1 SYNTHETISCHE RELATIONEN

ÜBERSICHT

1-1 Aussagen-Logik

Hier wird die Aussagen-Logik als *2-wertige* Logik vorgestellt, die keineswegs auf *Aussagen* limitiert werden darf. Von besonderer Bedeutung ist die Analyse der *Paradoxien der Implikation* und die genaue Darstellung der *Positiv-Implikation* als Alternative zur herkömmlichen Implikation.

1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Die Quantoren-Logik wird als *4-wertige* Logik vorgestellt, welche die Werte „alle", „alle nicht", „einige", „einige nicht" behandelt. Sie schließt die Aussagen-Logik mit ein. Es wird das Verhältnis zwischen *Quantoren-Logik* und *Prädikaten-Logik* erläutert, welches man als Äquivalenz oder Definition deuten kann. Als Erweiterung wird u. a. eine auf der Quantoren-Logik basierende *Modal*-Logik präsentiert.

1-3 Quantitative Logik

Die Vorstellung einer *∞-wertigen Quantitäts-Logik* ist der wichtigste Teil in diesem Kapitel 1. *Logische* Ausdrücke werden in *mathematische* Formeln übersetzt, so dass man z. B. sagen kann, welche *empirische Wahrscheinlichkeit* eine Implikation ausdrückt. M. W. sind diese Formeln bisher noch von niemandem aufgestellt oder publiziert worden.

1-4 Quantitative Aussagen-Logik

Die Aussagen-Logik mit ihren 2 Werten erweist sich als *Grenzbereich* der quantitativen Logik, sie beinhaltet (implizit) nur die Werte $p = 1$ oder $p = 0$.

1-5 Quantitative Quantoren-Logik

So wie die quantitative Aussagen-Logik die 2 Werte der Aussagen-Logik numerisch bestimmt, so werden in der quantitativen Quantoren-Logik die 4 Werte der Quantoren-Logik in Zahlenwerte übersetzt. Sie arbeitet mit den Größen: 1, < 1, 0 und > 0.

Wie schon erläutert, gehe ich im Kapitel 1: „Synthetische Relationen" – wie in den nächsten Kapiteln 2, 3 und 4 – in den *Unter-Kapiteln* (also von 1-1 bis 4-5) immer nach der gleichen *Inhaltsstruktur* vor, um möglichst eine gute Übersichtlichkeit bzw. Vergleichbarkeit zu gewährleisten:

Das bedeutet z. B. in der Zählung für Kapitel 1:

1-1 Aussagen-Logik
1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik
1-3 Quantitative Logik
1-4 Quantitative Aussagen-Logik
1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Auch die *Unter-Kapitel* (der Kap. 1 bis 4) sind *gleich unterteilt*, in folgende *Unter-Unter-Kapitel*:

0 Einführung	z. B. für 1-1:	1-1-0	Einführung
1 Implikation		1-1-1	Implikation
2 Positiv-Implikation		1-1-2	Positiv-Implikation
3 Systematik		1-1-3	Systematik
4 Inklusiv / Exklusiv		1-1-4	Inklusiv / Exklusiv
5 Erweiterungen		1-1-5	Erweiterungen

Während auf der 2. Ebene, der Ebene der Unter-Kapitel nur eine Zählung von 1 bis 5 erfolgt, verwende ich auf der 3. Ebene der Unter-Unter-Kapitel auch die 0, weil ich diese jeweils für die *Einführung* benötige, also 1-1-0, 1-2-0, 1-3-0, 1-4-0, 1-5-0.

Auf der 4. Ebene der Unter-Unter-Unter-Kapitel zähle ich wiederum nur von 1 bis 5, also im Kapitel 1 von 1-1-0-1 bis 1-5-5-5.

Insgesamt ergibt sich (normalerweise) eine Hierarchie über *vier* Ebenen.

Ich verwende auch schon hier, im synthetischen Teil, *analytische* Relationen, nämlich vor allem die analytische *Implikation* $\Rightarrow$ und die analytische *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$. Aber dies geschieht im Wesentlichen nur zur Definition der Junktoren bzw. Relatoren. Im Einzelnen werden die analytischen Relationen erst im Kapitel 2 dargestellt.

1 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

1-1-0 Einführung

1-1-0-1 TERMINOLOGIE
Die herkömmliche Aussagen-Logik arbeitet nur mit:

1. *Aussagen* wie A, B bzw. A_1, A_2, ... , A_n
2. *Junktoren* wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$
3. *Negator* $\neg$

Mittels dieser drei Komponenten werden Aussagen-*Modifikationen* wie $\neg$A sowie Aussagen-*Verknüpfungen* wie A $\wedge$ B erzeugt. Man kann dabei zwischen *synthetischen* Verknüpfungen wie A $\rightarrow$ B und *analytischen* Verknüpfungen wie A $\wedge$ B $\Rightarrow$ B unterscheiden.

Natürlich lässt sich dies auch *meta-sprachlich* darstellen, man spricht dann von Aussagen-*Zeichen* wie ‚A', ‚B' u. ä. (bei den Junktoren ist es unbestimmt, ob sie objekt- oder meta-sprachlich zu verstehen sind, beides ist möglich).

Die Aussagen-Logik hat im wesentlichen die Funktion, Aussagen-Verknüpfungen aufzustellen bzw. zu beschreiben, ihre *Wahrheitsbedingungen* zu analysieren und – bei den analytischen Verknüpfungen – nachzuweisen, ob sie *allgemein-gültig* sind oder nicht, genauer, ob es *Tautologien*, *Kontradiktionen* oder nicht streng gültige Verknüpfungen sind.

Erweiterung der Aussagen-Logik
Man kann die sogenannte Aussagen-Logik aber *erweitern* bzw. aufzeigen, dass (wie schon beschrieben) das Wesentliche an ihr gar nicht die *Aussagen* sind. Dies sei hier erläutert:

• Erstens, charakteristisch ist nicht für die Aussagen-Logik, dass es sich um *Aussagen* o. ä. handelt, sondern dass diese *als ganze* – ohne Darstellung ihrer inneren Struktur – verwendet werden. Denn auch z. B. in der Prädikaten-Logik werden Aussagen, allerdings mit ihrer Subjekt-Prädikat-Struktur verwendet.

• Zweitens, man könnte – anstatt Aussagen – genauso gut *Sätze*, *Sachverhalte*, *Urteile* oder *Ereignisse* (wie in der Statistik) zur Grundlage machen und z. B. von einer ‚*Ereignis-Logik'* sprechen. Das Gemeinsame an all diesen ist, dass es sich um *Relationen* handelt – dieser Begriff ist für die generelle Verwendung geeigneter als der Begriff der *Verknüpfung* (vgl. u. a. 0-1-1). A $\rightarrow$ B muss man nicht als *Aussagen-Relation* sehen, man kann es z. B. auch als Relation von *Sachverhalten* begreifen. Komplexe Relationen zwischen einfacheren Relationen nenne ich, wie schon erläutert, *Molekular-Relationen*.

• Drittens, man kann aber die Variablen ‚A' und ‚B' sowie die Junktoren – auch über Relationen hinaus – auf *Mengen*, *Individuen* und *Begriffe* (oder Eigenschaften) anwenden. Ich bevorzuge hier allerdings, allgemein die Variablen ‚X' und Y' zu verwenden sowie statt von ‚Junktoren' von ‚*Relatoren'* zu sprechen. Z. B. ‚X $\rightarrow$Y' kann also u. a. stehen für:

eine Relation zwischen den Aussagen ‚X' und ‚Y'
eine Relation zwischen den Sachverhalten X und Y
eine Relation zwischen den Mengen X und Y

eine Relation zwischen dem Individuum X und der Menge Y
eine Relation zwischen den Begriffen X und Y

Wenn man auch Relationen zwischen *strukturierten* Relationen, z. B. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \vee Y)$ erfassen will, darf man die Einzelrelationen allerdings nicht mit ‚X' und ‚Y' bezeichnen, weil es nicht sicher ist, dass diese logisch voneinander unabhängig sind. Hier schreibt man, wenn man die Einzel-Relationen nicht nennt, genauer ‚$\Phi \rightarrow \Psi$' bzw. generell ‚Φ R Ψ'.

• Viertens, und das ist entscheidend: Es geht bei der Aussagen-Logik letztlich allein darum, dass man nur zwischen *2 Werten* unterscheidet, bei Aussagen zwischen *wahr* und *falsch*.
Man spräche daher besser von ‚*zwei-wertiger Logik*' und nicht von ‚Aussagen-Logik'. Die Aussagen-Logik im engeren und eigentlichen Sinn ist nur ein kleiner Teil einer *generellen 2-wertigen Logik*.

Belegung
Ich unterscheide primär nicht zwischen *wahr* und *falsch*, sondern allgemein zwischen *positiv* (+) und *negativ* (–), besser zwischen *belegt* und *nicht belegt* oder *gültig* und *ungültig*; ich beschränke also ‚(un)gültig' nicht wie sonst häufiger auf logische *Schlüsse*. Die Termini ‘positiv’ und ‘negativ’ sind etwas missverständlich, denn unter einem *positiven Satz* kann man auch einen *bejahten Satz* verstehen, aber auch ein *bejahter* Satz kann *falsch* sein. „Negativ“ könnte auch missverstanden werden als < 0, aber Werte < 0 kommen hier grundsätzlich nicht vor. Als *Quantitätsstufen* geht es um die Unterscheidung von 1 = alle und 0 = keiner.

Markierung
In der normalen Sprache wie in der Logik ist die *Negation markiert* (logisch durch $\neg$), die *Position* (Bejahung) aber nicht. Dies erklärt sich so, dass der *wahre Satz* als *Normalfall* gilt, der nicht gesondert *markiert* sein muss. Systematischer wäre aber:

Neutral:	Sachverhalt X	formal: (X)
Bejaht:	Sachverhalt X besteht	formal, z. B.: !(X)
Verneint:	Sachverhalt X besteht nicht	formal: $\neg$(X)

Um aber so weit wie möglich bei den eingeführten Begriffen zu bleiben, schreibe ich für „Sachverhalt X besteht“ bzw. für „die Aussage ‚X' ist wahr“ einfach ‚X' und verwende auch vorrangig den eigentlich unglücklichen Terminus ‘Aussagen-Logik’.

1-1-0-2 WAHRHEITSTAFEL

Die Zeichen der Aussagen-Logik wurden schon vorgestellt, es sind vor allem die *deskriptiven Variablen* und die *Relatoren*. Zu den deskriptiven Variablen zählen (im engeren Modell) ‚A', ‚B' usw., im weiteren Modell ‚X', ‚Y' bzw. generell ‚Φ', ‚Ψ'. Am wichtigsten sind dabei die *Relatoren*; sie sind keine Variablen, sondern *Konstanten*. Logische *Relatoren* bzw. *Junktoren* – das ist gleichbedeutend – werden durch die *Wahrheitstafel* definiert (vgl. 0-2-5-4). Diese sei noch einmal am Beispiel der *Implikation* dargestellt:

	$X \rightarrow Y$	äquivalent: $\neg(X \wedge \neg Y)$
1.	+ + +	
2.	+ – –	
3.	– + +	
4.	– + –	

Man kann die oberste Zeile *unterstreichen* und / oder den *Wahrheitsverlauf* unter dem Relator *fett* schreiben (siehe unten).

Ich kürze die Wahrheitstafel einer logischen Formel oft mit einer *waagerechten* Aufzählung der entscheidenden Wahrheitswerte ab.

Für $\underline{X \rightarrow Y}$ z. B. schreibe ich auch kurz : $X \rightarrow Y$: + − + +

+	**+**	+
+	**−**	−
−	**+**	+
−	**+**	−

D. h. es werden hier nur die Wahrheitswerte, die *unter dem Relator* stehen, angeführt.
Diese können auch in *Klammern* gesetzt sein: $X \rightarrow Y$ (+ − + +)

Alternative Wahrheitstafeln
Man kann die Wahrheitstafel auch folgendermaßen darstellen, vor allem zur *Definition* eines Relators.

X	Y	X → Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

oder kürzer :

X	Y	→
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Diese Darstellungsweise zeigt, wie die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ *primär* zu deuten ist: nämlich als $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ (in der 1. Zeile, die anderen Zeilen entsprechend). Da hier aus der *Konjunktion* von Vorder-Glied (X) und Nach-Glied (Y) auf die Gesamt-Relation ($X \rightarrow Y$) geschlossen wird, spreche ich von *‚konjunktiver Deutung'*. Hierfür lassen sich drei alternative *konjunktive Wahrheitstafeln* aufstellen:

- vollständige Wahrheitstafel

	X	∧	Y	⇒	X	→	Y
1.	+	+	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	+	−	−
3.	−	−	+	+	−	+	+
4.	−	−	−	+	−	+	−

Hier werden von allen *Variablen* (X, Y) und von allen *Relatoren* (∧, ⇒, →) die Wahrheitswerte (+, −) genannt.

- tafel-orientierte Wahrheitstafel

	X ∧ Y	⇒	X → Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Hier werden nur von den *Relationen* ($\wedge$, $\Rightarrow$, $\rightarrow$) die Wahrheitswerte genannt. Es ist eine *verkürzte* Wahrheitstafel, die aber legitim ist, weil die Werte von X (+ + − −) und (Y + − + −) stets gleich sind und als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Letztlich kommt es in der *Wahrheitstafel* nur auf die Wahrheitswerte der Relationen an. Und diese werden in der obigen Darstellung besonders deutlich. Man sieht z. B. in der 1. Zeile auf einen Blick: wenn die Konjunktion (Prämisse) $X \wedge Y$ gültig (+) ist und die Implikation (Konklusion) $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann ist die Gesamtrelation gültig (+).

• zeilen-orientierte Wahrheitstafel

	X $\wedge$ Y		$\Rightarrow$	X $\rightarrow$ Y
1.	+	+	+	+
2.	+	−	+	−
3.	−	+	+	+
4.	−	−	+	+

Auch hier liegt eine *verkürzte* Darstellung vor. Es werden jetzt bei $X \wedge Y$ die Wahrheitswerte der *Variablen* X und Y genannt, aber nicht die der Konjunktion $\wedge$. Das hat folgenden Grund: Man kann die einzelnen *Zeilen* der Wahrheitstafel wiederum als *Relationen* schreiben. Dabei sind aber nur die Werte von X und Y relevant, nicht der Gesamtwert der Konjunktion $X \wedge Y$. Bei $X \rightarrow Y$ dagegen interessiert nur die Gesamtrelation, nicht die Werte von X und Y.

Die Zeilen sind:

1.	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$	+ − − −	$\Rightarrow$	+ − + +
2.	$X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow$	$\neg(X \rightarrow Y)$	− + − −	$\Rightarrow$	− + − −
3.	$\neg X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$	− − + −	$\Rightarrow$	+ − + +
4.	$\neg X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$	− − − +	$\Rightarrow$	+ − + +

Diese Zeilen geben die *primäre Interpretation* der Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ wieder. In sprachlicher Formulierung lauten sie:

1. Zeile: wenn X gültig (+) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
2. Zeile: wenn X gültig ist (+) und Y ungültig (−) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ ungültig (−).
3. Zeile: wenn X ungültig (−) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
4. Zeile: wenn X ungültig (−) ist und Y ungültig (−) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).

