X \to Y)$:

$X \to Y \Leftrightarrow_{df} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw.:

$X \to Y \Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge \neg Y)$

Hier wird $X \to Y$ definiert durch *Disjunktion* der Konjunktionen, die $X \to Y$ analytisch implizieren. Bzw. wird $X \to Y$ definiert durch die *Negation der Konjunktion*, die im *kontradiktorischen* Gegensatz zu $X \to Y$ steht.

Jetzt zur Definition von $\neg(X \to Y)$:

$\neg(X \to Y) \Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y) \wedge \neg (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw.:

$\neg(X \to Y) \Leftrightarrow_{df} (X \wedge \neg Y)$

Hier wird $\neg(X \to Y)$ definiert durch *Konjunktion* der *negierten* Konjunktionen, die $X \to Y$ analytisch implizieren. Bzw. wird $\neg(X \to Y)$ definiert durch die Konjunktion, die im *kontradiktorischen* Gegensatz zu $X \to Y$ steht.

1.2.2 Analyse von $\neg X \to Y$

Als zweites Beispiel sei neben $X \to Y$ auch $\neg X \to Y$ angeführt (vgl. 1-1-1-3):

	$\neg X \to Y$
1.	− + + +
2.	− + + −
3.	+ − + +
4.	+ − − −

Die Frage ist, wie hier, bei einem *negierten Ausdruck* ($\neg X$), die konjunktiven Relationen zu formulieren sind. Das Problem ist dabei die *Negation*. Man könnte sich zwei Modelle für die *1. Zeile* vorstellen:

Erstes Modell: $\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ + − − − ⇒ + + + −

Zweites Modell: $\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ − − + − ⇒ + + + −

Wie man sieht, ergibt sich bei beiden Modellen ein *strenger* Schluss.

Beim *zweiten* Modell wäre eine mögliche Argumentation z. B.: Da die Implikation ja lautet „wenn nicht X, dann Y“, muss in der 1. Zeile „nicht X“ stehen.

Korrekt ist allerdings nur ein Modell, das *erste*: Dabei kann man die *doppelte Negation* aufheben, d. h. für $\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ kann man $X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ einsetzen. Und zwar erklärt sich das folgendermaßen: In der 1. und 2. Zeile der Wahrheitstafel hat das *Negationszeichen* $\neg$ ein −, somit ist das *Negationszeichen negiert* und damit aufgehoben. In der 3. und 4. Zeile ist das Negationszeichen *bejaht* (+) und gilt daher als gesetzt.

Somit ergeben sich bei dem *ersten* Modell folgende Relationen der Wahrheitstafel:

1. $\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ + − − − ⇒ + + + −
2. $\neg\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X \to Y$ − + − − ⇒ + + + −
3. $\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \to Y$ − − + − ⇒ + + + −
4. $\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(\neg X \to Y)$ − − − + ⇒ − − − + (hier gilt auch ⇔)

Dagegen sind beim *zweiten* Modell bei zwei Relationen keine strengen Schlüsse gegeben, wie hier nicht auszuführen ist, was beweist, dass dieses Modell nicht korrekt ist.

1.3 IMPLIKATIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Diese bietet sich nur bei *implikativen* Beziehungen wie $X \rightarrow Y$ an, ist dort aber von besonderer Bedeutung. Hier wird von dem *Vorderglied* (z. B. X) auf das *Nachglied* (z. B. Y) gefolgert. Es handelt sich allerdings bei den Relationen (entsprechend den Zeilen der Wahrheitstafel) nicht um *Schlüsse*, sondern um *synthetische Folgerungs-Relationen*, eben Implikationen. Dies ist ein Unterschied zur *konjunktiven Deutung*, bei der auch bei synthetischen Relationen die Zeilen der Wahrheitstafel durch echte *Schlüsse* dargestellt werden.

Generell entsprechen den Zeilen der Wahrheitstafel folgende Relationen:

	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$X \rightarrow Y$	
2.	+ − −	$X \rightarrow \neg Y$	oder $\neg(X \rightarrow \neg Y)$
3.	− + +	$\neg X \rightarrow Y$	
4.	− + −	$\neg X \rightarrow \neg Y$	

Die Alternativen in der 2. Zeile werden wir unten diskutieren.

Dieser implikativen Darstellung entspricht folgende Bestimmung/Definition der Implikation:

$$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} \neg(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow \neg Y)$$
$$\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$$

Das erklärt sich folgendermaßen:

$\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	$+ - - - \Rightarrow + - + +$
$\neg(\neg X \rightarrow Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	$- - - + \Rightarrow + - + +$
$\neg(\neg X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	$- - + - \Rightarrow + - + +$

Alle diese negativen Implikationen implizieren logisch $X \rightarrow Y$. Die *Disjunktion* dieser Implikationen ist dann *logisch äquivalent* mit $X \rightarrow Y$. Das Entsprechende gilt für $\neg(X \rightarrow Y)$.

Aus der implikativen Deutung der Wahrheitstafel kann man eine *implikative Wahrheitstafel* herleiten. Kennzeichnend (allerdings nicht notwendig) für die implikative Wahrheitstafel ist, dass sie nicht nur mit den zwei Werten *gültig* (+) und *ungültig* (−) arbeitet, sondern auch mit dem Wert *möglich*, den ich mit ± schreibe. „Möglich" kann man auch übersetzen mit *möglicherweise gültig* (oder *möglicherweise ungültig*). Denn wenn man einen Satz $X \rightarrow Y$ hat, dann kann sich z. B. auch die Deutung ergeben: „wenn X, dann ist Y möglich", genauer: „wenn X gültig ist, dann ist Y möglicherweise gültig".

Wir müssen nun zwei Varianten unterscheiden. Dabei greifen wir zurück auf die Unterscheidung zwischen *Variablen-Modell*, *Relations-Modell* und *Kombinations-Modell.* Ein reines Relations-Modell ist hier aber nicht brauchbar und wird nicht weiter diskutiert.

• Variablen-Modell

Beim Variablen-Modell werden wie beschrieben nur die Werte in der Wahrheitstafel unter den *Variablen* berücksichtig. So ergibt sich ein *systematischer* Ansatz. Das bedeutet: Wir betrachten alle *möglichen* Varianten der Implikation $X \rightarrow Y$, zuerst $X \rightarrow Y$, dann $X \rightarrow \neg Y$, $\neg X \rightarrow Y$, $\neg X \rightarrow \neg Y$. Da beim Variablen-Modell die Werte unter dem *Relator* (für die Formulierung der Relationen) irrelevant sind, spielen Formen wie $\neg(X \rightarrow Y)$ keine Rolle. Man kann daher $X \rightarrow Y$ einfach übersetzen: „Wenn X gültig ist, dann ist auch Y gültig". Da über die Gültigkeit dieser Relationen keine weitere Auskunft gegeben wird, könnte man es für angemessen halten, hier immer ein ± für „möglich“ zu setzen. Daher ergibt sich folgende systematische *implikative Wahrheitstafel* (zum Vergleich rechts die *normale Wahrheitstafel*):

Imp	$X \to Y$		$X \to Y$
1.	+ ± +	$X \to Y$	+ + +
2.	+ ± −	$X \to \neg Y$	+ − −
3.	− ± +	$\neg X \to Y$	− + +
4.	− ± −	$\neg X \to \neg Y$	− + −

Die 1. Zeile der implikativen Tafel ist dann zu lesen als: ’Wenn X wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y wahr ist’. Bei einer *implikativen Wahrheitstafel* schreibe ich vorne ein ‚*Imp’*.

Diese Wahrheitstafel ist aber völlig unbefriedigend und wird daher verworfen. Zwar ist richtig, von einer *analytischen* Betrachtung aus sind X und Y vollkommen *unabhängig*, daher sind (analytisch) *alle* Implikationen zwischen X und Y *möglich*. Aber es geht hier ja um die *synthetische* Relation $X \to Y$, deren Wahrheitsbedingungen sollen aufgezeigt bzw. festgelegt werden, und es macht daher keinen Sinn, die Relation in allen 4 Welten als „möglicherweise wahr“ zu bestimmen. Jedenfalls in der 1. Zeile ist doch eine gültige Relation gemeint und gewollt: „Wenn X wahr ist, dann ist es wahr (nicht nur möglich), dass Y wahr ist“.

• Kombinations-Modell

Beim Kombinations-Modell werden die Werte unter den *Variablen*, aber auch der Wert unter dem *Relator* berücksichtigt. Es sind allerdings verschiedene Arten von Kombinations-Modellen möglich. In diesem Fall geht es darum, dass bei *einer* Relation $X \to Y$ beide Werte zur Formulierung von Relationen herangezogen werden. Man kann von einem *realen* Ansatz sprechen, weil eben die Werte der Wahrheitstafel vollständig in Relationen übersetzt werden.

Die (reale) implikative Wahrheitstafel ist:

	$X \to Y$		
1.	+ + +	$X \to Y$	(+ − + +)
2.	+ − −	$\neg(X \to \neg Y)$	(+ − − −)
3.	− ± +	$\neg X \to Y$	(+ + + −)
4.	− ± −	$\neg X \to \neg Y$	(+ + − +)

Die 1. Zeile besagt (implikativ): wenn X *wahr* ist, dann ist es *wahr*, dass Y *wahr* ist.
Die 2. Zeile besagt (implikativ): wenn X *wahr* ist, dann ist es *falsch*, dass Y *falsch* ist.

Zwar folgt hier in der 1. Zeile +Y auf +X, in der 2. Zeile −Y auf +X, aber in der 1. Zeile steht + unter dem Relator →, in der 2. Zeile steht − unter dem Relator →. Somit drücken die beiden Zeilen letztlich etwas Ähnliches (wenn auch nicht dasselbe) aus, man kann aber nicht behaupten, die beiden Zeilen drückten einen Gegensatz aus.