Danach ist die Implikation $X \rightarrow Y$ also nur dann ungültig (−), wenn X gültig (+) ist und Y nicht gültig (−). In allen anderen Fällen ist sie gültig (Genaueres dazu in 2-1-0-4).

1-1-0-3 SPEZIELLE DARSTELLUNGEN

Man kann die Wahrheitstafel auch in einer *Tabelle* darstellen:

$X \rightarrow Y$

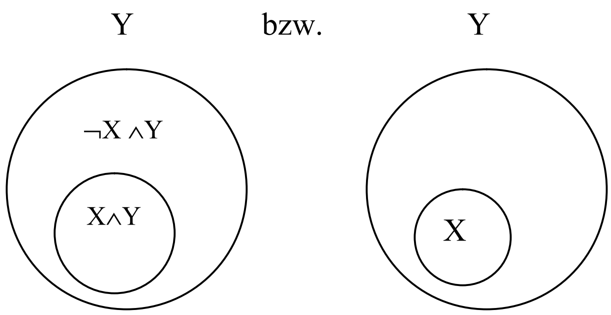
	X	$\neg$X
Y	$X \wedge Y$	$\neg X \wedge Y$
$\neg$Y		$\neg X \wedge \neg Y$

Hier werden nur die Felder ausgefüllt, die in der Wahrheitstafel ein + aufweisen.

Eine alternative Darstellung ist noch die folgende Tabellenform:

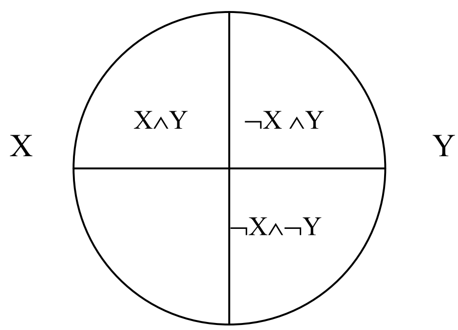
X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Kreis-Darstellung
Man kann die Wahrheitstafel graphisch auch durch *Kreise* symbolisieren, z. B. *Euler-Kreise* oder *Venn-Diagramme*. Die klassische Kreisdarstellung für X → Y ist:



Aber hier wird die Implikation X → Y nicht *vollständig* erfasst, denn es fehlt die – erlaubte – Konjunktion ¬X ∧ ¬Y. (X ∧ ¬Y darf dagegen nicht auftreten, weil eben nur erlaubte Kombinationen repräsentiert sind.)

Eine andere mögliche, vollständige Kreisdarstellung für X → Y ist die folgende:



Da die Kreis-Darstellungen aber einige Nachteile haben, verzichte ich meistens darauf.

Ganzheitliche Wahrheitstafel
Die normale Wahrheitstafel gibt eine Relation, z. B. X → Y, in Abhängigkeit von den vier Konjunktionen an: X ∧ Y, X ∧ ¬Y, ¬X ∧ Y, ¬X ∧ ¬Y. Man kann aber auch X → Y als Funktion von allen 16 möglichen Relationen (bei 2 Variablen) angeben.

Allerdings ist die 16. Möglichkeit, die *Antilogie*, eine Kontradiktion; daher kann man sie nicht als echte Möglichkeit dazuzählen. Auch die *Tautologie* ist hierfür problematisch.

So ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		$X \rightarrow Y$
1) Tautologie	+	+	+	+	X T Y	+/−
2) Disjunktion	+	+	+	−	$X \vee Y$	+/−
3) Replikation	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	+/−
4) Präpension	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	+/−
5) Implikation	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	+
6) Postpension	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	+
7) Äquivalenz	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	+
8) Konjunktion	+	−	−	−	$X \wedge Y$	+
9) Exklusion	−	+	+	+	$X \mid Y$	+/−
10) Kontravalenz	−	+	+	−	X >< Y	+/−
11) Postnonpension	−	+	−	+	$X \lceil Y$	+/−
12) Postsektion	−	+	−	−	X >− Y	−
13) Pränonpension	−	−	+	+	$X \rceil Y$	+
14) Präsektion	−	−	+	−	X −< Y	+
15) Rejektion	−	−	−	+	$X \nabla Y$	+
(16) Antilogie	−	−	−	−	X K Y	+)

Es tauchen in der Wahrheitstafel unter dem $X \rightarrow Y$ 3 Werte auf: 1. +, 2. − und 3. +/−.
Dies ist folgendermaßen zu verstehen:
+: $\Phi \Rightarrow \Psi$: Ψ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
− : $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$: $\neg\Psi$ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X >\!- Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$
+/−: $\Phi \longrightarrow \Psi$: Ψ folgt semi-analytisch aus Φ. Z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \rightarrow Y$
Bei +/− ist $X \rightarrow Y$ nicht partiell wahr (falsch), sondern nur nicht sicher abzuleiten.

1-1-0-4 WAHRHEITSTAFEL UND RELATION

Wir müssen bezüglich Wahrheit oder Falschheit klar unterscheiden zwischen:
1) einer *Relation* (bzw. einem Satz) und 2) der *Wahrheitstafel* dieser Relation

1) Relation / Satz
Wir unterscheiden *bejahte* und *negierte* Sätze.
• bejahter Satz, z. B. $X \rightarrow Y$

Ein Satz wie X → X enthält eine *Wahrheits- bzw. Gültigkeits-Behauptung*. Diese ist eben nur *implizit* bzw. *unmarkiert*. Bei einem Satz in der *normalen Sprache* ist es selbstverständlich, dass er (normalerweise) mit Wahrheitsbehauptung geäußert wird, aber man sollte auch in der Logik davon ausgehen. Der Satz ‚X → Y' lässt sich somit formulieren als: „'X → Y' ist wahr" oder „es ist wahr, dass X → Y". Die Wahrheitsbehauptung kann allerdings falsch sein.

• negierter Satz, z. B. ¬(X → Y)

Der *negierte* Satz wird dagegen durch die *Negation* gekennzeichnet, also *explizit* und *markiert*: ¬(X → Y). Ihm entspricht die Behauptung „'X → Y' ist falsch".

Insofern Sätze ihre Wahrheit oder Falschheit implizieren, kann man z. B. auch sagen, der Satz ‚X → Y' macht die *Aussage* X → Y. Ansonsten würde es nahe liegen, nur zu sagen: Wie ein *Wort* eine Sache o. ä. *bezeichnet*, so *bezeichnet* ein *Satz* einen Sachverhalt. Aber da der Satz eben darüber hinaus ausdrückt, dass der Sachverhalt *besteht* (oder nicht), macht er eine Aussage. Allerdings kann man auch eine *Wort*-Bezeichnung so begreifen, dass sie bereits implizit eine Aussage über *Existenz / Nicht-Existenz* beinhaltet, denn man kann nur etwas *bezeichnen*, das irgendwie existent ist (vgl. 0-4-4).

2) *Wahrheitstafel / Wahrheitsbedingungen*

Anders in der Wahrheitstafel: Hier bleibt notgedrungen offen, ob der Satz *wahr* oder *falsch* ist, denn es geht ja gerade darum, die *Bedingungen* anzugeben, unter denen ein Satz wahr oder falsch ist. Dabei gibt es drei Stufen zu unterscheiden:

• Einzelne Wahrheitsbedingung

Es lassen sich einzelne Wahrheitsbedingungen z. B. für X → X angeben. So gilt:
Wenn X falsch ist, dann ist X → Y wahr: ¬X ⇒ X → Y. Und:
Wenn Y wahr ist, dann ist X → Y wahr: Y ⇒ X → Y

• Vollständige, kombinierte Wahrheitsbedingungen

Diese werden von der Wahrheitstafel geliefert, die für *alle* Welten angibt, ob X → Y darin wahr ist oder falsch, z. B.: Wenn X und Y wahr sind, dann ist X → Y wahr.

• Konkrete Wahrheit

Bei einem *formalen* Satz lässt sich aber erst angeben, ob er empirisch wahr ist, wenn man die *Variablen* ‚X' und ‚Y' durch konkrete Begriffe ersetzt. So ist X → Y bei folgender Einsetzung wahr: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse nass'. Und bei folgender Einsetzung falsch: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse blau'.

Anders sieht es bei einer Tautologie aus wie X ⇒ X. Sie ist immer – logisch – wahr, unabhängig davon, ob X empirisch wahr ist.

Wir müssen aber auch die *Deutung* der *Wahrheitstafel* und die eines *Satzes* unterscheiden.

Die *primäre* Deutung der Wahrheitstafel ist die *konjunktive*, für X → Y die Ableitungen aus den *Konjunktionen*: X ∧ Y ⇒ X → Y, ¬X ∧ Y ⇒ X → Y, ¬X ∧ ¬Y ⇒ X → Y.

Aber die *primäre* Deutung für einen (implikativen) Satz ist die *implikative*. Mit dem Beispiel-Satz X → Y wollen wir ja vorrangig nicht sagen: ‚wenn X und Y wahr sind, dann ist auch X → Y wahr', ‚wenn X falsch und Y wahr ist, dann ist auch X → Y wahr' usw. Sondern wir wollen sagen: ‚Wenn X wahr ist, dann ist auch Y wahr'. Dies entspricht der *zentralen*, normalerweise der *ersten Zeile* der Wahrheitstafel.

1-1-0-5 BEREICHE DER AUSSAGEN-LOGIK

Abschließend zu diesem Punkt möchte ich die Anwendungsbereiche einer *erweiterten Aussagen-Logik* genauer beschreiben, für Spezialisten unter den Lesern. Dafür greife ich vor allem zurück auf Analysen aus Kapitel 0. Es kommt hier zu gewissen Wiederholungen, die aber angesichts der Kompliziertheit des Themas willkommen sein dürften. – Wir haben gesagt:

• Für die Aussagen-Logik ist *wesentlich*:
– *2-Wertigkeit*
– Arbeit nur mit den 14 (bzw. 16) *Relatoren*, bei der Kopula mit dem Implikator → (d. h. es werden nicht Quantoren, Symbole der Mengen-Lehre/Mengen-Logik o. a. verwendet)
Diese Eigenschaften müssen erhalten bleiben, sonst verliert die Aussagen-Logik ihre Identität.

• Für die Aussagen-Logik ist *nicht wesentlich*:
– Beschränkung auf *Aussagen* (bzw. Verwendung nur von Aussagen-Variablen/-Konstanten)
– (wahrheitswert-)*funktionale Deutung*
Diese Eigenschaften sind zwar auch kennzeichnend für die Aussagen-Logik, können aber in einer Erweiterung überschritten werden, zugunsten einer *allgemeinen 2-wertigen Logik*.

Wir werden nun Schritt für Schritt zeigen, wie sich die Aussagen-Logik erweitern lässt. Dabei konzentrieren wir uns auf die *Kopula-Funktion*, d. h. aussagen-logisch auf die *Implikation*.

0. *Herkömmliche Aussagen-Logik*
$A \rightarrow B$, $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ u. ä.
Sie kennt nur Relationen zwischen solchen *unstrukturierten Aussagen*.
Diese Aussagen-Relationen werden immer *funktional* gedeutet:
funktionale Deutung für $A \rightarrow B$:
„wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage B wahr" (o. ä.)
funktionale Deutung für $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$:
„wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage B wahr, impliziert, wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage C wahr".

Allerdings könnte man ‚A' auch auf andere unstrukturierte Relationen anwenden: *Sachverhalte*, *Urteile*, *Ereignisse* usw. Wenn man ‚A' wirklich nur auf Aussagen im Sinne von *Aussagen-Sätze* anwenden würde, dann müssten diese Variablen *meta-sprachlich* gekennzeichnet werden; man müsste korrekt ‚A → B' oder sogar ‚(‚A' → ‚B')' schreiben, was aber nicht getan wird.

1. *Erweiterung auf Individuen*
$x \rightarrow F$
Verwendung der Implikation auch für Beziehungen zwischen *Individuen* und Klassen bzw. Allgemein-Begriffen (entsprechend für Beziehungen zwischen Individuen: $x \rightarrow y$).
Funktionale Deutung für $x \rightarrow F$: „wenn Individuum x existiert, dann ist Klasse F belegt".

$x \rightarrow F$ kann somit stehen für die folgenden Ausdrücke mit den folgenden Deutungen, die man normal für Individuen-Relationen verwendet:
• Prädikaten-Logik: Fx (gemischt extensional-intensional)
possesive Deutung: „Individuum x besitzt die Eigenschaft F"
• Mengen-Lehre (bzw. Mengen-Logik oder Klassen-Logik): $x \in F$ (extensional)
relationale Deutung: „Individuum x ist Element der Klasse F"
• Normale Sprache: ‚x ist (ein) F'
kopulative Deutung (ist gleich): „x ist (ein) F"

„*Possesiv*" bezieht sich darauf, dass ein Individuum (extensional) eine Eigenschaft (intensional) *besitzt* (deswegen extensional – intensional); „*relational*", gemeint ist mengen-relational, bezieht sich auf die Element- oder Teilmengen-Relation; „*kopulativ*" bezieht sich auf die Kopula (‚ist', ‚sind' und entsprechend), die man normalsprachlich hier verwendet.

x → F hat zwar die gleiche logische Struktur wie Fx oder x ∈ F (jedenfalls wenn man es als *Positiv-Implikation* x *→ F fasst), in der *quantitativen Ausprägung* können sich aber Unterschiede ergeben. So könnte man x → F kennzeichnen (vgl. 1-4-5) als „x ist *immer* ein F" (ggf. wäre eine Deutung möglich, die auf *intensionale Quantität* abhebt, wie: „x ist *vollständig* ein F").

Man könnte hier auch diskutieren, ob es prinzipiell möglich ist, einen *hypothetischen* Satz wie „wenn X – dann Y" mit einem *apodiktischen* Satz wie „X ist ein Y" gleichzusetzen. Wie ich aber gerade zu zeigen versuche: diese Unterscheidungen betreffen nur die syntaktische *Oberflächen-Struktur*, nicht die logisch-semantische *Tiefenstruktur*.

2. *Erweiterung auf Klassen*

F → G

Verwendung der Implikation auch für Beziehungen zwischen *Klassen* bzw. *Mengen*.
Funktionale Deutung für F → G: „wenn die Klasse F belegt ist, dann auch Klasse G".
F → G kann somit stehen für die folgenden Ausdrücke und die folgenden Deutungen, die man normal für Klassen-Relationen verwendet:

• Quantoren-Logik: Λx(Fx → Gx) oder Λx(x ∈ F → x ∈ G)
kombiniert funktional-possesive Deutung: „für alle x gilt: wenn x die Eigenschaft F besitzt, dann besitzt x auch die Eigenschaft G"
kombiniert funktional-relationale Deutung: „für alle x gilt: wenn x Element der Klasse F ist, dann ist x auch Element der Klasse G"

• Mengen-Lehre: F ⊂ G
relationale Deutung:
ganzheitlich: „Klasse F ist Teilmenge von Klasse G"
kollektiv: „alle Elemente der Klasse F sind auch Elemente der Klasse G"

• Normale Sprache (und *kopulative Deutung*): „alle F sind G"

Allerdings ist für F → G die *funktionale* Deutung vorzuziehen, zugunsten einer *einheitlichen* Logik; F → G sollte man nicht primär mit z. B. „alle F sind G" o. ä. ausdrücken. Besser schreibt man für die anderen Deutungen die speziellen Formalisierungen, also z. B. F ⊂ G.