Diese unterschiedliche Deutung der 2. Zeile als $\neg(X \to \neg Y)$ ist der zentrale Unterschied zum Variablen-Modell (wo in der 2. Zeile $X \to \neg Y$ steht). Durch diesen Unterschied ergibt sich, dass in der Wahrheitstafel des Kombinations-Modells in der 1. und 2. Zeile ein anderer Wert zugeschrieben wird als beim Variablen-Modell.

Anders ist es bei der 3. und 4. Zeile:

Wie man in der normalen Wahrheitstafel von $X \to Y$ sieht, gilt:

3. Zeile: $\neg X \to Y$, aus $\neg X$ folgt Y

4. Zeile: $\neg X \to \neg Y$, aus $\neg X$ folgt $\neg Y$

Zwar ist (¬X → Y) ∧ (¬X → ¬Y) *keine Kontradiktion*, wenn man die *normale Implikation* verwendet (bei der Verwendung der *Positiv-Implikation* *→ ist diese Konjunktion dagegen kontradiktorisch). Dennoch ist es keine überzeugende Lösung, dass zugleich gelten soll:

3. Zeile: aus ¬X folgt Y/ Wenn X falsch ist, dann ist es wahr, dass Y *wahr* ist
4. Zeile: aus ¬X folgt ¬Y / Wenn X falsch ist, dann ist es wahr, dass Y *falsch* ist

Daher bietet es sich an, in solchen Fällen statt wahr/gültig (+) bzw. falsch/ungültig (–) den Wert ± für *möglich* (bzw. möglicherweise wahr) unter den Relator schreiben. (Man kann sich darüber streiten, ob damit bereits die 2-Wertigkeit der Aussagen-Logik aufgehoben ist.)

Dann ergibt sich:

3. Zeile: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* (→ ±), dass Y *wahr* ist“.
4. Zeile: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* (→ ±), dass Y *falsch* ist“.

Diese Deutung ähnelt der *Positiv-Implikation*, bei der die 3. und 4. Stelle „nicht definiert“ sind.

Sprachlich kann man diese implikative Deutung von X → Y folgendermaßen formulieren:

1. Wenn X wahr ist, dann ist es *wahr*, dass Y wahr ist
2. Wenn X wahr ist, dann ist es *falsch*, dass Y falsch ist
3. Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass Y wahr ist
4. Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass Y falsch ist

Ich halte das *Kombinations-Modell* auch hier für überlegen und werde mich daran halten.

1.4 VERSTÄRKTE IMPLIKATIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei der *konjunktiven* Deutung der Wahrheitstafel erhält man ausschließlich *analytische* Relationen wie X ∧ Y ⇒ X → Y. Bei der *implikativen* Deutung sind dagegen wie beschrieben alle vier aufgeführten Relationen der Wahrheitstafel *synthetisch*, nämlich:

X → Y, X → ¬Y bzw. ¬(X → ¬Y), ¬X → Y, ¬X → ¬Y

Wir haben eben gesehen: Wenn ¬X gilt, also X falsch ist, kann man daraus nichts *Sicheres* über Y folgern, sowohl bei Y wie bei ¬Y steht ein + unter dem Relator (daher schrieben wir in der implikativen Wahrheitstafel ± unter dem Relator).

Aber auch wenn X *wahr* ist, kann man daraus nichts Sicheres über Y folgern. Denn in der 1. Zeile folgt auf +X auch +Y, in der 2. Zeile folgt auf +X dagegen −Y (das sieht man in der obigen Wahrheitstafel); d. h. also, von den 2 Fällen, in denen X gültig ist, ist in 1 Fall auch Y gültig – das entspricht aber der *Zufallserwartung*, wie beim Glücksspiel. Daran ändert auch nichts, dass in der Wahrheitstafel unter dem Relator einmal + (1. Zeile) und einmal − (2. Zeile) steht.

Generell gilt bei *synthetischen* Relationen bzw. Implikationen: Wenn man nur weiß, dass das *Vorderglied* gültig (+) ist, kann man noch nichts über das *Nachglied* aussagen, es kann gültig sein oder ungültig. Das macht eben gerade das Wesen synthetischer Relationen aus. Um zu wissen, was zutrifft bzw. gemeint ist, muss ich den *Wahrheitswert der Gesamt-Relation* kennen.

Erst indem man die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit der *Gesamt-Relation*, also hier X → Y, mit berücksichtigt, kann man aus X auf Y schließen.

Hier sind *zwei* Interpretationen möglich:

Erstens: man geht von X aus und sagt, man braucht zusätzlich den Wert von X → Y, um sicher auf Y zu schließen: X ∧ (X → Y) ⇒ Y

Zweitens: man geht von X → Y aus und sagt, man braucht zusätzlich den Wert von X, um sicher auf Y zu schließen: (X → Y) ∧ X ⇒ Y

Beide Interpretationen sind *logisch gleichwertig*, ich bevorzuge aber vom Aufbau der Argumentation her die *erste*.

• verstärkte Wahrheitstafel
Ich möchte nun eine erste Wahrheitstafel für $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ aufstellen, zum Vergleich die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$.

	X ∧ (X → Y) ⇒ Y	X → Y
1.	+ + + + + + +	+ + +
2.	+ − + − − + −	+ − −
3.	− − − + + + +	− + +
4.	− − − + − + −	− + −

Im Vergleich dieser Tafel soll noch einmal der Unterschied zwischen der implikativen Deutung und der *verstärkten* implikativen Deutung klar gemacht werden:

implikative (reale)Deutung: „Wenn X wahr ist, dann ist Y wahr".
Aber dies ist *kein Schluss*, es ist eine Aussage, eine Behauptung, es ist eben die Bedeutung von $X \rightarrow Y$, aber man weiß nicht, ob diese Aussage $X \rightarrow Y$ wahr ist, und daher auch nicht, ob Y wahr ist. Ob $X \rightarrow Y$ wahr ist, kann man ohnehin nicht generell beantworten, sondern es hängt davon ab, welche *empirische Deutung* man den Variablen ‚X' und ‚Y' gibt. (Bei der *einen* Deutung ist $X \rightarrow Y$ wahr, bei einer *anderen* kann $X \rightarrow Y$ falsch sein.)

verstärkte implikative Deutung: „Wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist Y wahr".
Dies ist ein logischer *Schluss*. Wie man sieht: Zwar ist auch hier nicht gesichert, dass der Vorder-Satz, die Konjunktion $X \wedge (X \rightarrow Y)$ wahr ist, aber unter dem *Konjunktions-Relator* $\wedge$ steht nur noch *einmal* +, in der 1. Zeile. Und in diesem Fall ist Y auch + (gültig). Somit weiß man hier *mit Sicherheit*: wenn $X \wedge (X \rightarrow Y)$ gültig ist, dann ist auch Y gültig; somit ist das Ziel einer sicheren Ableitung erreicht.

Man liest für $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ auch öfters die Deutung:
„Wenn X wahr ist, dann ist es wahr, dass Y wahr ist. Nun ist X wahr. Also ist Y wahr".
(Hier weiß man sicher, dass auch Y wahr ist). Aber laut Wahrheitstafel können wir nicht festlegen, dass X wahr ist; es gibt hier immer beide Möglichkeiten. Die Bestätigung von X als *wahr* ist nur in einem außer-logischen, empirischen Kontext möglich.

Kehren wir zurück zur Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, nehmen jetzt aber auch die 2. Zeile hinzu. Verstärken wir sie durch die Gesamt-Relation, im ersten Fall durch die *bejahte* Gesamt-Relation $X \rightarrow Y$ und im zweiten Fall, durch die *negierte* Gesamt-Relation, entsprechend der Wahrheitstafel:

1. Zeile: $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
2. Zeile: $X \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

Mittels dieser *Verstärkung* kann man jetzt eindeutig feststellen:

1. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist auch Y wahr.
   (wenn ich weiß, dass X wahr ist und dass $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann weiß ich auch, dass Y wahr ist.)
2. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ falsch ist, dann ist auch Y falsch.
   (wenn ich weiß, dass X wahr ist, $X \rightarrow Y$ aber falsch ist, dann weiß ich, dass Y falsch ist.)

Ich spreche hier also von einer *verstärkten* implikativen Deutung. Durch die Verstärkung wird eine *synthetische* Relation in eine *analytische* umgewandelt, $X \rightarrow Y$ in $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$; insofern haben wir es bereits mit *analytischen* Wahrheitstafeln zu tun.

Bereits zwischen X und $X \to Y$ besteht kein *synthetisches* Verhältnis mehr, sondern ein *semi-analytisches*. Daher kommen in der Wahrheitstafel nicht *alle* Kombinationsmöglichkeiten vor, so ist $\neg X \wedge \neg(X \to Y)$ nicht vertreten, weil dies *kontradiktorisch* ist; wir haben es also streng genommen nicht mehr mit einer synthetischen Wahrheitstafel zu tun. Daher geht es in diesem Fall um *Schlüsse* (strenge oder semi-analytische), nicht um synthetische Folgerungen wie bei der Implikation $X \to Y$.

Insofern haben die Werte + und − hier auch eine andere Bedeutung als bei den synthetischen Relationen. Wenn z. B. ein + unter X steht, dann bedeutet es: „(angenommen) X ist *empirisch wahr*“ (*empirisch wahr* ist logisch gesehen aber *zufällig*); wenn dagegen ein + in jeder Zeile unter dem $\to$ bzw. $\Rightarrow$ steht, dann bedeutet das: „hier liegt ein logischer Schluss vor, er ist *notwendig wahr*, in jeder möglichen Welt“.