Auf eine *rein intensionale* Darstellung, d. h. dass F → G für eine Beziehung zwischen (allgemeinen) Eigenschaften bzw. *Allgemein-Begriffen* steht, verzichte ich hier; diese Darstellung ist sehr kompliziert und letztlich nur bei analytischen Relationen fruchtbar.

3. *Erweiterung auf molekulare (strukturierte) Individuen-Relationen*

(x → F) → (x → G)

Verwendung der Implikation auch für die Verbindung von strukturierten Relationen, hier *Individuen-Relationen*.
Funktionale Deutung für (x → F) → (x → G):
„wenn Individuum x existiert, dann ist Klasse F belegt, impliziert, wenn Individuum x existiert, dann ist Klasse G belegt".

(x → F) → (x → G) kann somit stehen für die folgenden Ausdrücke und die folgenden Deutungen, die man normal für solche Relationen verwendet (+ funktionale Deutung):

• Prädikaten-Logik: Fx → Gx
possesive Deutung: „wenn x die Eigenschaft F besitzt, dann auch die Eigenschaft G"

• Mengen-Lehre: (x ∈ F) → (x ∈ G)
relationale Deutung: „wenn x Element der Klasse F ist, dann auch Element der Klasse G"

• Normale Sprache (und *kopulative* Deutung): „wenn x (ein) F ist, dann ist x auch (ein) G"

Für die Verknüpfung der Einzel-Relationen nimmt man allerdings normalerweise die (funktionale) *Implikation* $\rightarrow$, auch wenn diese Einzel-Relationen *relational* bzw. *possesiv* formalisiert sind. Man schreibt also z. B. nicht $(x \in F) \subset (x \in G)$, auch wenn man das im Rahmen einer vereinheitlichten, *streng extensionalen* Logik machen könnte. Somit ergeben sich hier – grundsätzlich – *kombinierte*, z. B. funktional-relationale Deutungen (ich benenne das aber nicht immer aufs Neue).

4. *Erweiterung auf molekulare (strukturierte) Klassen-Relationen*

$(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$

Verwendung der Implikation auch für die Verbindung von strukturierten Relationen, hier *Klassen-Relationen*.

F*unktionale* Deutung für $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$:

„wenn Klasse F belegt ist, dann ist Klasse G belegt, impliziert, wenn Klasse F belegt ist, dann ist Klasse H belegt“

$(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$ kann somit stehen für die folgenden Ausdrücke und die folgenden Deutungen, die man normal für solche Relationen verwendet:

• Quantoren-Logik:

extensional-intensional: $\Lambda x((Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (Fx \rightarrow Hx))$

possesive Deutung: „für alle x gilt: wenn x die Eigenschaft F besitzt, dann besitzt x auch die Eigenschaft G, impliziert, wenn x die Eigenschaft F besitzt, dann besitzt x auch die Eigenschaft H“

rein extensional: $\Lambda x((x \in F \rightarrow x \in G) \rightarrow (x \in F \rightarrow x \in H))$

relationale Deutung: „für alle x gilt: wenn x Element der Klasse F ist, dann auch Element der Klasse G, impliziert, wenn x Element der Klasse F ist, dann ist x auch Element der Klasse H“

• Mengen-Lehre: $(F \subset G) \rightarrow (F \subset H)$

relationale Deutung:

ganzheitlich: „wenn Klasse F Teilmenge von Klasse G ist, dann ist Klasse F auch Teilmenge von Klasse H“

kollektiv: „wenn alle Elemente von Klasse F auch Elemente von Klasse G sind, dann sind alle Elemente von Klasse F auch Elemente von Klasse H“

• Normale Sprache (und *kopulative* Deutung): „wenn alle F auch G sind, dann sind alle F auch H“

5. *Generalisierung*

Anstatt *spezifischer* Variablen wie ‚x’, ‚F’, ‚A’ usw. zu nehmen, kann man generell $X \rightarrow Y$ schreiben. $X \rightarrow Y$ darf also stehen für:

$x \rightarrow F$, $F \rightarrow G$, $A \rightarrow B$

$X \rightarrow Y$ kann aber nicht stehen für *molekulare Verknüpfungen*; hier muss man z. B. sagen:

$(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)$ kann stehen für:

Individuen-Relationen: $(x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G)$

Klassen-Relationen: $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$

Aussagen-Relationen: $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Es lässt sich dann aber auch allgemeiner schreiben $\Phi \rightarrow \Psi$. Hier können Φ und Ψ für alle möglichen Strukturen stehen.

Natürlich kann man umgekehrt z. B. $X \rightarrow Y$ nicht ansehen, wofür es stehen soll.

Als *generelle Deutung* von $X \rightarrow Y$ bietet sich nur die *funktionale* Deutung an, nämlich: „wenn X belegt ist, dann ist auch Y belegt“ oder kurz „wenn X, dann Y“; entsprechend also für $\Phi \rightarrow \Psi$: „wenn Φ (phi), dann Ψ (psi)“.

Wozu den Ausbau der Aussagen-Logik zu einer generellen *2-wertigen* Logik? Natürlich geht es nicht darum, die *Prädikaten-Logik* oder *Quantoren-Logik* (oder sogar eine *quantitative Logik*) überflüssig zu machen. Diese Logiken sind alle *mehr-wertig*, bieten daher also prinzipiell erweiterte Möglichkeiten.

Z. B. kann man mit der aussagen-logischen Implikation X → Y nur ausdrücken „alle X sind Y" oder „alle X sind nicht Y", aber nicht „*einige* X sind Y" oder „*einige* X sind *nicht* Y". Man kann mit „X → Y" ggf. ausdrücken „X ist immer Y", aber nicht „X ist manchmal Y".

Doch auch im 2-wertigen Bereich geht es mir nicht darum, die Prädikaten- und Quantoren-Logik abzulösen; es kann auch Vorteile haben, jeweils die spezifischen Ausdrucksmöglichkeiten der Prädikaten- und Quantoren-Logik zu nutzen anstelle einer einheitlichen 2-wertigen Logik. Dennoch ist es von großer Bedeutung, die Gemeinsamkeit der Strukturen zu erkennen und eine *einheitliche Logik* zu aufzustellen.

1-1-1 Implikation

1-1-1-1 DEFINITION DER IMPLIKATION

Die *Implikation* X → Y steht wie beschrieben für die *Kopula*-Struktur, auch wenn sie normalerweise nicht mit der klassischen Kopula-Formulierung „X ist ein Y" ausgedrückt wird.

Im Punkt „Implikation" behandle ich nicht nur die eigentliche Implikation, sondern alle *implikativen Relationen*, d. h. solche, die mit einem *Pfeil* symbolisiert werden; das sind neben der Implikation vor allem die *Replikation* ← und die *Äquivalenz* ↔. Als *Äquivalent* für die logischen Relationen nenne ich hier jeweils nur einen besonders prägnanten anderen logischen Ausdruck, die Systematik der Äquivalenzen wird später dargestellt.

Ein häufig verwendeter, einfacher Beispielsatz für die Implikation ist:

‚Wenn es regnet, ist die Straße nass'. Dabei gilt:
X: es regnet
Y: die Straße ist nass
→: wenn – dann.

Eine Basis-Relation bzw. ein Relator wird durch eine *Wahrheitswertetafel* dargestellt bzw. definiert. Man kann auch kurz von ‘*Wahrheitstafel*’ sprechen (korrekter und neutraler wäre in meinem Sinne allerdings der Begriff ‘*Gültigkeitstafel*’).

Die Implikation hat wie schon beschrieben folgende Wahrheitswertetafel:

	X → Y	äquivalent: ¬(X ∧ ¬Y)
1.	+ + +	
2.	+ – –	
3.	– + +	
4.	– + –	

Die Implikation X → Y ist nur dann *ungültig*, wenn X belegt ist und Y nicht belegt ist (2. Zeile). In allen anderen Fällen ist sie *gültig*. Die Hauptdeutung ist: „(Immer) wenn X gültig ist, dann ist auch Y gültig". Diese Deutung ist wie beschrieben (wahrheitswert-)*funktional*.

Allgemeine, funktionale Deutungen von X → Y sind (vgl. hierzu 1-1-0-5):

- X impliziert Y / Wenn X belegt ist, dann ist auch Y belegt
- Wenn X, dann Y / Nur wenn Y, dann X (möglicherweise)
- X ist *hinreichende* Bedingung für Y / Y ist *notwendige* Bedingung für X.

Spezielle, funktionale Deutungen von X → Y bzw. Φ → Ψ sind (vgl. 1-1-0-5):
• *Individuell*: x_i → F. Allgemeine Deutung: „x_i impliziert F“ bzw. „Wenn x_i, dann F“
Beispiel: „Sokrates ist ein Philosoph“. Funktional formuliert (z. B.): „Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt“.
• *Klasse*: F → G. Allgemeine Deutung: „F impliziert G“ bzw. „Wenn F, dann G“
Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“. Funktional formuliert (z. B.): „Wenn die Klasse der Menschen Elemente besitzt, dann besitzt auch die Klasse der Sterblichen Elemente“.
• *Aussage*: A → B. Allgemeine Deutung: „A impliziert B“ bzw. „wenn A, dann B“
Beispiel: „Mensch sein heißt sterblich sein“. Funktional formuliert (z. B.): „Wenn jemand ein Mensch ist, dann ist er sterblich“.

1-1-1-2 PROBLEME DER IMPLIKATION

Die Implikation X → Y ist wie gesagt nur dann *ungültig*, wenn *X belegt* ist und *Y nicht belegt* ist. In allen anderen Fällen ist sie *gültig*.

Dies führt erstens zu *logischen Paradoxien*, z. B. sind folgende Sätze – unerwartet – *nicht kontradiktorisch*: X → ¬X: ‚wenn X, dann nicht X’. ¬X → X: ‚wenn nicht X, dann X’. Oder (X → Y) ⟶ ¬(X → Y). Die Implikation ist *nur* kontradiktorisch, wenn man aus einer Tautologie auf eine Kontradiktion schließt (vgl. 0-2-5-5). Zweitens weicht die Implikation vom *normalen Sprachgebrauch* ab, dort versteht man eine *Wenn-dann* Beziehung als nur für die Fälle definiert, in denen *X gültig* (wahr) ist, also die ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel.

Von daher kann man die Implikation mit Recht kritisieren und eine veränderte Implikation einführen, die nur für die Welten definiert ist, in denen X gültig (+) ist. Ich habe hierfür die *Positiv-Implikation* X *→ Y eingeführt. Allerdings kann und soll die Positiv-Implikation die normale Implikation nur *ergänzen*, nicht ersetzen. Denn man auch gute Gründe für die zunächst befremdliche Definition der Implikation angeben. Hier wichtige Diskussionspunkte:

• Zunächst ist zu fragen, warum man nicht, wie bei der Positiv-Implikation, einfach nur die *2* Welten berücksichtigt, in denen das Vorderglied X gültig ist, also X ∧ Y und X ∧ ¬Y. Wie aber auch alle anderen Relatoren für *alle möglichen* (hier 4) Welten definiert sind, so benötigt man auch bei der Implikation eine Form, die *vollständig* ist, für *alle möglichen* Welten.

Dies ist gerade auch für *wissenschaftliche* Aussagen notwendig, die oft mittels der Implikation formuliert werden. Man will dabei *alle* Variablenwerte erfassen, also X, ¬X, Y und ¬Y.

• Die weitere Frage ist: Wenn man X → Y für 4 Welten definiert, warum soll denn X → Y gültig sein, wenn X ungültig ist, also: ¬X ⇒ (X → Y)? Warum soll X → Y nicht in diesen Fällen *ungültig* sein, warum soll nicht gelten ¬X ⇒ ¬(X → Y)?

Hier ist Verschiedenes anzuführen. Zunächst sei klargestellt: aus ¬X folgt nicht, dass Y gültig ist. Es folgt daraus nur, dass X → Y gültig ist. Wie man aus obiger Wahrheitstafel In 1-1-1-1) leicht ersehen kann, gilt ¬X ⇒ (X → Y) unabhängig davon, ob Y gültig oder ungültig ist. Das bedeutet aber, dass man aus ¬X nichts über Y schließen kann. Der klassische Satz „ex falso quodlibet sequitur“ (aus dem Falschen folgt Beliebiges) bedeutet hier also nicht, dass man aus ¬X z. B. Y bzw. ¬Y ableiten könnte. Anders sieht es allerdings aus, wenn man aus *analytisch* Falschem, d. h. aus einer *Kontradiktion*, Schlüsse zieht. Aus einer Kontradiktion kann man in der Tat *alles* ableiten, z. B.: (X ∧ ¬X) ⇒ Y, (X ∧ ¬X) ⇒ ¬Y. Das zeigt allerdings auch die Problematik der Implikation, denn ein solcher Schluss ist wenig plausibel.

In der 2-wertigen Aussagen-Logik gibt es nach herkömmlicher Auffassung nur die Werte wahr/gültig (+) und falsch/ungültig (–); zur Problematik von zwei-wertig vgl. u. a. 1-4-0-5. Man muss sich also entscheiden, ob man X → Y bei ¬X als gültig oder ungültig definiert. (man könnte es auch in *einem* Fall als gültig definieren, z. B. bei gültigem Y, im *anderen* Fall als negativ – aber das führt nicht weiter). Und wenn es nur 2 Möglichkeiten gibt, dann spricht einiges dafür, X → Y als *gültig* zu bestimmen. Angenommen, man definierte beide Fälle als ungültig (–), dann bekäme die Implikation den Wahrheitsverlauf + – – –, das ist aber genau der Wahrheitsverlauf der *Konjunktion*, der *Und-Verknüpfung*; man könnte dann nicht mehr unterscheiden zwischen Implikation und Konjunktion, was indiskutabel ist.

• Öfters hört man auch folgendes, allerdings etwas fragwürdiges Argument: Da man aus einer *falschen* Aussage durch logisch korrektes Schließen sowohl zu *wahren* als auch zu *falschen* Aussagen kommen kann, ist es akzeptabel, den Wahrheitswert von X → Y immer als wahr = gültig zu bestimmen, wenn der Wahrheitswert von X falsch = ungültig ist.

• Kommen wir noch einmal zu *wissenschaftlichen* Aussagen zurück: Ein wissenschaftliches *Gesetz* (vereinfacht X → Y) sollte auch gelten, wenn die *Randbedingungen* (hier X, genauer X_i) nicht erfüllt sind; jedenfalls wäre es nicht überzeugend, es dann einfach *falsch* zu nennen.