Wir werden nun verschiedene Wahrheitstafeln bzw. vor allem *Relationen* der verstärkten implikativen Deutung diskutieren. Dazu greifen wir wieder zurück auf die Unterscheidung von *Variablen-Modell* und *Relations-Modell* bzw. *Kombinations-Modell.*

• Variablen-Modell

Das Variablen-Modell nenne ich – wie beschrieben – so, weil hier zur *Aufstellung der Relationen* die Werte unter den *Variablen* entscheidend sind.

Das betrifft in diesem Fall den Ausdruck $X \to Y$. Je nach + und − in der Tafel wird er in den einzelnen Relationen verwendet als: $X \to Y$, $X \to \neg Y$, $\neg X \to Y$, $\neg X \to \neg Y$; dagegen spielt keine Rolle, welches Zeichen unter dem Relator $\to$ bzw. unter $\wedge$ steht (ob + oder −).

Imp	X	∧	(X	→	Y)	⇒	Y		
1.	+		+	+	+	+	+	$X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$	+ − − − ⇒ + − + −
2.	+		+	−	+	−	−	$X \wedge (X \to \neg Y) \Rightarrow \neg Y$	− + − − ⇒ − + − +
3.	−		−	+	+	+	+	$\neg X \wedge (\neg X \to Y) \Rightarrow Y$	− − + − ⇒ + − + −
4.	−		−	−	+	−	−	$\neg X \wedge (\neg X \to \neg Y) \Rightarrow \neg Y$	− − − + ⇒ − + − +

$X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$ ist ein strenger Schluss, also eine *Tautologie*, nämlich der *Modus ponens*. $X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$ entspricht der 1. Zeile der Wahrheitstafel, dies ist also die *zentrale* Zeile.

Das Variablen-Modell hat den Vorteil, dass seine Relationen alle *Tautologien* sind. Gegen dieses Modell spricht aber, dass man eigentlich $X \to Y$ als *Ganzheit* begreift, die also als ganzes bejaht oder negiert wird; das führt uns zum *Relations-Modell*.

• Relations-Modell

Beim Relations-Modell kommt es – zur Formulierung der Wahrheitstafel-Zeilen in Relationen – auf die Werte der *Relationen* an. Hier ergibt sich folgende Wahrheitstafel mit folgenden Relationen:

Imp	X	∧	(X → Y)	⟶	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	$X \wedge \neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$	(+ + + +)
3.	−	−	+	±	+	$\neg X \wedge (X \to Y) \longrightarrow Y$	(+ + + −)
4.	−	−	+	±	−	$\neg X \wedge (X \to Y) \longrightarrow \neg Y$	(+ + + −)

Es ist nicht ganz klar, ob man hier als Relator den semi-analytischen $\longrightarrow$ oder besser den streng analytischen $\Rightarrow$ nehmen soll, ich will das aber nicht weiter diskutieren. Auf die Wahrheitstafeln von semi-analytischen Schlüssen mit $\longrightarrow$ gehe ich noch gesondert ein.

Hier wird nur die Relation $X \rightarrow Y$ als *ganze* berücksichtigt, als $X \rightarrow Y$ wenn sie *bejaht* ist und als $\neg(X \rightarrow Y)$ wenn sie *verneint* ist. Welche Werte dabei unter X und Y stehen, spielt keine Rolle. Die Werte der isolierten Variablen X und vor allem der Konklusion Y werden allerdings angegeben, denn sie werden zur Aufstellung der Relationen gebraucht.

Sprachlich lauten die Zeilen der Wahrheitstafel:

1. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es wahr, Y wahr ist
2. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ falsch ist, dann ist es wahr, dass Y falsch ist
3. wenn X falsch ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y *wahr* ist
4. wenn X falsch ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y *falsch* ist

(Diese Formulierungen ließen sich auch abkürzen, aber so ist die Aussage präziser.)

Zur Erläuterung des semi-analytischen Schlüsse in der 3. und 4. Zeile:

Es mag verwundern, dass $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ *tautologisch* ist, aber nicht alle Einzel-Relationen. Diese gehen jedoch nur jeweils mit *einer* Zeile in die Wahrheitstafel ein; so hat z. B. $\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ in der normalen Tafel ein +, ist aber noch keine Tautologie.

In der 3. Zeile wird von $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf Y geschlossen, in der 4. Zeile vom gleichen $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf $\neg Y$.

Damit können hier *keine strengen Schlüsse* vorliegen, sondern es gilt nur:

$$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y \text{ bzw. } \neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$$

Somit setzen wir hier wieder ± (für „möglich“) in der Wahrheitstafel ein.
Dieses Modell halte ich für das beste (wie später auch die *quantitative Analyse* zeigen wird).

• Strenges Relations-Modell

Es ist allerdings auch ein noch *strikteres* Relations-Modell möglich. Es ist im erst im strengen Sinn ein Relations-Modell, während man das eben dargestellte auch als *Kombinations-Modell* auffassen kann, weil $X \wedge (X \rightarrow Y)$ nicht im *Ganzen* als Relation erfasst wird.

Dagegen wird hier auch für die komplexe Relation $X \wedge (X \rightarrow Y)$ nur *ein* Wert berechnet.

Imp	$X \wedge (X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y		
1.	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	−	±	−	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)
3.	−	±	+	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow Y$	(+ − + −)
4.	−	±	−	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)

Für beide Relations-Modelle bekommen wir auch bei der *verstärkten implikativen* Deutung bei negativer Prämisse keinen strengen logischen Schluss, im ersten Modell erhalten wir also bei $\neg X$ kein eindeutiges Ergebnis für Y. Und falls anstatt $X \rightarrow Y$ die *Negation* $\neg(X \rightarrow Y)$ zu $\neg X$ konjunktiv hinzugefügt würde, erhielte man eine *Kontradiktion* – das ist also auch keine Lösung.

Wir haben es hier also bei der verstärkten Wahrheitstafel von $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ wieder mit demselben Problem zu tun wie bei der implikativen Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$. Und das bedeutet, dass wir in diesen Fällen wieder ± für „*möglich*“ in die Wahrheitstafel einsetzen. Generell kann man festhalten, dass man in der verstärkten implikativen Wahrheitstafel ein ± unter den Relator setzt, wenn die entsprechende Relation nur *semi-analytisch* ist. (Hier besteht ein Unterschied zu synthetischer Wahrheitstafel, bei der wir alle Zeilen nur als synthetische Relationen schreiben können, unabhängig davon, ob +, − oder ± in der Wahrheitstafel steht.)

Generell gilt für das Relations-Modell folgende Gesetzmäßigkeit: Wenn in einer Wahrheitstafel vorkommt: Prämisse +, Konklusion + und Prämisse +, Konklusion − (bei gleichem Symbol unter dem Relator), dann ergibt sich eine semi-analytische Relation; oder:

Prämisse −, Konklusion + und Prämisse −, Konklusion − (bei gleichem Symbol unter dem Relator), dann ergibt sich ebenfalls eine semi-analytische Relation:

• Alternatives Relations-Modell
Grundsätzlich wäre auch noch eine andere Variante des Relatons-Modells möglich: Hier verlagert man das ± (= möglich) vom *Relator* → auf den *Nach-Satz* Y. Man erhält also ± Y, in der (tautologischen) Bedeutung: $Y \vee \neg Y$. Dann ergibt sich folgende Tafel:

Imp	X	∧	(X → Y)	⇒	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	$X \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	(+ + + +)
3.	−	−	+	+	±	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y \vee \neg Y$	(+ + + +)
4.	−	−	+	+	±	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y \vee \neg Y$	(+ + + +)

Hier sind zwar wieder alle Relationen *tautologisch*, aber in Zeile 3 und 4 gibt es den gleichen Schluss auf eine Tautologie, was aber ein *Pseudoschluss* ist: $\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y \,^{+}\!\vee^{+} \neg Y$.

Man kann die *Ungewissheit* des Schlusses also durch den *Relator* ausdrücken ($\longrightarrow$ mit ± statt ⇒ mit +) oder dadurch, dass man Y zwei mögliche Werte zuweist: + oder −. Letztlich halte ich die erste Variante für sinnvoller, und dann gilt: Geht man von ¬X aus, so ist auch bei der verstärkten implikativen Deutung kein strenger Schluss auf Y möglich.

Das zeigt noch einmal die Berechtigung für die Einführung der *Positiv-Implikation* X *→ Y, die eben nur die Fälle berücksichtigt, in denen X gültig ist.

Die *implikative* Deutung bzw. implikative Wahrheitstafel ist nicht so wesentlich wie die *konjunktive*, daher habe ich sie bisher noch nicht eingebracht und werde sie auch im Weiteren nur ausnahmsweise anführen, schon um den Text nicht noch mehr zu verkomplizieren. Ich gehe auch nicht auf die implikative Wahrheitstafel bei der *Positiv-Implikation* ein; dies ist zwar sehr interessant, aber auch sehr kompliziert und würde daher die ohnehin schon ausführliche Darstellung der Wahrheitstafel noch erheblich verlängern.

1.5 WEITERE MÖGLICHE SCHLÜSSE AUS DER WAHRHEITSTAFEL

• Schluss von X auf X → Y
$X \Rightarrow (X \rightarrow Y) \vee \neg(X \rightarrow Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)
$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$

• Schluss von Y auf X → Y
$Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
$\neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \vee \neg(X \rightarrow Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss))

• Schluss von X auf Y (dies geht nur, wenn man X → Y hinzunimmt, vgl. oben)
$(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
$\neg(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
$(X \rightarrow Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y \vee \neg Y$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von Y auf X (dies geht nur, wenn man X → Y hinzunimmt)
$(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$

$\neg(X \leftarrow Y) \wedge Y \;\Rightarrow\; \neg X$
$(X \leftarrow Y) \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; X \vee \neg X$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y
Ein strenger Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y, $\neg X$ oder $\neg Y$ ist nicht möglich
Aber es gilt:
$\neg(X \rightarrow Y) \;\Rightarrow X$
$\neg(X \rightarrow Y) \;\Rightarrow \neg Y$

Zusammenfassung
Die primäre Funktion der Wahrheitstafel ist, die *Wahrheitsbedingungen* einer Relation (bzw. eines Relators), eines Satzes oder einer Aussage aufzuzeigen. Dabei ist zu unterscheiden:
• *konjunktive* Wahrheitstafel: sie zeigt die Wahrheitsbedingungen des *Gesamt-Satzes* (z. B. $X \rightarrow Y$) auf, in Abhängigkeit von der *Konjunktion* von Vorder-Satz (X) und Nach-Satz (Y).
• *implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X).
• *verstärkte implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit von Vorder-Satz (X) und Gesamt-Satz ($X \rightarrow Y$).

Speziell die *synthetische* Wahrheitstafel hat noch folgende *Funktionen*:
Erstens dient die Wahrheitstafel dazu, die *Relatoren zu definieren*.
Zweitens erlaubt sie, für einen realen (empirischen) Sachverhalt die treffende Relation zu finden. Hat man z. B. den Sachverhalt bzw. die Menge von Sachverhalten X: „es regnet“, Y: „die Strasse ist nass“, und untersucht, in welchen Kombinationen (die in der Wahrheitstafel aufgeführt sind) diese Sachverhalte auftreten, wird man z. B. als zutreffende Relation herausfinden: „Es regnet → die Strasse ist nass“.

2. AUSSAGEN-LOGISCHE ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

Die Wahrheitstafel einer *analytischen* oder *semi-analytischen* Relation nenne ich wie gesagt kurz ‘*analytische Wahrheitstafel*’. Grundsätzlich gilt für die analytische Wahrheitstafel dasselbe wie für die synthetische Wahrheitstafel: man kann unterscheiden zwischen *normaler*, *konjunktiver*, *implikativer* und *verstärkter implikativer* Wahrheitstafel. Im Einzelnen gibt es aber doch viele wesentliche Unterschiede. Ich konzentriere mich hier wieder auf die *Implikation*, die – analytisch – als logischer *Schluss* auftritt, sei es als *strenger* oder als *partieller*.

2.1 NORMALE WAHRHEITSTAFEL

• semi-analytischer Schluss
Als Beispiel die normale Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$:

(X	→	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

• strenger Schluss

Als Beispiel die normale Wahrheitstafel von $X \Rightarrow X \vee Y$:

X	$\Rightarrow$	$X \vee Y$
+	+	+ + +
+	+	+ + −
−	+	− + +

Grundsätzlich ist die *analytische* Wahrheitstafel in entsprechender Weise zu interpretieren wie oben aufgezeigt für die *synthetische* Wahrheitstafel. Es sind wieder vor allem 2 Möglichkeiten zu unterscheiden: die *konjunktive* und die *implikative Interpretation* der (normalen) Wahrheitstafel.

2.2 KONJUNKTIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei einem Schluss $\Phi \longrightarrow \Psi$ (bzw. $\Phi \Rightarrow \Psi$) wird aus der *Konjunktion* von *Prämisse* (Φ) und *Schluss-Satz* (Ψ) auf die *Gesamtrelation* ($\Phi \longrightarrow \Psi$) geschlossen. Generell ist die *konjunktive* Interpretation aber bei jeder beliebigen Relation möglich. Bei $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ wird z. B. aus der Konjunktion von $X \vee Y$ und Y auf $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ geschlossen.

• semi-analytischer Schluss

Die konjunktive Deutung oder Interpretation demonstriert folgende *konjunktive Wahrheitstafel*. Man setzt hier nur die für die Deutung *wesentlichen* Wahrheitswerte ein, um die Tafel möglichst übersichtlich zu halten. So sind die Werte für X (+ + − −) und Y (+ − + −) verzichtbar, sie bleiben immer gleich, nur bei Y als Glied der Konjunktion schreibt man die Wahrheitswerte.

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$ Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+ +	+	+
2.	−	− −	+	+
3.	+	+ +	+	+
4.	+	− −	+	−

Die folgenden Relationen enthalten die konjunktive Deutung der *Zeilen* der Wahrheitstafel, es sind – wie immer bei der konjunktiven Deutung – alles *strenge* Schlüsse:

1. $(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\qquad (+-+-) \Rightarrow (+++-)$
2. $\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\qquad (-+--) \Rightarrow (+++-)$
3. $(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\qquad (+-+-) \Rightarrow (+++-)$
4. $(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$ $\qquad (---+) \Rightarrow (---+)$

(die 3. Zeile ist gleich der 1. Zeile, in der 4 Zeile gilt auch $\Leftrightarrow$)

Dementsprechend gilt folgende *Bestimmung* von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ bzw. dessen Negation:

$$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge Y] \vee [\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y]$$
$$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y]$$

Grundsätzlich wäre zwar auch eine andere Kombination denkbar, nämlich: $\neg(X \rightarrow Y) \wedge Y$.

Aber die ist *kontradiktorisch* und somit in der Wahrheitstafel nicht enthalten, die Wahrheitstafel berücksichtig eben nur die *möglichen* Kombinationen. Das ist bei der *analytischen* Wahrheitstafel anders als bei der *synthetischen*, bei der *alle* Kombinationen bzw. Welten vertreten sind (wobei synthetisch allerdings *alle* Kombinationen *möglich* sind).

• strenger Schluss

Zunächst zur Erinnerung die *normale* Wahrheitstafel für $X \Rightarrow X \vee Y$.

X	⇒	X ∨ Y
+	+	+ + +
+	+	+ + −
−	+	− + +
−	+	− − −

Nun zur *konjunktiven* Wahrheitstafel (wieder in auf das Wesentliche reduzierter Form) und zur konkunktiven Deutung mit den entsprechenden Relationen:

	X	∧	(X ∨ Y)	⇒	(X ⇒ X ∨ Y)	
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
2.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
3.	−	−	+	+	+	$\neg X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
4.	−	−	−	+	+	$\neg X \wedge \neg(X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$

Es geht hier um die Konjunktion von X und $X \vee Y$, $(X \vee Y)$ als *Gesamtheit*. Daher zählt bei $X \vee Y$ nur das + oder – unter dem *Relator* $\vee$ (nicht unter dem X bzw. Y). So steht z. B. in der 2. Zeile einfach $X \wedge (X \vee Y)$ und nicht $X \wedge (X \vee \neg Y)$, wie der Ausdruck im Detail aussehen würde (vgl. die obige normale Wahrheitstafel).

Dies alles spielt aber beim *strengen* Schluss ohnehin keine Rolle, denn jeder Schluss auf eine *Tautologie* ist ja seinerseits eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie. Und da hier aber auf eine Tautologie, nämlich $X \Rightarrow X \vee Y$ geschlossen wird, ist es letztlich ohne Relevanz, von welcher Relation auf $X \Rightarrow X \vee Y$ geschlossen wird. Somit gibt es gewisse Unterschiede zum semi-analytischen Schluss, denn z. B. ein Schluss auf $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist nicht automatisch eine Tautologie.

2.3 IMPLIKATIVE DEUTUNG DER WAHRHEITSTAFEL

Hier wird bei einer (semi)analytischen Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ aus der Prämisse (Φ) auf den Schluss-Satz (Ψ) geschlossen. Es wird also gefragt: *Wenn* die Prämisse (Φ) wahr ist, ist *dann* auch der Schluss-Satz (Ψ) wahr usw.? Diese Deutung ist nur bei *implikativen* Relationen (wie $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$ u. ä.) relevant, dort aber besonders wichtig.

Bei *(semi)analytischen* Relationen ist es möglich, allein aus der Prämisse (Φ) in gewissem Ausmaß auf den Schluss-Satz (Ψ) zu schließen, anders als bei den *synthetischen* Relationen: dort ist wie beschrieben ein Schluss nur möglich, wenn man die Gesamt-Relation $\Phi \rightarrow \Psi$ mit berücksichtigt.

• semi-analytischer Schluss

Als Beispiel zunächst wieder *der* semi-analytische Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ mit der normalen Wahrheitstafel:

	$(X$	$\rightarrow$	$Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	−	+	+	+	+
4.	−	+	−	−	−

Bei der implikativen Interpretation ergeben sich folgende Zeilen:

1.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$\neg((X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y)$	$(- + - +)$

Hier wird also z. B. (1. Zeile) geschlossen: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist auch Y gültig". Genauer wäre zu formulieren: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist es gültig, dass auch Y gültig ist". Dabei ist die Paradoxie der Implikation zu bedenken, dass $\neg\Phi \Rightarrow \Phi \rightarrow \Psi$.

Erläuterungen im Einzelnen:
1. Zeile: sie ist die zentrale Zeile, und sie ist gleich der 3. Zeile (zwar ist in der 1. Zeile X = + und in der 3. Zeile X = –, aber das hat für den Gesamtschluss keine Relevanz).
2. Zeile: wie man sieht, nur in einer von den 4 Zeilen, nämlich der 2. Zeile, steht eine *Tautologie*. Das erklärt sich folgendermaßen: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist *semi-analytisch*, aber $(X \rightarrow Y) \Leftarrow Y$ ist *streng analytisch*. Und $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$ ist die *Kontraposition* davon. $X \rightarrow Y$ wird implikativ immer als *Einheit* gefasst, daher wird es negiert als $\neg(X \rightarrow Y)$ und nicht etwa als $\neg(X \rightarrow \neg Y)$ oder einfach $X \rightarrow \neg Y$, wie die Wahrheitstafel suggerieren könnte.
3./4. Zeile: hier wird einmal von $X \rightarrow Y$ auf Y und einmal auf $\neg Y$ geschlossen, somit können diese Schlüsse nur *partiell analytisch* sein.
4. Zeile: wie schon bei der synthetischen Wahrheitstafel kann man diskutieren, ob das Zeichen – (minus) unter dem $\longrightarrow$ in der Wahrheitstafel relevant oder irrelevant ist. Ich gehe hier davon aus, dass man es berücksichtigen sollte. Die Zeile ist dann zu lesen: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist es ungültig, dass auch Y ungültig ist".