• X → Y ist logisch äquivalent ¬X ∨ Y, ¬(X ∧ ¬Y) u. a. Greifen wir uns hier ¬(X ∧ ¬Y) heraus. Man könnte argumentieren, dies sei die Definition, die primäre Bedeutung der Relation X → Y, also: „Es ist nicht wahr, dass zugleich X wahr ist und Y falsch ist". Insofern man sich also von der „*Wenn-Dann*-Interpretation" verabschiedet, lösen sich viele, eventuell alle der genannten Probleme auf. Allerdings hat es sich andererseits durchgesetzt und bewährt, die Relation X → Y vorrangig als „Wenn X, dann Y" zu bestimmen – und überhaupt sind *Wenn-dann-Sätze* unverzichtbar in der Sprache wie in der Wissenschaft.

Trotz allem bleiben *berechtigte Zweifel an der Implikation*, wie wir noch oft in diesem Buch sehen werden. Eine Lösungsmöglichkeit ist wie gesagt zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* X *→ X einzuführen, die für ¬X *undefiniert* ist.

Diese Thematik hängt zusammen mit der Frage: Besteht bei X → Y ein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen X und Y?

In der *normalen Sprache* versteht man sogenannte *Konjunktionen* (Bindewörter) wie ‚und', ‚oder' vor allem aber ‚wenn – dann' so, dass sie einen *inhaltlichen*, nicht zufälligen Zusammenhang ausdrücken. Z. B. ‚wenn es regnet, ist bzw. wird die Straße nass'. In diesem Fall ist ein *Kausal-Zusammenhang* (oder jedenfalls *Konditional*-Zusammenhang) ausgedrückt. Noch eindeutiger ist das bei Konjunktionen wie ‚weil', ‚damit' ‚um zu' usw.

In der *formalen Logik* liegen die Verhältnisse anders und komplizierter. Grundsätzlich ist zu berücksichtigen, dass es in der Logik nur um *korrelative* Relationen geht. Man kann auch von *‚funktionalen'* Relationen sprechen, dies ist aber etwas missverständlich, weil man unter ‚Funktion' auch so etwas wie eine *Aufgabe* oder aber (sinnvolle) Wirkung versteht, wobei über-logische Aspekte zumindest mitklingen.

Betrachten wir zunächst *synthetische* Relationen, hier vor allem die Implikation X → Y. In Logik-Büchern wird oft darauf hingewiesen, dass auch eine *zufällige*, sogar für uns sinnlose Beziehung durchaus mit der Implikation ausgedrückt werden kann, z. B.:

‚Wenn Weihnachten an 25. Januar ist, dann ist Kennedy deutscher Bundeskanzler'.

‚Wenn Sokrates 500 v. Chr. geboren ist, dann ist Kant 1800 n. Chr. geboren'.

Und diese Implikationen sind sogar wahr, weil die Implikation eben als wahr gilt, wenn Vordersatz und Nachsatz falsch sind.

Sicher ist richtig: Bei einer Implikation X → Y sind die Glieder *logisch unabhängig*, aber doch nicht unbedingt empirisch. Wie ich im Einzelnen noch zeigen werde, sind die logischen Relatoren normal *deterministisch* zu verstehen – sie haben eine Wahrscheinlichkeit von p = 1. D. h. für die Implikation, sie ist zu verstehen als ‚*immer* wenn – dann'. Von daher ist zu fragen, ob hier nicht gewisse Beschränkungen bestehen, welche Sätze zugelassen sind; denn *streng singuläre* Sätze, die sich auf ein (vermutlich) *einmaliges* Ereignis wie die Geburt beziehen, können kaum generalisiert werden. Das betrifft z. B. einen der obigen Beispielsätze;

man kann kaum sinnvoll sagen: ‚*Immer* wenn Sokrates 500 v. Chr. geboren ist, dann ist Kant 1800 n. Chr. geboren'.

Wichtiger ist aber noch: Bei einer gesetzmäßigen Relation der Art ‚*immer* wenn – dann' (mit p = 1) besteht statistisch eine *absolute positive Korrelation*; dann ist es kaum denkbar, dass es sich um eine *zufällige* Beziehung handelt. Insofern ist es doch berechtigt, bei den logischen Relatoren *inhaltliche* Zusammenhänge anzunehmen. Und insofern ist es auch sinnvoller, einen Beispielsatz wie ‚*immer* wenn es regnet, ist die Strasse nass' zu verwenden, der auf eine *kausale* Beziehung hinweist. Welcher Art genau die Zusammenhänge sind, wird logisch zunächst offen gelassen. Sicher ist, die Logik erfasst nur den korrelativen, funktionalen Zusammenhang selbst, nicht die mögliche *über-korrelative* Beziehung.

Eine andere Lösung wäre, zwischen *materialer* (inhaltlicher) und *formaler* Implikation zu unterscheiden. Die bisher behandelte Implikation $X \rightarrow Y$ ist *formal*, d. h. zwischen X und Y muss *keinerlei inhaltlicher* Zusammenhang bestehen. Daher kann sie auch für folgendes Verhältnis stehen: „$2 + 2 = 5 \rightarrow$ am 24.12. ist Weihnachten" (und diese Implikation ist sogar gültig, weil der Vordersatz ungültig ist).

Dagegen bestände bei einer *materialen Implikation* ein *inhaltlicher* Zusammenhang (ich weise darauf hin, dass die Begriffe ‚materiale Implikation' bzw. ‚formale Implikation' zuweilen in entgegengesetzter Bedeutung verwendet werden). Es führte zu weit, hier nun ausführlich eine *materiale* Implikation zu entwerfen. Man könnte sich z. B. vorstellen, dass X dem Y *zeitlich vorausgehen* muss, dass eine *räumliche Nähe* zwischen X und Y bestehen muss usw. Das führte am ehesten zu einer *Kausal-Implikation* (oder Konditional-Implikation); nur gehörte eine solche nicht mehr zur Logik im engren Sinn. Sei noch hinzugefügt, dass bei der *analytischen* (formalen) Implikation $\Phi \Rightarrow \Psi$ in jedem Fall ein inhaltlicher Zusammenhang besteht, z. B. $X \Rightarrow X \vee Y$, hier taucht das X der *Prämisse* in der *Konklusion* wieder auf, also ist eine Verbindung gegeben (vgl. Kap. 2).

1-1-1-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

Es gibt vor allem folgende Negationen:

	$X \rightarrow \neg Y$	äquivalent $X \mid Y$
1.	+ – – +	
2.	+ + + –	
3.	– + – +	
4.	– + + –	

	$\neg(X \rightarrow Y)$	äquivalent $X \wedge \neg Y$
1.	– + + +	
2.	+ + – –	
3.	– – + +	
4.	– – + –	

Die doppelte Negation $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – ist äquivalent der Konjunktion $X \wedge Y$.

Hier ergibt sich die Gelegenheit, die *zentrale Zeile* der Wahrheitstafel zu erklären. Die zentrale Zeile ist diejenige, welche die Relation *definiert* bzw. welche der *Bezeichnung* der Relation entspricht. Diese zentrale Zeile wird bei den Beispielen *unterstrichen*.

Bei einer *positiven* Relation ist normalerweise die 1. Zeile *zentral*; man könnte zwar auch vertreten, dass die 2. Zeile die *definierende* ist, aber das will ich hier nicht weiter verfolgen.

	X	$\rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

Bei einer *negativen* Relation ist das anders, z. B.: $X \rightarrow \neg Y$. Die Relation besagt ja primär: Wenn X gültig (+) ist, dann ist Y nicht gültig (–). Y ist nicht gültig, bedeutet ja aber: $\neg Y$ ist gültig, also muss unter dem Negationszeichen $\neg$ ein + stehen. Somit ist hier die 2. Zeile die *zentrale*. Auch bei $\neg(X \rightarrow Y)$ ist die 2. Zeile die zentrale Zeile.

1-1-1-4 REPLIKATION

Die *Replikation* $X \leftarrow Y$ ist die *Umkehrung* der Implikation. Von daher ist es berechtigt, sie als Unterpunkt der Implikation zu behandeln.
Hauptdeutung: „Nur wenn X, dann auch Y (möglicherweise)“. Zu den anderen möglichen Deutungen verweise ich auf die Implikation.

X	$\leftarrow$	Y
+	+	+
+	+	–
–	–	+
–	+	–

ist äquivalent $\neg X \rightarrow \neg Y$

Es mag irritieren, das in der 3. Zeile X ungültig (–) ist, Y aber gültig (+). Aber in diesem Fall ist eben $X \leftarrow Y$ ungültig.

1-1-1-5 ÄQUIVALENZ

Die *Äquivalenz* bedeutet die Verbindung (Konjunktion) von *Implikation und Replikation*.
Das wird später genauer gezeigt werden.
Hauptdeutung: Wenn X, dann Y, und wenn Y, dann X.
Im Sinne der *Kopula* deutet man: X ist ein Y, und Y ist ein X, also X = Y.

X	$\leftrightarrow$	Y
+	+	+
+	–	–
–	–	+
–	+	–

ist äquivalent $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$

1-1-2 Positiv-Implikation

1-1-2-1 BEGRÜNDUNG DER POSITIV-IMPLIKATION

Die Positiv-Implikation A $*\!\rightarrow$ B wurde schon in 0-2-5-5 eingeführt. In der *normalen Sprache* versteht man einen *Wenn-Dann-Satz* so, dass er nur eine Aussage macht über die Fälle, in denen der Wenn-Satz *wahr* ist. Ebenso in der *Wissenschaft* versteht man eine Hypothese meist in diesem Sinne (wenn sie eben nicht mit der Implikation formalisiert ist). Auch in der mathematischen *Wahrscheinlichkeitstheorie* wird eine Aussage p(A|B) = r/n über *bedingte Wahrscheinlichkeit* so interpretiert, dass sie sich nur auf die Fälle bezieht, in denen B wahr ist (A und B sind hier vertauscht). Dies bedeutet nicht zwangsläufig, dass man nicht *alle* Möglichkeiten berücksichtigt, denn man kann A *→ B ja ergänzen durch: ¬A *→ B.

Die *normale* Implikation A → B berücksichtigt dagegen automatisch auch die Fälle, in denen der Wenn-Satz falsch ist. Daher habe ich zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* eingeführt. Sie berücksichtigt wie gesagt nur die beiden Welten, in denen das Vorderglied gültig (positiv) ist. Die Positiv-Implikation entspricht also viel mehr unserem üblichen Denken und der normalen Sprache, allerdings gibt es auch Nachteile: vor allem ist die Positiv-Implikation im analytischen Bereich, etwas bei logischen Folgen, viel komplizierter als die normale Implikation. (Da ich auch die Positiv-Implikation nicht nur auf *Aussagen* ‚A', ‚B' usw. beziehe, verwende ich normalerweise die *generellen* Variablen ‚X', ‚Y' usw., also z. B. X *→ Y.)

1-1-2-2 ZWEI VARIANTEN DER POSITIV-IMPLIKATION

Die *Positiv-Implikation*, auch *Implikation, wird durch ein * über dem Pfeil gekennzeichnet: *→, also X *→ Y. Relation X *→ Y ist nur für die Welten *definiert*, in denen X gültig ist.

Im Beispiel: Ein Satz 'Wenn es regnet, ist die Straße nass' sagt nur etwas aus für den Fall, dass es regnet. Was mit der Straße geschieht, wenn es *nicht* regnet, ist *nicht definiert*.

Man kann die Positiv-Implikation durch zwei verschiedene Wahrheitstafeln darstellen:

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–		+
–		–

Im ersten Fall werden nur die 2 Welten aufgeführt, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv ist. Ich verspreche hier von ‚verkürzter Positiv-Implikation'.

Im zweiten Fall ist die Implikation zwar für alle 4 Welten ausgeführt, aber in den 2 Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist (also das X ein – hat), steht das Symbol unter dem Relator. hat die Bedeutung '*nicht definiert'*. Diese Lösung ist jedenfalls für die Individuen-Relation und die Klassen-Relation plausibler, in manchen Fällen sogar unverzichtbar.

Es wäre auch noch eine Variante möglich: Man betrachtet dann die Fälle mit negativem Vordersatz nicht als *undefiniert*, sondern als *partiell wahr*. Als Symbol könnte man z. B. ± nehmen. Ich halte aber die Deutung 'nicht definiert' für sinnvoller. Wenn man überhaupt bei einem Relator eine *partielle Wahrheit* einführen will, so ist die *Konjunktion* dafür geeigneter (vgl. 1-1-3-3).

1-1-2-3 NEGATIONEN DER POSITIV-IMPLIKATION

Es sollen vor allem folgende Negationen erwähnt werden:

X *→ ¬Y : – +
¬X *→ Y : + –
¬X *→ ¬Y : – +
¬ (X *→ Y) : – +

Ich möchte auf ¬X *→ Y etwas genauer eingehen:

	¬X	*→	Y
1.	– +		+
2.	– +		–
3.	+ –	+	+
4.	+ –	–	–

Die *negative* Relation ¬X *→ Y ist für die Welten definiert, in denen X *ungültig* ist, also nicht für die Welten, in denen X gültig ist. In der Wahrheitstafel bedeutet das: ¬X *→ Y ist für die 3. und 4. Zeile definiert, in denen das Negationszeichen ¬ ein + hat und X ein –.

Ein Satz wie 'Wenn es nicht regnet (¬X), bleibt die Straße trocken (Y), sagt bei Verwendung von *→ also nur etwas über das Fall aus, dass X ungültig und nicht X gültig ist.

1-1-2-4 POSITIV-REPLIKATION

Positiv-Replikation

X	←*	Y
+	+	+
+		–
–	–	+
–		–

Die Positiv-Replikation ist nur so sinnvoll darstellbar, mit vollständiger Wahrheitstafel.

1-1-2-5 POSITIV-ÄQUIVALENZ

Positiv-Äquivalenz: *verkürzte* Darstellung

X	↔*	Y
+	+	+
+	–	–
–	–	+

Positiv-Äquivalenz: *vollständige* Darstellung.

X	↔*	Y
+	+	+
+	–	–
–	–	+
–		–

Man könnte kritisieren, dass die Äquivalenz in der 2. und 3. Zeile gar nicht definiert ist, weil auch von – (also negativem X oder negativem Y aus) geschlossen werden kann; ich werde aber später erläutern, warum diese Wahrheitstafeln doch korrekt sind.

1-1-3 Systematik

Die Relatoren und die Wahrheitswertetafel wurden bereits erläutert. Bei 2 Variablen gibt es 4^2 bzw. $2^4 = 16$ mögliche Verläufe der Wahrheitswerte-Tafel, von + + + + bis zu – – – –.

Gerade diese beiden letzten Verläufe stehen aber für *analytische* Relationen, für die *Tautologie* oder die *Kontradiktion*. Daher sollte man ihnen nicht (synthetische) Relatoren zuordnen (vgl. dazu z. B. die Diskussion in 3-1-3-1). Es gäbe demnach nur 14 Relatoren. Der Vollständigkeit halber zähle ich aber doch – wie es üblich ist – 16 Relatoren auf.

1-1-3-1 GESAMTÜBERSICHT

Name	+X +Y	+X –Y	–X +Y	–X –Y	*Symbol*	*(mögliche) Bedeutung*
1) Tautologie	+	+	+	+	X ⊤ Y	X oder nicht X und Y oder nicht Y
2) Disjunktion	+	+	+	–	X ∨ Y	X oder Y (oder beide)
3) Replikation	+	+	–	+	X ← Y	nur wenn Y, auch X
4) Präpension	+	+	–	–	X ⌋ Y	jedenfalls X (vielleicht Y)
5) Implikation	+	–	+	+	X → Y	immer wenn X, dann Y
6) Postpension	+	–	+	–	X ⌊ Y	jedenfalls Y (vielleicht X)
7) Äquivalenz	+	–	–	+	X ↔ Y	X ist äquivalent Y
8) Konjunktion	+	–	–	–	X ∧ Y	X und Y
9) Exklusion	–	+	+	+	X | Y	X oder Y (aber nicht beide)
10) Kontravalenz	–	+	+	–	X >< Y	entweder X oder Y
11) Postnonpension	–	+	–	+	X ⌈ Y	keinesfalls Y
12) Postsektion	–	+	–	–	X >– Y	X und nicht Y
13) Pränonpension	–	–	+	+	X ⌉ Y	keinesfalls X
14) Präsektion	–	–	+	–	X –< Y	Y und nicht X
15) Rejektion	–	–	–	+	X ∇ Y	nicht X und nicht Y
16) Antilogie	–	–	–	–	X ⊥ Y	X und nicht X und Y und nicht Y

Die hier genannten Bedeutungen sind zwar die wichtigsten, aber es lassen sich auch andere Bedeutungen angeben. Wenn man z. B. eine *mengentheoretische Semantik* wählt, ergeben sich ggf. ganz andere Interpretationen, z. B. für X → Y: X ist Teilmenge von Y (vgl. 0-4).

Grundsätzlich lassen sich *alle* diese Relationen auf *eine einzige* zurückführen, z. B. auf die *Exklusion* X | Y (auch 'nand' für non-and genannt) und auf die *Rejektion* X ∇ Y (auch 'nor' für non-or genannt). 'nand' und 'nor' spielen bei der *Computer-Logik* eine besondere Rolle.

1-1-3-2 ÜBERSICHT ÜBER DIE WICHTIGSTEN RELATOREN

Die wichtigsten Relatoren sind wie schon beschrieben:

- *Konjunktion* und formal: ∧ X ∧ Y
- *Disjunktion* oder (inklusiv) formal: ∨ X ∨ Y
- *Kontravalenz* oder (exklusiv) formal: >< X >< Y
- *Exklusion* oder (nicht beide) formal: | X | Y
- *Implikation* wenn – dann formal: → X → Y
- *Äquivalenz* nur wenn – dann formal ↔ X ↔ Y

Die Wahrheitstafeln sind:

X	Y	∧	∨	><	|	→	↔
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

Eine weitere Möglichkeit ist die Einteilung der Relatoren nach *Anzahl der Welten*, in denen sie *gültig* sind:

- 4-Welt-Relator: ⊤
- 3-Welt-Relatoren: → ← ∨ |
- 2-Welt-Relatoren: ↔ >< ⌋ ⌊ ⌉ ⌈
- 1-Welt-Relatoren: ∧ –< >– ∇
- 0-Welt-Relator: ⊥

1-1-3-3 KONJUNKTION

Ich will die Konjunktion ∧ besonders hervorheben, weil sie sich an besten für die Einführung einer *partiellen Wahrheit* eignet.

	X	∧	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	–	+
4.	–	–	–

Man könnte folgendermaßen argumentieren: Wenn X und Y beide falsch (–) sind (4. Zeile), dann ist der *Gesamtsatz falsch*. Wenn aber nur *entweder* X *oder* Y falsch sind (2. bzw. 3. Zeile), dann ist der Gesamtsatz *halb wahr und halb falsch*, man könnte sagen *1/2 wahr*. Als Symbol könnte man wählen: ±. Man hätte ein *3-wertiges System*, mit der Wahrheitstafel:

	X	∧	Y
1.	+	+	+
2.	+	±	−
3.	−	±	+
4.	−	−	−

Dabei ist es zu bedenken: Man kann mit der Konjunktion und der Negation die anderen Relatoren definieren, das wird im Kap. 2 über analytische Relationen genauer erläutert.

Wenn man z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$ mittels Konjunktion darstellt, nämlich als $\neg(X \wedge \neg Y)$, dann ergibt sich als Wahrheitswerteverlauf ± − + ± (wenn man ± negiert, erhält man offensichtlich wiederum ±). Diese Deutung der Implikation ist allerdings nicht sehr plausibel, am besten lässt sich das Modell der partiellen Wahrheit nur bei eindeutigen Konjunktionen anwenden. Daher wäre es auch inadäquat, generell die 2-Wertigkeit der Aussagen-Logik in Frage zu ziehen. Wichtig ist zu unterscheiden: Bei der Konjunktion handelt es sich um einen *strukturellen* Ansatz der partiellen Wahrheit. Im späteren quantitativen Teil wird gezeigt werden, wie sich alle Relatoren *quantifizieren* lassen. Allerdings ziehe ich es vor, diese Quantität als *Wahrscheinlichkeit* und nicht als *partielle Wahrheit* zu deuten.

1-1-3-4 RELATIONS-KETTEN

Es lassen sich beliebig lange *Ketten* von Relationen herstellen, d. h. *Molekular-Relationen*. Dabei ist zu unterscheiden:

- Molekular-Relationen mit mehreren, mindestens drei Variablen, wobei jede Variable nur *einmal* vorkommt. Sie sind *synthetisch*.
  z. B.: $(X_1 \leftrightarrow Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2)$.
- Molekular-Relationen mit mehreren Variablen, wobei mindestens eine Variable *mehr als einmal* vorkommt. Hier handelt es sich um *(partiell) analytische* Relationen: analytisch: z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$
  teil-analytisch : z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

Für die Wahrheitstafel gilt:
Bei 2 Variablen: $2^2 = 4$ Reihen bzw. 4 mögliche Welten
Bei 3 Variablen: $2^3 = 8$ Reihen bzw. 8 mögliche Welten usw.
Bei 4 Variablen: $2^4 = 16$ Reihen bzw. 16 mögliche Welten
Bei n Variablen: 2^n Reihen bzw. mögliche Welten.

Beispiel: die Wahrheitstafel einer *synthetischen* Molekular-Relation mit *3* Variablen X, Y, Z

	(X	→	Y)	→	Z
1.	+	+	+	+	+
2.	+	+	+	−	−
3.	+	−	−	+	+
4.	+	−	−	+	−
5.	−	+	+	+	+
6.	−	+	+	−	−
7.	−	+	−	+	+
8.	−	+	−	−	−

1-1-3-5 REFLEXIVITÄT, SYMMETRIE UND TRANSITIVITÄT VON RELATOREN
Es gibt verschiedene Kriterien, nach denen man Relatoren (Junktoren) einteilen kann.

- Reflexivität
  - *reflexiv* bedeutet: X $^+R^+$ X, z. B. X ⇒ X, die Relation ist tautologisch
  - *irreflexiv* bedeutet: X $^+R^-$ X, z. B. X ∧ X (+ + – –), ist nicht tautologisch (man kann irreflexiv auch so interpretieren, dass gilt: X $^-R^-$ X, also eine *Kontradiktion* besteht, aber einen entsprechenden Relator gibt es nicht, wenn man vom problematischen Antilogator absieht)
- Symmetrie
  - *symmetrisch*: X R Y ⇔ Y R X, also z. B.: X ∧ Y ⇔ Y ∧ X
    für symmetrische Relatoren gilt somit das *Vertauschungsgesetz*
    symmetrisch sind z. B.: ∧ ∨ >< | ↔
  - *asymmetrisch*: X R Y ¬⇔ Y R X
    asymmetrisch sind z. B.: → ←
    Für asymmetrische Relatoren gilt das Vertauschungsgesetz nicht,
    z. B. (X → Y) ←→ (X ← Y), aber eben nicht (X → Y) ¬⇔ (X ← Y)
    X → Y und X ← Y sind nur partiell analytisch äquivalent.
- Transitivität
  - *transitiv*: (X R Y) ∧ (Y R Z) ⇒ (X R Z)
    z. B.: (X → Y) ∧ (Y → Z) ⇒ (X → Z): → ist transitiv
  - *intransitiv*: (X R Y) ∧ (Y R Z) ¬⇒ (X R Z)
  - z. B.: (X ∨ Y) ∧ (Y ∨ Z) ¬⇒ (X ∨ Z): ∨ ist intransitiv

Folgende Symbole wurden hier verwendet, die erst später genauer erklärt werden:

⇔ (tauto)logisch äquivalent	¬⇔ nicht logisch äquivalent
⇒ (tauto)logisch implikativ	¬⇒ nicht logisch implikativ

Die *Symmetrie* behandle ich ausführlicher, weil sie von besonderer Bedeutung ist.

Die *asymmetrischen* Relatoren sind *dyadisch*, sie sind nur für 2 Variablen definiert (wenn man natürlich auch mehr Variablen damit verbinden kann). Die *symmetrischen* Relatoren sind dagegen für beliebig viele Variablen zu definieren.

Praktisch zeigt sich das folgendermaßen: Für eine *asymmetrische* Implikation mit 3 Variablen X → Y → Z ist die Wahrheitstafel nicht unmittelbar ersichtlich.

Auch ergibt sich für (X → Y) → Z eine andere Wahrheitstafel als für X → (Y → Z).

Dagegen ist bei den *symmetrischen* Relatoren wie ∧ ∨ >< | ↔ die Wahrheitstafel für 3 (und beliebig viele) Variablen sofort zu bestimmen:

X Y Z	∧	∨	><	|	↔
+ + +	+	+	–	–	+
+ + –	–	+	+	+	–
+ – +	–	+	+	+	–
+ – –	–	+	+	+	–
– + +	–	+	+	+	–
– + –	–	+	+	+	–
– – +	–	+	+	+	–
– – –	–	–	–	+	+

- Konjunktion: $\wedge$
  Die ist nur positiv (+), wenn alle Variablen positiv (+) sind.
  Es ist also bei 2, 3, 4, ... , n Variablen immer nur die *erste* Zeile positiv (+).
- Disjunktion: $\vee$
  Die ist nur negativ (−), wenn alle Variablen negativ (−) sind.
  Es ist also bei 2, 3, 4, ... , n Variablen immer nur die *letzte* Zeile negativ (−).
- Kontravalenz: ><
  Die ist nur negativ, wenn *alle* Variablen positiv oder *alle* Variablen negativ sind. Es sind also bei 2, 3, 4, ... , n Variablen immer nur die *erste* und die *letzte* Zeile negativ.
- Exklusion: $|$
  Die ist nur negativ, wenn alle Variablen positiv sind.
  Es ist also bei 2, 3, 4, ... , n Variablen immer nur die *erste* Zeile negativ.
- Äquivalenz: $\leftrightarrow$
  Die ist nur positiv, wenn alle Variablen positiv oder alle Variablen negativ sind. Es sind also bei 2, 3, 4, ... , n Variablen immer nur die *erste* und die *letzte* Zeile positiv.

Bei den symmetrischen Relatoren ist bei mehr als 2 Variablen ggf. eine andere Schreibweise sinnvoll: z. B. anstatt ‘$X \vee Y \vee Z$’ besser ‘$\vee(X, Y, Z)$’, was insbesondere bei *vielen* Variablen zur Vereinfachung führt. Ich werde mich in diesem Text aber im Wesentlichen auf 2 Variablen beschränken, weil sich so die Basis-Strukturen am klarsten aufzeigen lassen.

1-1-4 Inklusiv / Exklusiv

Diese Unterscheidung bezieht sich (hier) auf das *inklusive* und das *exklusive* „oder“.

1-1-4-1 DISJUNKTION

Als Disjunktion bezeichnet man das *inklusive oder:* $X \vee Y$.
Das inklusive „oder“ *schließt ein*, dass auch beide Variablen, X *und* Y gültig sein können.

Deutungen:
X oder Y oder beide; X und Y oder X und nicht Y oder Y und nicht X

X	$\vee$	Y
+	+	+
+	+	−
−	+	+
−	−	−

1-1-4-2 KONTRAVALENZ

Die *Kontravalenz* bezeichnet in meiner Terminologie das *exklusive* „oder“: X >< Y

Deutungen:

Entweder X oder Y (aber nicht beide, eins ist *ausgeschlossen*)

X	><	Y
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Der Unterschied ist sofort ersichtlich: Die *Disjunktion* gilt auch im ersten Fall (X+, Y+) als positiv, die *Kontravalenz* als negativ.

1-1-4-3 EXKLUSION

Allerdings gibt es eine dritte oder-Verknüpfung, die meistens ‘*Exklusion*’ genannt wird: X | Y

X	|	Y
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	+	–

Sie schließt nur aus, dass X und Y zusammen gültig sind. Wenn ich in diesem Text aber von ‘exklusivem oder’ spreche, meine ich vorrangig die Kontravalenz.

1-1-4-4 VERBINDUNGEN ZWISCHEN DEN ODER-RELATOREN

Hier sollen nur die *Implikationen* dargestellt werden:

Es gilt: $X >< Y \Rightarrow X \vee Y$, entsprechend $X >< Y \Rightarrow X \mid Y$

Auf weitere Beziehungen wird im analytischen Teil eingegangen.

1-1-4-5 DISJUNKTION UND KONJUNKTION

Es gelten folgende Beziehungen:

$$X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$$
$$X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge Y)$$
$$\neg X \vee Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$$
$$\neg X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$$

$$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$$
$$\neg(X \vee \neg Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge Y$$
$$\neg(\neg X \vee Y) \Leftrightarrow X \wedge \neg Y$$
$$\neg(\neg X \vee \neg Y) \Leftrightarrow X \wedge Y$$

Man spricht auch von ‘*de Morgan-Gesetzen*’, nach dem englischen Logiker und Mathematiker Augustus de Morgan (1806 – 1871).

1-1-5 Erweiterungen

Man kann die Aussagen-Logik, generell die Logik, auf Bereiche anwenden, die zwar eine logische Struktur haben, andererseits aber über die Logik hinausreichen, die *hyper-logisch* sind. Ich möchte hier folgende Bereiche kurz besprechen:

- Modalität
- Kausalität
- Identität
- Zeit
- Raum

1-1-5-1 MODALITÄT

Die primäre Modalität ist die sogenannte *alethische* Modalität: sie hat es mit Begriffen wie *Notwendigkeit*, *Möglichkeit* und *Unmöglichkeit* zu tun. Modalität kann man so verstehen, dass sie auch *außer-logische* Komponenten enthält, z. B. wenn man die Modalität auf *Kausalität* bezieht: *notwendig* ist dann eine *Wirkung* in Bezug auf ihre *Ursache*.

Modalität kann man aber auch allein *innerhalb* der Logik definieren. Einige modal-logische Begriffe, nämlich „notwendig" (N) und „notwendig nicht" (N¬) lassen sich dabei rein *aussagen-logisch* ausdrücken, in erster Linie durch die *Implikation*.

Das sei kurz für einen *synthetischen* Ansatz erläutert (an späterer Stelle werden wir den – wichtigeren – analytischen Ansatz besprechen). Beim synthetischen Ansatz geht es um *empirische* Modalitäten, nicht um *logische*. ‚Y ist notwendig in Bezug auf X' bedeutet also: „Y ist empirisch notwendig in Bezug auf X".