Natürlich könnte man *andere Relatoren* verwenden, so dass *alle* Relationen tautologisch würden, in der 1. und 3. Zeile ergäbe sich also z. B. $(X \rightarrow Y) \Leftarrow Y$ und in der 4. Zeile $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg Y$. Aber es geht ja gerade darum, *alle* Relationen mit der *Implikation* $\rightarrow$ darzustellen.

Man kann $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ folgendermaßen *implikativ definieren*:

$$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow$$
$$\neg[\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \vee \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y)] \vee \neg\,[\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y]$$

Anders als bei der *konjunktiven* Definition entspricht diese *implikative* Definition aber nicht der Wahrheitstafel; die Begründung dafür würde aber zu weit führen.

• Strenger Schluss

Bei einem *strengen* Schluss sieht das nicht anders aus, z. B. bei $X \Rightarrow X \vee Y$.

	$X \Rightarrow X \vee Y$		
1.	+ + + + +	$X \Rightarrow X \vee Y$	$(+ + + +)$
2.	+ + + + −	$X \Rightarrow X \vee Y$	$(+ + + +)$
3.	− + − + +	$\neg X \longrightarrow X \vee Y$	$(+ + + -)$
4.	− + − − −	$\neg X \longrightarrow \neg(X \vee Y)$	$(+ + - +)$

Auch hier ist nicht jeder Einzel-Schluss der Wahrheitstafel *tautologisch*. Und das betrifft Schlüsse von einer *negativen* Prämisse aus.
Das erklärt sich wieder wie folgt:
in der 3. Zeile wird von $\neg X$ auf $X \vee Y$ geschlossen,
in der 4. Zeile wird von $\neg X$ auf die *Negation*, also auf $\neg(X \vee Y)$ geschlossen.

Somit können nicht beide Schlüsse *vollständig* gelten, sondern nur *partiell*.
Allerdings ist auch eine andere Interpretation möglich; diese zeigt die folgende Wahrheitstafel mit veränderten Relationen:

	$X \Rightarrow X \vee Y$		
1.	+ + + + +	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
2.	+ + + + −	$X \Rightarrow X \vee \neg Y$	(+ + + +)
3.	− + − + +	$\neg X \Rightarrow \neg X \vee Y$	(+ + + +)
4.	− + − − −	$\neg X \Rightarrow \neg X \vee \neg Y$	(+ + + +)

Hier sind also *alle* 4 Relationen strenge Schlüsse. Das erreicht man dadurch, dass man X und Y immer isoliert betrachtet, vor allem hinsichtlich der Negationen. So zählt z. B. in der 4. Zeile hier nicht (wie oben) die Negation der Relation, nämlich $\neg(X \vee Y)$, sondern die Negationen der Einzelglieder $\neg X \vee \neg Y$; diese Thematik hat uns ja auch schon bei der konjunktiven Deutung beschäftigt.
Allerdings entspricht die obige Deutung nicht der üblichen Lesung der Wahrheitstafel, bei der man nämlich immer den *Kombinationswert* nimmt, also z. B. $\neg(X \vee Y)$; ich werde diese Variante daher nicht weiter verfolgen. Hier besteht jedoch noch weiterer Forschungsbedarf.

2.4 IMPLIKATIVE WAHRHEITSTAFEL

Die implikative Deutung der Wahrheitstafel führt uns zu einer *implikativen Wahrheitstafel*, bei der mit dem Symbol ± (= *möglich* bzw. gültig oder ungültig) gearbeitet wird; wie schon angemerkt schreibe ich als Kennzeichnung vorne ‚Imp'.

• semi-analytischer Schluss

Zunächst wieder der Schluss $(X \to Y) \longrightarrow Y$. Die *normale* (vereinfachte) Wahrheitstafel ist:

	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	+	+	+
4.	+	−	−

Die – vereinfachte – *implikative* Wahrheitstafel (mit ihren Relationen) ist dagegen :

Imp	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
2.	−	+	−	$\neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	±	+	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
4.	+	±	−	$(X \to Y) \longrightarrow \neg Y$

Die 1. Zeile ist z. B. zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y gültig (+) ist.
Die 2. Zeile ist zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ nicht gültig (–) ist, dann folgt *analytisch* (+), dass Y nicht gültig (–) ist.
Die 3. Zeile ist entsprechend der 1. Zeile zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y gültig (+) ist.
Die 4. Zeile ist zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y nicht gültig (–) ist.

Die einzelnen Implikationen sind uns schon bekannt, aber hier entsprechen sie genau der Wahrheitstafel, sind schon aus der Wahrheitstafel abzuleiten; dabei gilt:

+ entspricht $\Rightarrow$
± entspricht $\longrightarrow$

Die Frage ist: was entspricht – (ungültig)?
Es lässt sich zeigen, dass der Wert – (ungültig) nicht in der *implikativen* Wahrheitstafel unter dem Zentral-Relator (hier $\longrightarrow$) auftritt. Denn dies entspräche einer *Kontradiktion*, und eine Kontradiktion ist in der implikativen Wahrheitstafel ausgeschlossen.

Wenn man dennoch ein – (ungültig) in einer implikativen Tafel (unter dem $\longrightarrow$) erhalten will, kann man eine *systematische* implikative Wahrheitstafel aufstellen. In dieser Tafel werden $X \rightarrow Y$ und Y als *unabhängig* (wie synthetisch) behandelt, somit in jeder möglichen Weise kombiniert.

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	+	±	–	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$
3.	–	–	+	$\bar{\neg}[\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y]$
4.	–	+	–	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

Neu ist die 3. Zeile:
$\neg(X \rightarrow Y)\ \bar{\wedge}\ Y$ ist eine *Kontradiktion*. Das ist für die konjunktive Deutung relativ unproblematisch, weil sich paradoxerweise aus einer Kontradiktion alles ableiten lässt:

$$\neg(X \rightarrow Y)\ \bar{\wedge}\ Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

Bei der implikativen Wahrheitstafel ist das Problem aber diffizil: Zunächst könnte man angeben: $\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ (+ – + +).

Doch dies ist *semi-analytisch*, was nicht adäquat ist. Außerdem zeigt die Wahrheitstafel zeigt, dass $\neg(X \rightarrow Y)$ und Y in keiner Welt *gemeinsam wahr* sind. Auch eine spätere quantitative Analyse wird zeigen, dass diese Deutung unrealistisch ist.

Oder man könnte an $\neg[\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$ denken, aber dies ist auch *semi-analytisch*, Verlauf (– + – –).

Wenn die 4. Zeile $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$ lautet, so wird die 3. Zeile am ehesten als $\bar{\neg}[\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y]$ dargestellt, und das ist eine *Kontradiktion*, allerdings, und das ist wichtig, keine Kontradiktion der *Implikation*, sondern der *Negation*.

Erläuterung: die 4. Zeile besagt: „wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann notwendig $\neg Y$“.
Die 3. Zeile besagt dann: „Es ist nicht wahr, dass wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann notwendig $\neg Y$“.
Und das kann man übersetzen in: „Wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann unmöglich Y“.

Diese Argumentation ist vielleicht schwer nachvollziehbar, aber der Fall tritt wie gesagt bei der üblichen Wahrheitstafel gar nicht auf, weil dort keine Kontradiktionen zugelassen sind. Denn sonst treten *paradoxe* oder *irreguläre* Verhältnisse auf.

So gesehen wird für das − am besten $\neg(\Rightarrow)$ verwendet, was nicht mit $\nRightarrow$ und nicht mit $\Rightarrow\neg$ verwechselt werden darf. Insgesamt erhält man in der implikativen Wahrheitstafel:

+	entspricht $\Rightarrow$	tautologisch	(notwendige Folge)
±	entspricht $\longrightarrow$	semi-analytisch	(mögliche Folge)
−	entspricht $\neg(\Rightarrow)$	kontradiktorisch	(unmögliche Folge)

• strenger Schluss
Die implikative (reale) Wahrheitstafel für $X \Rightarrow X \vee Y$ lautet:

Imp	X	$\Rightarrow$	$X \vee Y$		
1.	+	+	+	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
2.	+	+	+	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
3.	−	±	+	$\neg X \longrightarrow X \vee Y$	(+ + + −)
4.	−	±	−	$\neg X \longrightarrow \neg(X \vee Y)$	(+ + − +)

Wir haben hier wieder den Sachverhalt, dass aus $\neg X$ zum einen $X \vee Y$ abgeleitet wird und zum anderen die Negation, also $\neg(X \vee Y)$. Daher wird in einer implikativen Wahrheitstafel in diesem Fall ± verwendet. Die 3. Zeile wäre also z. B. zu verstehen als: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass $X \vee Y$ wahr ist.

Grundsätzlich wäre auch möglich, für die *Einzelrelationen* jeweils die implikative Wahrheitstafel aufzustellen, aber darauf möchte ich hier verzichten.

2.5 VERSTÄRKTE IMPLIKATIVE DEUTUNG DER WAHRHEITSTAFEL

Hier wird noch berücksichtigt, ob die Gesamtrelation $(\Phi \longrightarrow \Psi)$ wahr oder falsch ist. D. h. es wird aus der Prämisse Φ und der Gesamtrelation $\Phi \longrightarrow \Psi$ auf die Konklusion Ψ geschlossen. So ergeben sich in allen Fällen *strenge* Schlüsse.

Nehmen wir als Beispiel zunächst wieder den *semi-analytischen Schluss*: $(X \to Y) \longrightarrow Y$. Hier wird also noch die Gesamtrelation $(X \to Y) \longrightarrow Y$ als *Verstärkung* hinzugefügt; oder aus anderer Sicht wird die Prämisse $X \to Y$ hinzugefügt.