1) Notwendigkeit

„Y ist *notwendig* in Bezug auf X" kann man *aussagen-logisch* durch $X \rightarrow Y$ ausdrücken. *Modal-Logisch* könnte man schreiben, bei N = Notwendigkeit: $N(Y, X) =_{df} X \rightarrow Y$. Lies: ‚Y ist notwendig in Bezug auf X' ist definiert als: $X \rightarrow Y$.

2) Unmöglichkeit

Die Frage ist, wie man „nicht Y ist notwendig in Bezug auf X" („wenn X, dann notwendig nicht Y") ausdrückt. Dabei ist zu bedenken, dass normalerweise modal-logisch gilt: „nicht Y ist notwendig in Bezug auf X" ist äquivalent „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X". Ich will zwei Modelle vorstellen:

- $X \rightarrow \neg Y$: $- + + +$

Man würde vermutlich „Y ist unmöglich in Bezug auf X" zunächst durch $X \rightarrow \neg Y$ formalisieren. Es ließe sich argumentieren: wenn X nicht-Y impliziert, dann ist es unmöglich, dass X auch Y impliziert. Aber dies ist logisch durchaus möglich: denn $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y)$ ist *keine Kontradiktion*, sondern hat den Wahrheitsverlauf $- - + +$. Beide Ausdrücke können zugleich wahr sein. Doch es darf ja nicht zugleich gelten: „Y ist n*otwendig* in Bezug auf X" und „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X". Zwar zeigt die Wahrheitstafel, dass beide Ausdrücke nur in den zwei Welten wahr sind, wo X falsch ist, aber das löst das Problem nicht wirklich.

Allerdings könnte man sich mit der *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ behelfen, die ja nur für die Welten definiert ist, in denen X wahr ist. Entsprechend gibt diese hier eine *Kontradiktion* an, nämlich: $(X *\!\!\rightarrow Y)\ ^{-}\!\wedge^{-}\ (X *\!\!\rightarrow \neg Y)$. Aber wenn man eine Lösung sucht, die auch für die *normale* Implikation gilt, führt das nicht weiter.

• $\neg(X \rightarrow Y)$: $- + - -$

So kann man alternativ „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X“ durch die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ formalisieren. Dann ist die gewünschte Kontradiktion zwischen *notwendig*: $X \rightarrow Y$ und *unmöglich*: $\neg(X \rightarrow Y)$ gewährleistet. Die Formalisierung $\neg(X \rightarrow Y)$ mag zunächst verwundern, man würde das eher übersetzen mit „es ist nicht wahr, dass Y notwendig ist in Bezug auf Y“. Aber $\neg(X \rightarrow Y)$ hat den Wahrheitsverlauf $- + - -$, es ist laut Wahrheitstafel nur in dem *einen* Falle wahr, dass X wahr und Y falsch ist; das passt also zu: „wenn X, dann unmöglich Y“. Außerdem ist eben in einem *2-wertigen* System „unmöglich“ die Negation von „notwendig“. (Dass in einem *mehr-wertigen* System „notwendig“ und „unmöglich“ nicht *kontradiktorisch*, sondern nur *konträr* sind, wird später erläutert.) Auch wenn die Lösung $\neg(X \rightarrow Y)$ nicht völlig überzeugen mag, in der synthetischen Modal-Logik dürfte es keine bessere geben.

Modal-logisch könnte man schreiben (Bei U = Unmöglich): $U(Y, X) =_{df} \neg(X \rightarrow Y)$.

3) Möglichkeit

Meine These ist, dass sich „möglich“ nicht rein *aussagen-logisch* darstellen lässt. Die Frage ist, ob sich Gegenmodelle finden.

• $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: $+ - - -$

„Y ist möglich in Bezug auf X“, formal M(Y, X), wird hier durch die *doppelte Negation* der Implikation gebildet, mit der Bedeutung: „Es ist nicht wahr, dass nicht-Y notwendig auf X folgt“.

Aber hier ergibt sich folgendes Problem: Ein wesentliches Gesetz der Modal-Logik ist: notwendig $\Rightarrow$ möglich bzw. notwendig (X) $\Rightarrow$ möglich (X). Ein strenger Schluss von „notwendig“ auf „möglich“ ist aber nicht gegeben: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow \neg Y)$: $+ + - -$. Es handelt sich also nur um einen *semi-analytischen* Schluss. Schlimmer, umgekehrt ergibt sich ein *strenger* Schluss: $\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$. Dies hieße aber: möglich $\Rightarrow$ notwendig, und das ist inakzeptabel. Generell gilt: $X \rightarrow Y$ impliziert logisch ($\Rightarrow$) überhaupt nur sich selbst, also $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$, oder Tautologien.

Allerdings erhält man bei dreifacher Verwendung der *Positiv-Implikation* (im Existenz-Modell) doch eine Tautologie: $(X *\rightarrow Y) *\Rightarrow \neg(X *\rightarrow \neg Y)$: +

Andererseits gilt hier die Äquivalenz: $(X *\rightarrow Y) *\Leftrightarrow \neg(X *\rightarrow \neg Y)$: + +, nicht nur die Implikation; somit wären *notwendig* und *möglich* äquivalent, was auch nicht stimmen kann.

• $X \vee Y$: $+ + + -$

Diese und andere Möglichkeiten diskutiere ich im Exkurs zu diesem Kapitel 1: „Reduktion von Quantoren-Logik auf Aussagen-Logik?“ Ohne dem vorauszugreifen, eine überzeugende Lösung wird sich nicht finden.

Fazit: Genau so, wie sich „einige“ und „einige nicht“ nicht *aussagen-logisch* ausdrücken lassen, so auch nicht „möglich“ und „möglich nicht“, welche dieselbe quantitative Struktur besitzen: „möglich“ entspricht „einige“, „möglich (dass) nicht“ entspricht „einige nicht“. „Möglich“ (M) und „möglich nicht“ ($M\neg$) sind nur durch *Quantoren-Logik* bzw. eine höhere Logik darzustellen – gleichgültig, ob in einem *synthetischen* oder einem *analytischen* Ansatz. Deshalb ist eine vollwertige Modal-Logik eben nur durch *Quantoren-Logik* oder in einer quantitativen Logik zu formalisieren.

1-1-5-2 KAUSALITÄT

Hier sollen die *logischen Strukturen* von *Kausal-Beziehungen* angegeben werden. Zur Kausalität gehört natürlich mehr als die logische Struktur – so geht die Ursache der Wirkung *zeitlich* voraus –, aber eine bestimmte logische Struktur ist notwendige Bedingung für die spezielle Kausalbeziehung.

Bei einer sogenannten *Kausal-Erklärung* gibt man normalerweise ein *Gesetz* an, *quantoren-logisch* ein *All-Satz*, aus dem mit einer zusätzlichen Prämisse (*Randbedingung*) ein singulärer Satz bzw. ein singuläres Ereignis erklärt wird (vgl. Exkurs zu Kap. 3).
Ich beschränke mich hier aber auf die aussagen-logischen Grundstrukturen.

• *Mono-Kausalität*

$X \leftrightarrow Y$ Wahrheitsverlauf : + – – +

'Mono-Kausalität' bedeutet: es gibt nur *eine* Ursache X für die Wirkung Y. Mono-Kausalität kommt in der Wirklichkeit kaum vor, es bedeutet meistens eine Abstraktion oder Ignorierung von anderen Faktoren. Logisch entspricht dem die Äquivalenz $X \leftrightarrow Y$: Wenn X realisiert ist, muss auch Y gültig sein. Und umgekehrt. X ist *notwendig und hinreichend* für Y und umgekehrt.

• *Multi-Kausalität*

$X \rightarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + – + +

Bedeutet: X ist *hinreichend* für Y (aber nicht notwendig). Es kann auch andere Ursachen für Y geben (man kann Multi-Kausalität allerdings auch im Sinne von *Konditionalität* verstehen d. h. dass mehrere Faktoren zusammen auftreten müssen, um die Wirkung Y hervorzubringen). Dies wird am besten durch die Implikation $X \rightarrow Y$ wiedergegeben, wobei man allerdings die Positiv-Implikation $X *\!\!\rightarrow Y$ vorziehen könnte.

• *Konditionalität*

$X \leftarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + + – +

X ist eine Bedingungen von *mehreren* für Y. X ist also *notwendig* für Y (aber nicht hinreichend). Dies wird durch die Replikation $X \leftarrow Y$ ausgedrückt.

1-1-5-3 IDENTITÄT

Auch bei der Identität läst sich die logische Struktur angeben.

1. *Identität*

$X \leftrightarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + – – +

2. *Teilhaftigkeit* (X ist Teil von Y)

$X \rightarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + – + +

3. *Vollständige Nicht-Identität*

$X \rightarrow \neg Y$ Wahrheitsverlauf: – + + + bzw.
$\neg X \leftarrow Y$ Wahrheitsverlauf: – + + +

(Hier wäre ggf. auch $X \leftrightarrow \neg Y$ anzusetzen: Wahrheitsverlauf: – + + –)

1-1-5-4 ZEIT

Zeit ist keine Komponente der Logik, bei logischen Relationen wird gerade von Zeit *abstrahiert*. Dennoch kann man die Logik auf die Zeit anwenden, z. B. von „immer“ auf „manchmal“ schließen, wie später noch gezeigt wird. Aber Zeit ist eine Komponente von *Kausalität*, hier besteht ein *Zeitverlauf*, die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Von daher kann man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i \rightarrow Y/t_j$$

’t’ steht für Zeit, i und j sind bestimmte Werte, wobei: i < j, d. h. der Zeitpunkt i geht dem Zeitpunkt j *voraus*. Die Formel wäre also zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i gültig ist, dann ist Y zum Zeitpunkt t_j gültig’. Aber die Bestimmungen von ‚t’ gehören dabei nicht zur Logik im eigentlichen Sinn.

1-1-5-5 RAUM

Raum ist ebenso wenig wie Zeit eine Komponente der Logik, obwohl sich die Logik auf die Dimension Raum anwenden lässt: Z. B. kann man logisch feststellen, es ist unmöglich, dass etwas *überall* (an *allen* Orten) und *nirgends* (an *keinem* Ort) gilt.

Aber *Kausalbeziehungen* – zwischen materiellen Objekten – sind auf den Raum angewiesen. Bei der eigentlichen *Verursachung* wird Materie, Energie oder Information in der Zeit und *durch den Raum übertragen*.

Auch bei der *Identität* – von materiellen Objekten – spielen *Raum* und *Zeit* eine Rolle. Identität setzt nämlich die *Gleichheit* von Ort und Zeit voraus. Im Grunde kann man ein Objekt nur virtuell von sich selbst unterscheiden.

So könnte man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i,o_i \leftrightarrow Y/t_i,o_i$$

Dabei steht ‘o’ für Ort. Die Formel wäre zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert ist, dann ist Y ebenfalls zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert’ (und umgekehrt). Aber auch hier gilt, dies ist keine rein logische Formel mehr.

1 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

1-2-0 Einführung

1-2-0-1 TERMINOLOGIE

In diesem Kapitel wird die *Quantoren-Logik*, aber auch die mit ihr verbundene *Prädikaten-Logik* dargestellt. Der Terminus *Quantoren-Logik* bezieht sich auf die sogenannten *Quantoren*, das sind Quantitäts-Ausdrücke, in erster Linie:

1. „*alle*“, formal Λ (*All-Quantor* oder *Generalisator*)
2. „*einige*“, formal V (*Partikulär-Quantor* oder *Partikularisator*)

Mit diesen Quantoren werden Relationen bzw. Strukturen oder Sätze gebildet.
Man kann also unterscheiden:

• *All-Relationen (All-Sätze)*

Sie werden mit dem *All-Quantor* Λ gebildet. Λ bedeutet: „für alle gilt“.
Z. B. Λx(Fx): „für alle x gilt, sie haben die Eigenschaft F“. Genauer:
„für alle *Individuen* (individuellen Objekte) x gilt, sie haben die Eigenschaft F“.

• *Partikulär-Relationen (Partikulär-Sätze)*

Partikulär-Strukturen werden mit dem *Partikulär-Quantor* V gebildet.
V bedeutet: „für einige gilt“ oder „für mindestens ein/e/n gilt“.
Z. B. Vx(Fx): „für einige x gilt, sie haben die Eigenschaft F“.
Statt von *Partikulär-Quantor* spricht man häufiger von *Existenz-Quantor* und statt von Partikulär-Strukturen von Existenz-Strukturen bzw. Existenz-Sätzen.
V bedeutet dann: „Es gibt einige ...“ oder „es gibt mindestens ein/e/n ...“
Diese *Existenz-Deutung* ist aber sehr problematisch (wie später noch ausführlich gezeigt werden wird).

1-2-0-2 ABGRENZUNG VON DER AUSSAGEN-LOGIK

Vor allem durch die Unterscheidung von *4* Werten unterscheidet sich die Quantoren-Logik von der *Aussagen-Logik*. Die Aussagen-Logik ist eine 2-wertige Logik. Sie differiert gewissermaßen nur zwischen *alle* (= positiv) und *alle nicht* (= negativ). So gesehen wird in der Aussagen-Logik der All-Quantor *implizit* auch verwendet. Denn es steht:

$X \rightarrow Y$ für „Alle X sind Y“
$\neg(X \rightarrow Y)$ für „Alle X sind nicht Y“

Darauf (und auch auf Probleme bei dieser Bestimmung) werde ich noch eingehen.
In der *Quantoren-Logik* wird dagegen zwischen folgenden 4 Größen unterschieden:

1. *alle* 2. *alle nicht* 3. *einige* 4. *einige nicht*

Zwar wären auch andere Begriffe möglich, z. B. „nicht alle“ statt „einige nicht“ (dazu später).

Es sind also hier zu dem 2 Werten der Aussagen-Logik „alle“ und „alle nicht“ noch die Werte „einige“ und „einige nicht“ hinzugekommen. Entsprechend kann man Sätze/Relationen mit „alle“, „einige“ usw. unterscheiden. Die Aussagen-Logik ist also gewissermaßen Teil (oder ein Grenzfall) der Quantoren-Logik.

Man könnte hier einwenden: Die klassische *Aussagen-Logik* behandelt nur *nicht analysierte* Aussagen (‚A'/‚B'), während die *Quantoren-Logik* sich auf Individuen (x, y) und deren Eigenschaften (F, G) bezieht – und dies sei der wesentliche Unterschied zwischen beiden.

M. E. ist dieser Unterschied aber nicht fundamental – ich habe ja bereits gezeigt, dass sich die aussagen-logischen Relatoren durchaus auch auf Individuen, Mengen bzw. Eigenschaften anwenden lassen. Entscheidend ist viel mehr: bei der Quantoren-Logik liegt eine *mehrwertige* Logik vor, normalerweise eine *4-wertige* Logik. Die Quantoren-Logik kann aber auch 3-wertig sein (vgl. später die *exklusive* Quantoren-Logik).

Der Begriff ‚*Quantoren-Logik*' ist wenig glücklich – genau so, wie der Ausdruck ‚*Aussagen-Logik'* nicht überzeugt. Wesentlich ist, dass bei der Quantoren-Logik normalerweise 4 Größen unterschieden werden; dass diese Unterscheidung mit *Quantoren* geschieht, ist er sekundär. Besser würde man daher den Ausdruck *4-wertige Logik* nutzen. Ich verwende aber dennoch überwiegend den Begriff ‚Quantoren-Logik', weil er eben eingeführt ist.

1-2-0-3 STRUKTUR-EBENEN

Wie die 2-wertige „Aussagen-Logik“ kann sich die 4-wertige Logik („Quantoren-Logik“) prinzipiell auf alle 3 Ebenen bzw. Relationen beziehen. Als Beispiel nehme ich „alle“:

- *Individuen-Relation*: x ist in *allen* Fällen ein F.
- *Klassen-Relation*: *Alle* Elemente von F sind auch Elemente von G.
- *Molekular-Relation*: Wenn die Relation A positiv ist, dann ist in *allen* Fällen bzw. allen Welten auch die Relation B positiv.

Nun ist es aber so, dass in der Quantoren-Logik überwiegend die *Klassen-Relationen* behandelt werden, d. h. Relationen zwischen Klassen F, G usw. (bzw. ihren Elementen, den Individuen). Man kann daher von *Klassen-Logik* sprechen.

1-2-0-4 DARSTELLUNGSFORMEN DER KLASSEN-LOGIK

Um Klassen-Relationen darzustellen, gibt es in der Logik vor allem 3 *Darstellungsmöglichkeiten*. In Klammern nenne ich jeweils die herkömmlichen Bezeichnungen; sie sind wie gesagt nicht sehr sinnvoll, aber da sie eingeführt sind, benutze ich sie auch.

1. *Ganzheits-Darstellung* (‚Mengen-Logik')
   Die Klasse bzw. Menge als ganze wird dargestellt.
2. *Kollektiv-Darstellung (*‚Quantoren-Logik')
   Die Klasse wird durch Quantoren und Individuen dargestellt.
   Man könnte auch von ‚Allgemein-Darstellung' sprechen.
3. *Individual-Darstellung* (‚Prädikaten-Logik')
   Die Klasse wird durch Individuen mit Zahl-Indizes und Relatoren dargestellt.

Genauer:

1. *Ganzheits-Darstellung (Mengen-Logik)*

Die Ganzheitsdarstellung arbeitet mit Mengen-Symbolen wie F, G bzw. Relations-Symbolen aus der *Mengenlehre* wie $\subset$ $\supset$ $\subseteq$ $\not\subset$.

2. *Kollektiv-Darstellung (Quantoren-Logik)*

Die herkömmliche Logik verwendet in erster Linie *Quantoren*, um diese Ausdrücke zu formalisieren, den *All-Quantor* Λ und den sogenannten *Existenz-Quantor* V, außerdem Prädikatoren wie ‚F', ‚G' und Individuenvariablen wie ‚x', ‚y'.

3. *Individual-Darstellung (Prädikaten-Logik)*
Auch der Terminus 'Prädikaten-Logik' ist sehr unglücklich. Ich spreche hier z. B. von Individual-*Darstellung* und nicht von Individual-*Logik*. Denn der Terminus ‚Individual-Logik' bezieht sich nur auf *singuläre* Individuen-Relationen wie Fx. Es geht hier aber um die Individual-Darstellung einer Klassen-Logik, wobei *Zahl-Indizes* verwendet werden, z. B. $Fx_1, \ldots , Fx_n$.

Ich bringe als Beispiel jeweils den Fall „alle".

1. Ganzheits-Darstellung / Mengen-Logik
   $F \subset G$
   Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G.

2. Kollektiv-Darstellung / Quantoren-Logik
   $\Lambda x\ (x \in F \rightarrow x \in G)$
   Alle Elemente der Klasse F sind auch Elemente von G (vereinfacht)

3. Individual-Darstellung / Prädikaten-Logik
   $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$ bzw.
   $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \rightarrow x_2 \in G) \wedge \ldots \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
   Element x_1 der Klasse F ist auch Element von G usw. bis zum Element x_n

Diese Darstellungen haben bei mir folgende Prioritäten:
– *Kollektiv-Darstellung / Quantoren-Logik*:
  sie ist die wichtigste, ich nehme sie als Basis.
– *Individual-Darstellung / Prädikaten-Logik*:
  mit ihr kann man manche Strukturen der Quantoren-Logik besser verdeutlichen, ich verwende sie parallel zur Quantoren-Logik.
– *Ganzheits-Darstellung / Mengen-Logik*:
  sie wird nur eine untergeordnete Rolle spielen (sie wäre auch eher im Rahmen der *Positiv-Implikation* darzustellen, da ⊂ besser *→ entspricht). Ich behandele die Ganzheits-Darstellung nur im folgenden Punkt 1-2-0-5 etwas genauer, die Quantoren-Logik und Prädikaten-Logik werden dagegen in vielen nachfolgenden Punkten ausführlich erläutert.

1-2-0-5 MENGEN-LOGIK / GANZHEITS-DARSTELLUNG

Hier geht es um das Verhältnis zweier Klassen oder Mengen (F, G) als ganzer:

• alle	F ist Teilmenge von G	$F \subset G$
• nicht alle	F ist nicht Teilmenge von G	$F \not\subset G$
• einige	F schneidet G	$F \sqcap G$
• nicht einige	F schneidet nicht G	$F \neg\sqcap G$

Vgl. hierzu auch im Exkurs zu Kap. 0 den 4. Punkt: *Intension versus Extension eines Satzes*.

• alle / F ist Teilmenge von G
(„alle Elemente von F sind Elemente von G", kürzer: „alle F sind G" bzw. „alle Fs sind Gs").
Die übliche Formalisierung $F \subset G$ ist eigentlich unglücklich. Denn die *runden* Symbole werden sonst nur bei *Verknüpfungen* von Mengen wie $F \cap G$ (Schnittmenge) oder $F \cup G$ (Verei-

nigungsmenge) verwendet. Eine *Relation* ist aber wie beschrieben von einer *Verknüpfung* zu unterscheiden, nur eine Relation ist *gültig* oder *ungültig*. Korrekter verwendete man daher ein anderes Zeichen, z. B. schriebe man: $F \sqsubset G$. Aber da $F \subset G$ eingeführt ist, bleibe ich bei dieser Schreibweise.

Genauer unterscheidet man:

– F ist *echte* Teilmenge von G: $F \subset G$
In diesem Fall ist G nicht auch Teilmenge von F, d. h. es gibt mindestens ein Element von G, das nicht Element von F ist: $G \not\subset F$.
Somit gilt auch: $F \subset G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \not\subset F$. Oder: $F \subset G \Rightarrow G \not\subset F$
Man hier auch von *exklusiver* Teilmenge sprechen, weil *ausgeschlossen* ist, dass gilt: F = G

– F ist (*unechte*) Teilmenge von G: $F \subseteq G$
$F \subseteq G$ bedeutet: $F \subset G \vee F = G$
F ist gleich G, F = G, setzt voraus, dass G auch (unechte) Teilmenge von F ist: $G \subseteq F$.
Es gilt also: $(F \subseteq G \wedge G \subseteq F) \Leftrightarrow (F = G)$
Man kann hier auch von *inklusiver* Teilmenge sprechen, da $F \subseteq G$ (die Möglichkeit) einschließt, dass F = G.
Wenn ich nicht genauer differenzieren will, verwende ich aber das einfachere $F \subset G$.

Es gibt auch eine Möglichkeit, solche Relationen zu kennzeichnen, ohne auf Mengen-*Relatoren* wie $\subset$ oder $\subseteq$ Bezug zu nehmen. Z. B. kann man für $F \subset G$ auch sagen: die Menge (+F,–G) ist leer, formal könnte man schreiben: $M(+F,-G) = \varnothing$. Ich verwende hier zur Kennzeichnung von Mengen +/–. Die Menge M(+F,–G) ist die Menge aller Objekte, die Element von F, aber nicht von G sind. Man kann auch mit *Differenzmengen* („die Differenzmenge F \ G ist leer“), *Ergänzungsmengen* usw. arbeiten, aber das ist komplizierter.

- nicht alle = einige nicht / F ist nicht Teilmenge von G

Hier gilt Entsprechendes: Korrekter wäre ein *eckiges* Symbol. Man schreibt aber: $F \not\subset G$.
Allerdings ist dabei eine wichtige Unterscheidung zu treffen:

– *übliche* Deutung von $F \not\subset G$: nicht alle = einige nicht
„einige F sind nicht G“ bzw. „mindestens ein Element von F ist nicht Element von G“.
Bei dieser Deutung ist über G damit noch nichts festgelegt: Es können alle Elemente von G, einige oder kein Element von G auch Elemente von F sein.

– *konsequentere* Deutung von $F \not\subset G$: alle nicht = nicht einige
„Alle F sind nicht G“ bzw. „kein Element von F ist Element von G“.
Diese Deutung würde zu einer *systematischeren* Verwendung der Symbole führen. Denn es ist wenig plausibel, dass es ein Symbol gibt für „einige nicht“: $F \not\subset G$, aber kein etabliertes Symbol für „einige. Das Problem hätte man nicht, wenn man unterscheiden würde: „alle“ steht für $\subset$ und „alle nicht“ steht für $\not\subset$.

Dies entspräche auch besser der Konzeption der Mengenlehre, die m. E., entsprechend der *Aussagen-Logik*, eigentlich *2-wertig* aufgebaut ist. Zwar kann man die Mengen-Logik erweitern (entsprechend der Quantoren-Logik), indem man „einige“ und „einige nicht“ hinzunimmt, aber dann sollte dies systematisch und mit sich entsprechenden Symbolen geschehen.

Dennoch, da es auch problematisch ist, von etablierten Interpretationen abzugehen, halte ich mich auch wieder an die eingeführte, übliche Deutung, also: $F \not\subset G$ bedeutet „*einige* F sind nicht G“.

- einige / F schneidet G

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen $\sqcap$, also $F \sqcap G$. Denn $\cap$ ist schon vergeben für die Verknüpfung „Schnittmenge“. $F \sqcap G$ darf also nicht verwechselt werden mit $F \cap G$

für „die Schnitt-Menge F $\cap$ G". Bei F $\sqcap$ G besteht eine *Relation*, bei F $\cap$ G wird nur eine *Menge* genannt. Es ist bezeichnend, dass es hier kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein Relator findet, der „einige F sind G" ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre für das entsprechende „F schneidet G".

Man kann „F schneidet G" *inklusiv* oder *exklusiv* verstehen. Inklusiv bedeutet: „*mindestens* einige F sind G", es können aber auch *alle* sein. Exklusiv bedeutet: „*genau* einige F sind G" (also nicht alle F). Wenn einige F auch G sind, dann sind umgekehrt einige G auch F (wobei man auch hier wieder zwischen inklusiv und exklusiv unterscheiden könnte).

Exklusiv könnte man schreiben F $\sqcap^E$ G. Die exklusive Form ist die wichtigere, sie wird graphisch gerne durch die *überlappenden Kreise* dargestellt.

Auch hier ist es möglich, auf die *Relatoren* zu verzichten. Indem man nämlich angibt, die *Schnitt-Menge* von F und G ist gefüllt bzw. ist nicht leer. Man würde dann formal schreiben:

F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G $\neq \varnothing$ (somit ist eine Relation formuliert).Die *leere Menge* symbolisiert man durch $\varnothing$ oder { }. Für das exklusive F $\sqcap^E$ G muss man aber hinzufügen:

$F \setminus G = \varnothing \;\wedge\; G \setminus F = \varnothing$

- nicht einige = alle nicht / F schneidet nicht G

„F schneidet nicht G" ist die Verneinung von „F schneidet G", sowie „nicht einige F sind G" die Verneinung von „einige F sind G" ist. Für diese Relation gibt es leider kein vorgegebenes Symbol; in Anlehnung an $\sqcap$ verwende ich $\neg\sqcap$, also mit davor geschriebenem *Negator*. Für „F schneidet nicht G'", also: F $\neg\sqcap$ G. (Dagegen wäre F $\sqcap\neg$ G etwas missverständlich, es könnte verstanden werden, als schneide F die Ergänzungsmenge von G, dies schließt aber nicht aus, dass es G schneidet).

F $\neg\sqcap$ G heißt „alle Elemente von F sind nicht Elemente von G". Daraus folgt aber: „alle Elemente von G sind nicht Elemente von F". $\sqcap$ und entsprechend $\neg\sqcap$ sind *symmetrische* Relatoren. D. h. es gilt: $F \sqcap G \Leftrightarrow G \sqcap F$ bzw. $F \neg\sqcap G \Leftrightarrow G \neg\sqcap F$

Auch hier kann man statt Relatoren *Verknüpfungsoperatoren* ($\cap$) verwenden. Indem man nämlich angibt: „die Schnittmenge von F und G ist leer". Man würde dann formal schreiben:

F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G = $\varnothing$ (somit ist indirekt wiederum eine Relation formuliert).

1-2-1 Implikation

Hier geht es nicht nur um die Verwendung der Implikation $\rightarrow$, sondern generell um *Kopula*-Strukturen der Form: X ist (ein) Y, wobei *einfache* und *komplexe* Relationen vorkommen.

1-2-1-1 EINFACHE UND KOMPLEXE RELATIONEN

Man kann *einfache* = atomare und *komplexe* = molekulare *Relationen* bzw. *Strukturen* bzw. *Aussagen* bzw. *Sätze* (ich wechsle diese Begriffe ab) unterscheiden:

- *einfache Relationen* (atomar)

  In einfachen Relationen kommt nur *ein* Prädikator (F) vor. Also z. B.:

  Λx(Fx) oder Vx$\neg$(Fx).

  Man schreibt den Prädikatausdruck mit implizitem Relator Fx (gemischt extensional-intensional) oder x $\in$ F (extensional); so wird der Aussage nur *ein* Wert zugeordnet,

wahr oder falsch. Im Sinne einer einheitlichen, *funktionalen* Logik würde man allerdings die Implikation bzw. (Positiv-Implikation) einsetzen. Man schriebe also:
$\Lambda x(x \rightarrow F)$ oder $Vx\neg(x \rightarrow F)$.
Hier wird dann der (Wahrheits-)Wert von $x \rightarrow F$ als *Funktion* der Werte für x und für F ermittelt.

- *komplexe Relationen* (molekular)
  Bei komplexen Strukturen kommen 2 oder mehr *Prädikatoren* (F, G. usw.) vor. Die einzelnen Prädikate werden meist durch Implikation →, aber auch Konjunktion o. a. verbunden.
  Implikation, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, Konjunktion z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$.
  Wie ich allerdings nachher zeigen werde, ist die *Positiv-Implikation* überlegen.
  Höher-komplex sind Relationen, bei denen zwei oder mehr *Individuen-Variablen* x, y verwendet werden, es handelt sich um *mehr-stellige* Prädikate, z. B.:
  $\Lambda x\Lambda y(F(x,y))$: für alle x, alle y gilt: x steht zu y in der Relation F.
  $\Lambda xVy(F(x,y))$: für alle x gilt, es gibt mindesten ein y, so dass x zu y in der Relation F steht.