Die *verstärkte implikative Wahrheitstafel* lautet (zur Erinnerung die einfach-implikat. Tafel)

Imp	$[(X \to Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \to Y)$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	+	+	+	+	+
4.	−	−	+	+	−

Imp	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
	+	±	+
	−	+	−
	+	±	+
	+	±	−

Daraus ergeben sich folgende, sämtlich *tautologische*, Einzelrelationen:

$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$
$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$
$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$
$\neg[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow \neg Y$

Bei einem *strengen* Schluss, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$, sind bei der *implikativ verstärkten* Wahrheitstafel dagegen *nicht alle* Relationen tautologisch. Das lässt sich leicht erklären: Durch Konjunktion von z. B. $X \wedge Y$ mit $X \wedge Y \Rightarrow Y$, also einer Tautologie, verändern sich die

Wahrheitsverläufe der Relationen gar nicht; denn durch *Konjunktion* einer Relation mit einer Tautologie bleibt der Wahrheitsverlauf der Relation erhalten.

2.6 BESONDERE IMPLIKATIVE FÄLLE

• *Kontradiktorischer Gegensatz*, z. B.: $(X \wedge Y) \longrightarrow (X \mid Y)$
Hier gilt: $(X \wedge Y) \,{}^{+}{>}{<}^{+}\, (X \mid Y)$.

Normale Wahrheitstafel

	$X \wedge Y$	$\longrightarrow$	$X \mid Y$
1.	+	−	−
2.	−	+	+
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Implikative Wahrheitstafel

Imp	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \mid Y$
1.	+	+	−
2.	−	+	+
3.	−	+	+
4.	−	+	+

D. h. bei einem *kontradiktorischen Gegensatz* tritt in der implikativen Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator (hier $\longrightarrow$) nur + auf. Man muss dabei berücksichtigen, dass durch den Wahrheitsverlauf der Einzelrelationen die Wahrheitstafel so gestaltet ist, dass *Kontradiktionen ausgeschlossen* sind. Z. B. treten eben bei obiger Tafel nur die Kombinationen $X \wedge Y$ (+), $X \mid Y$ (−) und $X \wedge Y$ (−), $X \mid Y$ (+) auf.

• *Unabhängigkeit*
$X \rfloor Y$ und $X \lfloor Y$ sind logisch voneinander völlig unabhängig. Somit entspricht
$X \rfloor Y \longrightarrow X \lfloor Y$ der *synthetischen* Relation $X \rightarrow Y$.

Normale Wahrheitstafel

	$X \rfloor Y$	$\longrightarrow$	$X \lfloor Y$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

Implikative Wahrheitstafel

Imp	$X \rfloor Y$	$\longrightarrow$	$X \lfloor Y$
1.	+	±	+
2.	+	±	−
3.	−	±	+
4.	−	±	−

In der implikativen Wahrheitstafel einer Implikation von zwei *unabhängigen* Relationen steht unter dem Zentral-Relator also nur ±.

2.7 VERHÄLTNIS VON KONJUNKTIVER UND IMPLIKATIVER WAHRHEITSTAFEL

1. In der implikativen Wahrheitstafel gibt es unter dem Relator kein – (ungültig/unmöglich), sondern nur + und ± (insofern sie die logische Abhängigkeit der Einzelrelationen gemäß der konjunktiven Wahrheitstafel berücksichtigt); das gilt gleichermaßen für semi-analytische wie für streng analytische Relationen.

2. Bei tautologischen Implikationen (⇒) gilt: grundsätzlich kann dem + (unter dem Relator) in der konjunktiven Tafel ein + oder ± in der implikativen Tafel entsprechen. Dem + in der *zentralen Zeile* der konjunktiven Wahrheitstafel entspricht auch ein + in der implikativen Tafel und umgekehrt. Die zentrale Zeile der Wahrheitstafel ist bei positiven Relationen die 1. Zeile (in der dann nur + vorkommt), bei einer negativen Relation kann die zentrale Zeile die 2. oder eine andere Zeile sein.

3. Bei semi-analytischen Implikationen (⟶) gilt:
   - einem + in der konjunktiven Tafel entspricht ein + oder ± in der implikativen Tafel
   - einem – in der konjunktiven Tafel entspricht normalerweise ein ± in der implikativen Tafel, bei besonderen Relationen aber auch ein + (was damit die stärkste Abweichung bedeutet).
   - Dem + in der zentralen Zeile der konjunktiven Tafel entspricht ein ±. Dies ist nicht verwunderlich, denn die Relation in der zentralen Zeile (bzw. der Schluss) ist ja nur semi-analytisch.

2.8 ÜBERSICHT

Zum Abschluss seien wegen der sehr komplizierten Materie noch einmal die Deutungen bzw. Wahrheitstafeln für $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ aufgezeigt, jeweils in vereinfachter Form; d. h. es werden nur die entscheidenden Wahrheitsverläufe gezeigt:

- normale Wahrheitstafel

	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	–	+	–
3.	+	+	+
4.	+	–	–

- konjunktive Deutung

1.	$(X \rightarrow Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+-+-) \Rightarrow (+++-)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(-+--) \Rightarrow (+++-)$
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+-+-) \Rightarrow (+++-)$
4.	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$(---+) \Rightarrow (---+)$

- konjunktive Wahrheitstafel

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+	+	+
2.	–	–	–	+	+
3.	+	+	+	+	+
4.	+	–	–	+	–

• implikative Deutung

1.	$(X \to Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
2.	$\neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	$(X \to Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$(X \to Y) \longrightarrow \neg Y$	$(- + - +)$

• implikative Wahrheitstafel

Imp	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	$+$	$\pm$	$+$
2.	$-$	$+$	$-$
3.	$+$	$\pm$	$+$
4.	$+$	$\pm$	$-$

• systematische implikative Wahrheitstafel

I/s.	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	$+$	$\pm$	$+$
2.	$+$	$\pm$	$-$
3.	$-$	$-$	$+$
4.	$-$	$+$	$-$

• verstärkte implikative Deutung

1.	$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ - + -)$
2.	$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$	$(- + - -) \Rightarrow (- + - +)$
3.	$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ - + -)$
4.	$\neg[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow \neg Y$	$(- - - +) \Rightarrow (- + - +)$

• verstärkte implikative Wahrheitstafel

	$[(X \to Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \to Y)$	$\Rightarrow Y$
1.	$+$	$+$	$+$	$+ +$
2.	$+$	$-$	$-$	$+ -$
3.	$+$	$+$	$+$	$+ +$
4.	$-$	$-$	$+$	$+ -$

Die *normale* Tafel enthält implizit eine konjunktive Deutung, man kann sie aber auch implikativ deuten.

Die *konjunktive* Tafel enthält natürlich eine konjunktive Deutung, d. h. sie schließt von der *Konjunktion* von Prämisse und Schluss-Satz auf den Gesamt-Schluss. Die konjunktive Tafel bedeutet immer eine Tautologie, sie enthält die normale Tafel als Teil.

Die *implikative* Tafel enthält natürlich eine implikative Deutung, d. h. sie schließt von der Prämisse auf den Schluss-Satz; die implikative Deutung ist bei *Implikationen* wie $\longrightarrow$ zusätzlich sinnvoll.

3. QUANTOREN-LOGISCHE ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

In der *Aussagen-Logik* kann die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* problemlos überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der

Einzel-Relationen (bzw. Einzelfaktoren).

In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Man kann nicht einfach aus den Wahrheitstafeln der Aussagen-Logik Wahrheitstafeln für die Quantoren-Logik ableiten. Dennoch gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die folgenden Ausführungen hierüber sind recht speziell.

Auf *synthetische* Relationen bin ich bereits früher eingegangen (in 1-2-1-4), jetzt geht es um *analytische* Relationen. Es werden verschiedene Möglichkeiten vorgeführt, auch für quantoren-logische Relationen Wahrheitstafeln aufzustellen.

3.1 QUANTOREN-LOGISCHE WAHRHEITSTAFEL

Ich wähle zunächst als Beispiel die einfache Relation: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$. Als erstes stellen wir folgende Wahrheitstafel auf, gemäß der Definition der Implikation:

$\Lambda x(Fx)$	$[\Rightarrow]$	$Vx(Fx)$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Das Problem ist hier: $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ werden wie *unabhängige* Variablen (z. B. wie X und Y) behandelt, so als ob es sich um eine *synthetische* Relation handelt. In Wahrheit sind $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ aber voneinander *abhängig*. Es handelt sich um eine *analytische* Relation, um eine Tautologie. Und bei einer Tautologie dürfen in der (normalen) Wahrheitstafel nur + (gültig) unter dem Relator vorkommen; daher schreibe ich das Zeichen für logische Folge auch in Klammern: $[\Rightarrow]$.

Da hier auch ein − (ungültig) unter dem Relator steht, kann man an dieser Wahrheitstafel nicht einfach ablesen, ob die Gesamtrelation *tautologisch* ist. Man kann in der Wahrheitstafel nur prüfen, welcher Relator hier stimmen würde. Z. B. in der 2. Zeile: Es ist nicht möglich, dass $\Lambda x(Fx)$ wahr ist und $Vx(Fx)$ falsch, also muss hier ein − (ungültig) stehen. Der Relator, der sich dann als richtig erweist, muss gesetzt werden; das ist also z. B. der Implikator $\rightarrow$. (Es wird sich später noch zeigen: wenn wir eine Wahrheitstafel verwenden, welche die Abhängigkeiten berücksichtigt, kommt hier gar kein − unter dem Relator vor.) Die Frage ist, wie man diese Wahrheitstafel genauer analysieren kann.

Ehe man sich diesem Problem weiter zuwendet, geht es darum, das + und − unter den Quantoren präzise zu bestimmen. In der Quantoren-Logik stehen + und − in der Wahrheitstafel nämlich nicht wie bei der Aussagen-Logik einfach für „ja" (wahr) und „nein" (falsch), sondern sie müssen folgendermaßen gedeutet werden:

$\Lambda x(Fx)$	$Vx(Fx)$
+: Λ	+: V
−: $\neg\Lambda$	−: $\neg V$

Somit ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

$\Lambda x(Fx)$	$[\Rightarrow]$	$Vx(Fx)$
Λ	+	V
Λ	−	$\neg V$
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	$\neg V$

Es gibt nun zwei (in 2-1-0-5 genauer beschriebene) Varianten bzw. Interpretationen der *Wahrheitstafel*: die *konjunktive* und die *implikative*.

• *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*

Hier wird aus der *Konjunktion* von Prämisse und Schluss-Satz auf die Gesamtrelation geschlossen.

$[\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx)\ [\Rightarrow]\ Vx(Fx)]$

Λ	+	V	+	+
Λ	–	¬V	+	–
¬Λ	–	V	+	+
¬Λ	–	¬V	+	+

Diese Wahrheitstafel enthält folgende einzelnen Relationen:

1. $[\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
2. $[\Lambda x(Fx)\ {}^{-}\wedge^{-} \neg Vx(Fx)] \Rightarrow {}^{-}\neg^{-}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
4. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$

Dazu folgende Anmerkungen :

- Dass drei dieser Schlüsse Tautologien sind, braucht nicht zu verwundern. Denn jeder beliebige Schluss auf eine Tautologie ist ja eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.
- Anders ist der Fall in der 2. Zeile gelagert: Die Konklusion ist eine *Kontradiktion*. Aber die Prämisse ist auch eine *Kontradiktion*. Insofern gilt der Schluss, denn jeder Schluss von einer Kontradiktion aus gilt streng. Allerdings tritt die Kontradiktion $\Lambda x(Fx)\ {}^{-}\wedge^{-} \neg Vx(Fx)$ nur auf, weil man in dieser provisorischen Wahrheitstafel $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ wie *unabhängige* Variablen behandelt. Man kann diesen Fall daher aus der Wahrheitstafel rausnehmen, erhält dann eine *tautologische* Wahrheitstafel, jedoch mit nur *drei* Zeilen.

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
Λ	+	V
¬Λ	+	V
¬Λ	+	¬V

• *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*

Die *implikative* Wahrheitstafel ist im Punkt 1. des Exkurses eingeführt worden. Bei ihr wird direkt von der Prämisse auf den Schluss-Satz geschlossen. In der *quantoren-logischen* Form sieht sie folgendermaßen aus:

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$[\Rightarrow]$	$Vx(Fx)$	
1.	Λ	+	V	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
2.	Λ	–	¬V	${}^{-}\neg^{-}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3.	¬Λ	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$
4.	¬Λ	±	¬V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx$

Interpretation:

1. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$, dann folgt notwendig, dass auch $Vx(Fx)$
2. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$, dann folgt unmöglich, dass $Vx(Fx)$ ungültig ist
3. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$ ungültig ist, dann folgt möglicherweise, dass $Vx(Fx)$
4. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$ ungültig ist, dann folgt möglicherweise, dass $Vx(Fx)$ ungültig

Problematisch ist die 2. Zeile: wie ist hier das – (minus) unter dem Relator zu verstehen?

„$\Lambda x(Fx) \not\Rightarrow \neg Vx(Fx)$“ darf man *nicht* schreiben, weil keine kontradiktorische *Implikation* vorliegt (auch wenn man das intuitiv meinen könnte). Man könnte $\neg[\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)]$ oder ggf. $\Lambda x(Fx) \Rightarrow \neg\neg Vx(Fx)$ schreiben. Am überzeugendsten ist aber

$$^{-}\neg^{-}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$$

Erläuterung: die 1. Zeile besagt: wenn alle x F sind, dann sind notwendig auch einige x F. Die 2. Zeile besagt dann: Es ist nicht wahr, dass wenn alle x F sind, dass dann auch einige x notwendig F sind. Das kann man übersetzen in: wenn alle x F sind, dann sind unmöglich nicht einige x F (vgl. hierzu). Eine andere Möglichkeit wäre noch, die *Positiv-Implikation* zu verwenden, denn da ist die Kontradiktion anders bestimmt (wie schon erläutert wurde). Hier könnte man schreiben: „$\Lambda x(Fx)\ {*}\!\not\Rightarrow \neg Vx(Fx)$“

Die genaue Formalisierung ist allerdings auch nicht entscheidend, weil diese Zeile letztlich aus der Wahrheitstafel getilgt wird (vgl. unten), denn es gilt:

$$\Lambda x(Fx)\ {}^{-}\wedge^{-}\ \neg Vx(Fx)$$

Die Konjunktion dieser beiden Relationen ist also *kontradiktorisch*, wenn auch nicht die Implikation.

Zur 3. und 4. Zeile: Somit erklärt sich auch das ± (was man ja eigentlich in Wahrheitstafeln nicht findet). Aus der Ungültigkeit von $\Lambda x(Fx)$ kann man nichts Sicheres über $Vx(Fx)$ schließen, es kann gültig sein oder nicht.

Trotz aller Interpretationsansätze, letztlich bleibt der Weg der *direkten* Wahrheitstafel bei der Quantoren-Logik problematisch. Daher wenden wir uns jetzt einem anderen Ansatz zu.

3.2 PRÄDIKATEN-LOGISCHE WAHRHEITSTAFEL

Hier wird der quantoren-logische Ausdruck $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ in reine *Prädikaten-Logik* umgewandelt, weil sich für prädikaten-logische Ausdrücke unproblematisch Wahrheitstafeln aufstellen lassen. Die Hypothese ist:

$$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] \iff [(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)]$$

So dass man aus dem Wahrheitsverteilung von $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ die Wahrheitsverteilung von $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ ableiten kann. Für $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ lässt sich aber unproblematisch eine Wahrheitstafel aufstellen:

$(Fx_1$	$\wedge$	$Fx_2)$	$\Rightarrow$	$(Fx_1$	$\vee$	$Fx_2)$
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	+	−
−	−	+	+	−	+	+
−	−	−	+	−	−	−

Wie man sieht, ist der Schluss gültig, also eine *Tautologie*. Aber man will den Schluss ja nicht nur für *2* Elemente x_1 und x_2 beweisen, sondern für n (= alle) Elemente $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Allerdings reicht die Prüfung von 2 Elementen anstatt n Elementen, wenn man nur prüfen will, ob die Struktur *tautologisch*, *kontradiktorisch* oder *semi-analytisch* ist. Wenn die Struktur für 2 x tautologisch ist, ist sie es auch für n x usw.

Erst wenn man *genau* die Wahrheitswerte feststellen will, benötigt man ein anderes Verfahren, bei dem *alle* x berücksichtigt werden.

Interpretation der prädikaten-logischen Darstellung

Hier geht man von der Hypothese aus:

$$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] \iff [Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n]$$

Man kann normalerweise die Implikation nicht für *alle* Glieder überprüfen, denn die vollständige Formulierung lautet ja: $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$

n kann also beliebig groß sein. Dennoch kann man durch Interpretation auch ohne vollständige Wahrheitstafel das Gesetz überprüfen. Dabei ist Folgendes zu bedenken:

- eine *Konjunktion* ist nur wahr, wenn alle Glieder wahr sind, das ist aber (bei unabhängigen Variablen) stets nur in der *ersten* Zeile der Wahrheitstafel gegeben, egal wie groß n ist
- eine *Disjunktion* ist nur falsch, wenn alle Glieder falsch sind, das ist aber (bei unabhängigen Variablen) stets nur in der *letzten* Zeile der Wahrheitstafel so, egal wie groß n ist
- eine *Implikation* ist bei falschem Vorderglied (Prämisse) immer wahr. Sie ist nur falsch, wenn das Vorderglied wahr und das Nachglied falsch ist.

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ ist also nur in der 1. Zeile wahr. $Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ ist aber auch in der 1. Zeile wahr. Somit ist die Implikation $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ in der 1. Zeile wahr. In allen anderen Zeilen ist $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ aber falsch, somit ist in diesen Zeilen die Implikation wahr (unabhängig davon, welchen Wert $Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ besitzt). Damit ist bewiesen, dass obige Formel *tautologisch* gilt, also nur + unter dem Zentral-Relator $\Rightarrow$ steht.

3.3 WAHRHEITSTAFEL ANALOG AUSSAGEN-LOGIK

Ich habe oben darauf hingewiesen, dass man $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ prinzipiell *prädikaten-logisch* durch $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ darstellen kann (auch wenn die beiden Relationen nicht im strengen Sinn äquivalent sind, weil im 2. Fall n festgelegt ist: n = 2). Nun kann man – zur *Vereinfachung* – folgende Übersetzungen in *Aussagen-Logik* vornehmen:

$X \wedge Y$ für $Fx_1 \wedge Fx_2$, $X \vee Y$ für $Fx_1 \vee Fx_2$

So könnte man vereinfachend folgende Wahrheitstafel für $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ aufstellen, indem man aussagen-logisch schreibt: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$.

$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \vee Y$
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Diese Wahrheitstafel der Aussagen-Logik gibt die realistischen Wahrheitswerte an, welche die *Abhängigkeit* von $X \wedge Y$ und $X \vee Y$ widerspiegeln. Übersetzt man jetzt wieder in Quantoren-Logik, ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Hier steht jetzt unter $\Lambda x(Fx)$ + − − − (und nicht mehr: + + − −). Und unter $Vx(Fx)$ steht jetzt + + + − (und nicht mehr + − + −). Somit kann man jetzt zurecht $\Rightarrow$ verwenden.

Ich nenne eine solche Wahrheitstafel auch *real*, weil sie sich an den realen Werten der Aussagen-Logik orientiert und nicht – wie die *systematische* Wahrheitstafel – an den theoretisch möglichen Kombinationen. Hier kommt dann die problematische, kontradiktorische Kombination $\Lambda x(Fx)$: + und $Vx(Fx)$: − gar nicht vor, weil die Abhängigkeit zwischen $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ in die Wahrheitstafel eingeht. Setzt man jetzt wieder ein: Λ und V ein, so erhält man:

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
Λ	+	V
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	$\neg$V

Man muss sich dabei allerdings bewusst bleiben, dass streng genommen eine Darstellung der Quantoren-Logik (des Partikulär-Quantors) in der Aussagen-Logik nicht möglich ist.

• *Konjunktive* Wahrheitstafel
Wir können jetzt die konjunktive Wahrheitstafel für $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ aufstellen, und zwar wiederum analog dem *aussagen-logischen* $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$. Die konjunktive Wahrheitstafel verdeutlicht am besten die logische Struktur des Schlusses, gemäß der – wichtigsten – konjunktiven Deutung.

	$[\Lambda x(Fx)$	$\wedge$	$Vx(Fx)]$	$\Rightarrow$	$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
1.	Λ	+	V	+	+
2.	$\neg\Lambda$	−	V	+	+
3.	$\neg\Lambda$	−	V	+	+
4.	$\neg\Lambda$	−	$\neg$V	+	+

Dabei ergeben sich folgende Einzel-Relationen:

1. $[\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
2. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
4. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$

Diese konjunktiven Relationen zu nennen, hätte man sich auch sparen können. Denn sie müssen ja *tautologisch* sein, weil wie gesagt gilt: (beliebige) Relation $\Rightarrow$ Tautologie.

• *Implikative* Wahrheitstafel (analog $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$)
Die *implikative* Wahrheitstafel geht davon aus, dass man alle Zielen als Implikationen deutet und dann angibt, sind sie notwendig (+), unmöglich (–) oder möglich (±).

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
1.	+	+	+
2.	−	±	+
3.	−	±	+
4.	−	±	−

In der *quantoren-logischen* Form mit Λ und V ergibt sich:

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$		
1.	Λ	+	V	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	(+ + + +)
2.	$\neg\Lambda$	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$	(+ + + −)
3.	$\neg\Lambda$	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$	(+ + + −)
4.	$\neg\Lambda$	±	$\neg$V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)$	(+ − − +)

Obwohl Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx) tautologisch ist, gilt von den Einzel-Schlüssen nur der 1. als tautologisch. Der 2. und 3. Schluss sind gleich, und der 2./3. Schluss einerseits und der 4. andererseits drücken wiederum aus, dass aus ¬Λx(Fx) nichts Sicheres über Vx(Fx) abzuleiten ist: es kann Vx(Fx) folgen oder ¬Vx(Fx).

3.4 UMGEKEHRTER SEMI-ANALYTISCHER SCHLUSS: VX(FX) ⟶ ΛX(FX)

Die Umkehrung des tautologischen, *strengen* Schlusses Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx) ist der *semi-analytische* Schluss Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx). Für ihn gilt das Entsprechende wie oben gesagt. Ich bringe nachfolgend die drei wichtigsten Wahrheitstafeln (analog zur *Aussagen-Logik*), wobei ich darauf verzichtet habe, + durch Λ bzw. V und – durch ¬Λ bzw. ¬V darzustellen.

normale Wahrheitstafel: (mit konjunktiven Relationen):

Vx(Fx)	⟶	Λx(Fx)
+	+	+
+	−	−
+	−	−
−	+	−

konjunktive Wahrheitstafel

	[Vx(Fx)	∧	Λx(Fx)]	⇒	[Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	+	−	−	+	−
4.	−	−	−	+	+

Dazu folgende Einzel-Relationen:

1. [Vx(Fx) ∧ Λx(Fx)] ⇒ [Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
2. [Vx(Fx) ∧ ¬Λx(Fx)] ⇒ ¬[Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
3. [Vx(Fx) ∧ ¬Λx(Fx)] ⇒ ¬[Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
4. [¬Vx(Fx) ∧ ¬Λx(Fx)] ⇒ [Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]

Implikative Wahrheitstafel (mit implikativen Relationen)

Imp	Vx(Fx)	⟶	Λx(Fx)		
1.	+	±	+	Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)	(+ − − +)
2.	+	±	−	Vx(Fx) ⟶ ¬Λx(Fx)	(− + + +)
3.	+	±	−	Vx(Fx) ⟶ ¬Λx(Fx)	(− + + +)
4.	−	+	−	¬Vx(Fx) ⇒ ¬Λx(Fx)	(+ + + +)

Erläuterung zur implikativen Wahrheitstafel:
1. Zeile : zentrale, definierende Zeile
2./3. Zeile: sind (in dieser vereinfachten Darstellung) gleich
4. Zeile: nur hier liegt ein strenger Schluss vor, und zwar weil ¬Vx(Fx) ⇒ ¬Λx(Fx) die Kontraposition des strengen Schlusses Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx) ist.

Fazit: auch wenn es nicht so einfach ist wie in der Aussagen-Logik, man kann vor allem einfache quantoren-logische Relationen sehr wohl mittels *Wahrheitstafeln* überprüfen.

3.5 KOMPLEXE RELATIONEN

Wir haben bisher nur *einfache* Relationen der Form $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ behandelt, weil sich hier die Wahrheitstafeln übersichtlicher darstellen lassen. Was ist aber mit *komplexen* Relationen der Form: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \;\Rightarrow\; Vx(Fx \rightarrow Gx)$?

Insofern der Ausdruck in der Klammer gleich ist (z. B. $Fx \rightarrow Gx$), es also nur um die Verhältnisse zwischen den *Quantoren* geht, gelten im Wesentlichen die oben gemachten Aussagen.

Schwieriger ist es, wenn der Ausdruck in der Klammer (und ggf. zusätzlich die Quantoren) unterschiedlich sind, also z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \;\longrightarrow\; Vx(Fx \wedge Gx)$. Hier hat es wenig Sinn, eine *direkte quantoren-logische* Wahrheitstafel aufzustellen, weil die Struktur in der Klammer berücksichtigt werden muss. Sondern man muss in jedem Fall eine *prädikaten-logische* Analyse vornehmen. Zwar ist auch eine Übersetzung in *Aussagen-Logik* möglich, aber hier muss man vorsichtig sein. Z. B. kann man $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ keinesfalls einfach auf $X \rightarrow Y$ oder sogar $X \wedge Y$ zurückführen, sondern nur auf $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$.

Dieses Problem soll hier genauer erläutert werden.

Ich habe schon mehrfach festgestellt:

aussagen-logisch $X \rightarrow Y$ entspricht *quantoren-logisch* $\Lambda(X \rightarrow Y)$.

Aber was bedeutet das genau?

Die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, als *Tabelle*, lautet:

	X	→	Y
1	+	+	+
2	+	–	–
3	–	+	+
4	–	+	–

Die Wahrheitstafel von $\Lambda(X \rightarrow Y)$ kann man wie beschrieben nicht direkt angeben, sondern nur, wenn man sie umformuliert und für die *Variable* n eine *Konstante* einsetzt. Ich wähle hier wieder n = 2: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ und schreibe die Tafel ebenfalls in *Tabellenform*:

	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–

Natürlich können die beiden Tafeln *nicht übereinstimmen*, denn die Tafel für $X \rightarrow Y$ enthält 2 Variablen, somit 4 Zeilen, die Tafel für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ enthält 4 Variablen und damit 16 Zeilen. Man könnte allerdings die Tafel für $X \rightarrow Y$ auch auf 16 Zeilen *ausweiten*, dann ergäbe sich:

	X	→	Y
1	+	+	+
2	+	+	+
3	+	+	+
4	+	+	+
5	+	–	–
6	+	–	–
7	+	–	–
8	+	–	–
9	–	+	+
10	–	+	+
11	–	+	+
12	–	+	+
13	–	+	–
14	–	+	–
15	–	+	–
16	–	+	–

Auch hier ist der Wahrheitsverlauf nicht identisch, außerdem enthält die (erste) Tabelle für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ insgesamt 9 + unter dem Zentral-Relator und 7 –, die erweiterte Tabelle für $X \rightarrow Y$ dagegen 12 + und 4 –. Wie man bei leicht sieht, die Tabelle für $X \rightarrow Y$ ist *Teil* der Tabelle für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$. Wie genau sich die Anzahl der + und – verändert, wird im Kapitel 3 bzw. 4 durch Formeln beschrieben. Wenn man die Tabellen-Tafel für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ auf n = 3, n = 4 usw. ausweitet, verändert sie sich in bestimmter Weise.

Die behauptete *Entsprechung* von $X \rightarrow Y$ aussagen-logisch und $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ quantoren-logisch bedeutet also nicht, das man *identische* Wahrheitstafeln enthält. Dies ist nur der Fall, wenn n = 1. Trivialerweise ist die Tafel für $X \rightarrow Y$ und $X_1 \rightarrow Y_1$ identisch.

Allerdings, die aussagen-logische Struktur gibt bereits den logischen Status der Struktur für beliebig viele *n* an: also je nachdem, ob $X \rightarrow Y$ *tautologisch*, *kontradiktorisch* oder *semi-analytisch* ist.

Das gilt auch für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ oder allgemein für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$.

Diese *Übersetzungs-Problematik* sei noch einmal systematisch dargestellt:

1. Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ oder vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y)$
2. Prädikaten-Logik
   a) vollständige Darstellung: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
   b) vereinfachte, aber zulässige Darstellung: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$
3. Aussagen-Logik
   a) vollständige Darstellung: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$
   b) vereinfachte, aber zulässige Darstellung: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$
   c) unzulässige, falsche Darstellung: $X \rightarrow Y$

Inhalt des Exkurses „Verschiedene Wahrheitstafeln“