Prädikaten-Logik
Die *Quantoren-Logik* setzt die *Prädikaten-Logik* voraus. Der Begriff ‚Prädikaten-Logik' rührt daher, dass man hier nicht mehr Aussagen *als ganze* betrachtet, sondern sie zerlegt in *Subjekt* und *Prädikat* bzw. in Individuatoren und Prädikatoren. Der Begriff ist aber unglücklich, denn es geht darum, dass hier *Individuen* Eigenschaften zugeordnet werden bzw. ihnen das Enthaltensein in einer Klasse zugesprochen wird. Man spräche besser von ‚*Individuen-Logik'* bzw. von ‚Individual-Darstellung der Klassen-Logik'. Ich verwende aber vorwiegend die eingeführte Bezeichnung ‚Prädikaten-Logik'.

Zum *Verhältnis von Quantoren- und Prädikaten-Logik*: Man kann einerseits die Quantoren-Logik als aussagestärker ansehen, quasi als Prädikaten-Logik + Quantoren. Wenn man aber in der Prädikaten-Logik anstatt Quantoren *Zahl-Indizes* (1, 2, n) verwendet, so erhält man *implizit* mehr Präzision als in der Quantoren-Logik. Man könnte das auch so deuten, dass die Quantoren-Logik *Mengen*, die Prädikaten-Logik aber *Folgen* (geordnete Mengen) behandelt.

Quantoren-logische und prädikaten-logische Formeln lassen sich als logisch *äquivalent* (⇔) interpretieren. Aber es dürfte präziser sein, hier von *Definitionen* auszugehen. Für 'ist definiert' kann man schreiben: ‚$=_{df}$' (oder auch ‚$\leftrightarrow_{df}$').

So kann man die quantoren-logische All-Relation wie folgt in Prädikaten-Logik übersetzen:

- *Einfache Relation*
  $\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge ... \wedge Fx_n$
- *Komplexe Relation*
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) =_{df} (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Man könnte jetzt nach der Wahrheitstafel genau die Wahrheitsbedingungen angeben (vgl. später). Der Gesamtsatz $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ ist demnach *auch* wahr, wenn gilt:

$$(\neg Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (\neg Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (\neg Fx_n \wedge \neg Gx_n)$$

D. h. es muss gar kein x geben, dass die Eigenschaft F (und G) besitzt.

Man beachte die graphische *Ähnlichkeit* von *Quantoren* und *Junktoren:* V und ∨, Λ und ∧. Diese Ähnlichkeit ist natürlich gewollt. Denn der All-Quantor Λ wird prädikaten-logisch durch die *Konjunktion* ∧ ausgedrückt, der *Partikulär-Quantor* V dagegen durch die Disjunktion $\vee$. Die Ähnlichkeit zeigt sich allerdings nicht, wenn man die gebräuchlichsten Symbole verwendet. Denn die häufigsten Symbole sind:

$\forall$ für den All-Quantor

$\exists$ für den Existenz-Quantor (Partikulär-Quantor).

1-2-1-2 EINFACHE RELATIONEN

Zunächst eine Übersicht über die beiden positiven Relationen $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$:

• *All-Relationen (bzw. All-Sätze)*

Alle x sind F

- Intensional
  formal: $\Lambda x(Fx)$
  „Für alle x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F"
- Extensional
  formal: $\Lambda x(x \in F)$
  „Für alle x gilt: sie sind Elemente der *Klasse* F"
- Funktional (einheitliche Logik)
  formal: $\Lambda x(x \rightarrow F)$
  „Für alle x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist auch F belegt"

• *Partikulär-Relationen (bzw. Partikulär-Sätze)*

einige x sind F

- Intensional
  formal: $Vx(Fx)$
  „Für einige x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F"
- Extensional
  formal: $Vx(x \in F)$
  „Für einige x gilt, sie sind Elemente der *Klasse* F"
- Funktional (einheitliche Logik)
  formal: $Vx(x\rightarrow F)$
  „Für einige x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist auch F belegt"

Was hier als „*intensional*" angegeben ist, müsste genauer als „*gemischt extensional-intensional*" gekennzeichnet werden (vgl. 0-3-5); aber ich verwende hier der Einfachheit halber nur die Kennzeichnung „intensional".

Gemäß der Devise der *Integral-Logik*, möglichst *einfache Formalisierungen* zu verwenden, schreibe ich:

Normal	Vereinfacht
$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda(X)$
$Vx(Fx)$	$V(X)$
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Lambda(X \rightarrow Y)$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$V(X \rightarrow Y)$

Nur bei bestimmten komplexen Aussagen muss man *Individuenvariablen* verwenden und die *Klassenzeichen* ‚F' und ‚G' verwenden. Dennoch werde ich generell neben der vereinfachten immer auch wieder die herkömmliche Formalisierung heranziehen.

Übersicht über alle 4 Strukturen der Quantoren-Logik, auch in Prädikaten-Logik

	Intensional	Extensional	Kurz-Form
1. alle x sind F			
Quantoren-Logik:	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n$	$x_1 \in F \wedge ... \wedge x_n \in F$	$X_1 \wedge ... \wedge X_n$
2. alle x sind nicht F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \wedge ... \wedge x_n \notin F$	$\neg X_1 \wedge ... \wedge \neg X_n$
3. einige x sind F			
Quantoren-Logik:	$Vx(Fx)$	$Vx(x \in F)$	$V(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \vee ... \vee Fx_n$	$x_1 \in F \vee ... \vee x_n \in F$	$X_1 \vee ... \vee X_n$
4. einige x sind $\neg F$			
Quantoren-Logik:	$Vx\neg(Fx)$	$Vx(x \notin F)$	$V\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \vee ... \vee \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \vee ... \vee x_n \notin F$	$\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_n$

Für "alle x gilt: sie sind nicht Elemente von F" könnte man auch $\Lambda x\neg(x \in F)$ statt $\Lambda x(x \notin F)$ schreiben – und entsprechend.

1-2-1-3 KOMPLEXE RELATIONEN

• *All-Strukturen (All-Sätze)*
alle x, die F sind, sind auch G (kurz: alle F sind G)
- intensional
  formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  „Für alle x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, haben sie auch die Eigenschaft G"
- extensional
  formal: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
  „Für alle x gilt: wenn sie Elemente der Klasse F sind, sind sie auch Elemente von G"
- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $\Lambda x((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  "Für alle x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G"

Die Negationen sind keineswegs trivial: z. B. wäre zwischen $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$ oder $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ zu wählen (vgl. dazu die spätere Diskussion).

• *Partikulär-Strukturen (Partikulär-Sätze)*
einige x, die F sind, sind auch G / bzw.: *es gibt* einige x ... (kurz: einige F sind G)
- intensional
  formal: $Vx(Fx \wedge Gx)$
  „Es gibt einige x, für die gilt: sie besitzen die Eigenschaft F und die Eigenschaft G"
- extensional
  formal: $Vx(x \in F \wedge x \in G)$

„Es gibt einige x, für die gilt: sie sind Elemente der Klasse F und Elemente der Klasse G“

- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $Vx((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  “Für einige x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G“

Die obigen Formalisierungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ für komplexe Strukturen sind die gängigsten. Danach werden *All-Relationen* mit dem *Implikator* $\rightarrow$ und *Partikulär-Relationen* mit dem *Konjunktor* $\wedge$ geschrieben (zur Kritik vgl. u. a.1-2-1-5, 1-2-3).

1-2-1-4 WAHRHEITS-TAFELN

Wie überprüft man die *Wahrheitsbedingungen* einer quantoren-logischen Relation? Der sicherste Weg wäre die *Wahrheitstafel*. Die Frage ist aber: Lassen sich in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufstellen? Damit verbunden: Sind quantoren-logische Relationen streng *wahrheitswert-funktional*?

Ich werde nachfolgend die verschiedenen Möglichkeiten durchspielen, vor allem für Experten. Eins ist aber klar: Es lassen sich für *quantoren-logische* Relationen nicht so einfach Wahrheitstafeln aufstellen wie für *aussagen-logische*. Ich werde mich hier zur Demonstration auf $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ beschränken, für $Vx(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ ergäben sich grundsätzlich ähnliche, aber durchaus auch abweichende Ergebnisse.

• aussagen-logische Tafel

Zunächst ist es nicht ersichtlich, wie man $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ eine Wahrheitstafel zuordnen will, und es wird von anderen Autoren auch behauptet, dass dies nicht geht.

In meinem Modell könnte man fordern, dass die Wahrheitstafel von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ mit der *aussagen-logischen* Tafel von $X \rightarrow Y$ (bzw. $F \rightarrow G$) identisch sein müsste, weil hier ja behauptet wurde, dass das aussagen-logische $X \rightarrow Y$ dem quantoren-logischen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ entspricht. Dies gelingt aber nicht so einfach; das liegt u. a. daran, dass $X \rightarrow Y$ quantitativ dem besonderen Fall $p(X \rightarrow Y) = 1/1$ entspricht, wie noch gezeigt werden wird. Außerdem ist die in der Wahrheitstafel benötigte *Negation* von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, also $\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, aussagen-logisch nicht darzustellen; dort ist nur, übertragen, $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$ möglich.

• einfache quantoren-logische Tafel

Eine Möglichkeit, dennoch eine Wahrheitstafel aufzustellen wäre die folgende: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ lässt sich zerlegen in $(Fx \rightarrow Gx)$ und Λx, also in: „Fx impliziert Gx“ und „das gilt für alle x“. Wie könnte eine entsprechende Wahrheitstafel aussehen? Zwei Möglichkeiten:

(*Tafel 1*)

Fx	$\rightarrow$	Gx	$\wedge$	Λx
+	+	+		
+	−	−		
−	+	+		
−	+	−		

(*Tafel 2*)

Λx	(Fx	$\rightarrow$	Gx)	$\wedge$	
+		+		+	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
+		−		−	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
−		+		−	$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
−		−		−	$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Tafel 1 wird nur angedeutet; sie müsste real nicht 4, sondern 8 Zeilen haben, weil Λx als zusätzliche, *unabhängige Variable* eingeführt würde, die durch *Konjunktion* verbunden ist.

Oder man verwendete die verkürzte Fassung, Tafel 2: Es ergäbe sich eine *Konjunktion*: $\Lambda x(Fx \to Gx)$ wäre nur wahr, wenn die Relation $Fx \to Gx$ gilt *und* wenn sie für *alle* x gilt.

Aus komplizierten Gründen, die ich hier nicht ausführen möchte, überzeugt diese Lösung aber auch nicht und braucht daher nicht weiter verfolgt zu werden.

- *komplexe quantoren-logische Tafel*

Die obigen Ansätze führen nicht wirklich weiter. Es ließe sich aber sehr gut eine Wahrheitstafel aufstellen, wenn man $\Lambda x(Fx \to Gx)$ umformte in $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$. Dann ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$\to$	$\Lambda x(Gx)$	*(Tafel 3)*
+	+	+	
+	−	−	
−	+	+	
−	+	−	

Hier lässt sich z. B. schließen: $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$

Aber sind $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$ gleichzusetzen, sind sie logisch äquivalent? Man kann diese Aussagen folgendermaßen übersetzen (andere Übersetzungen sind möglich):

$\Lambda x(Fx \to Gx)$: „Für alle x gilt: wenn sie F sind, dann sind sie auch G“

$\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$: „Wenn für alle x gilt, sie sind F, dann gilt für alle x auch, sie sind G“.

Die verschiedenen Möglichkeiten zur *Überprüfung auf Äquivalenz* sind kompliziert und sollen an dieser Stelle nicht vollzogen werden. Das Ergebnis ist nicht ganz eindeutig, aber offensichtlich liegt *keine Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ vor, denn es gilt nur $\Rightarrow$:

$\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$, vgl. unten die prädikaten-logische Analyse.

Wir wollen dennoch mit $\Lambda x(Fx \to Gx)$ weiterarbeiten, da uns dieser Ausdruck vor allem interessiert, denn so formalisiert man normalerweise All-Sätze. Allerdings ist es problematisch, $\Lambda x(Fx \to Gx)$ in der Wahrheitstafel auf $\Lambda x(Fx)$ und $\Lambda x(Gx)$ zurückzuführen.

Dazu wählen wir aber besser eine *andere*, schon eingeführte Form der Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$	*(Tafel 4)*
1.	+	+	+	
2.	+	−	−	
3.	−	+	+	
4.	−	−	+	

Die 4 Zeilen sind in einem ersten Schritt – konjunktiv – wie folgt zu deuten (das – in der Wahrheitstafel wird hier durch den Negator $\neg$ ersetzt):

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x\neg(Fx \to Gx)$
3. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
4. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$

Man könnte fragen, ob man z. B. in der 1. Zeile als Prämisse anstatt $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx)$ zusammenfassend $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$ usw. schreiben könnte. Dies ist möglich, denn diese beiden Ausdrücke sind in der Tat vollständig *äquivalent*.

Da es sich aber um eine *quantoren-logische* Wahrheitstafel lautet, ist es adäquater, für + das Zeichen Λ und für – das Zeichen $\neg\Lambda$ einzusetzen (käme der Partikulär-Quantor V vor, würde man den in der Wahrheitstafel einsetzen). Somit ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	*(Tafel 5)*
1.	Λ	Λ	Λ	
2.	Λ	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	
3.	$\neg\Lambda$	Λ	Λ	
4.	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	Λ	

Die 4 Zeilen der Wahrheitstafel 5 werden primär folgendermaßen interpretiert:

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
3. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Zwischen Tafel 4 und Tafel 5 bestehen folgende Unterschiede:

In Tafel 5 wird Λ durch $\neg\Lambda$ negiert (*kontradiktorische* Negation), und das ist die primäre, korrekte *quantoren-logische Negation*. In diesem Fall besteht aber in der 4. Zeile nur ein *semi-analytischer*, d. h. *partieller* Schluss; bei der obigen konjunktiven Interpretation der *Wahrheitstafel* verlangt man jedoch für *alle* Zeilen *strenge* Schlüsse der Form $\Phi \Rightarrow \Psi$.

In Tafel 4 wurde Λ (entsprechend +) durch $\Lambda\neg$ (entsprechend –) negiert (*konträre* Negation). Das entspricht der *Aussagen-Logik*. Hier gelten in allen 4 Zeilen *strenge* Schlüsse.

Die Frage ist, ob man daraus folgenden Schluss ziehen könnte (wie ich das ursprünglich für richtig hielt): Dass nämlich die Wahrheitstafel im engeren Sinn nicht für die *Quantoren-Logik*, sondern nur für die *Aussagen-Logik* konzipiert ist und nur dort volle Gültigkeit erreicht. Das hieße aber auch, dass der *wahrheitswert-funktionale* Ansatz quantoren-logisch nur bedingt verwendbar ist; nicht bei Sätzen mit mehrfachem $\neg\Lambda$ (entsprechend V oder V$\neg$).

Nun zeigt sich aber, wenn man den alternativen Ausdruck $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ verwendet, sind alle Zeilen der Wahrheitstafel korrekt, auch die letzte (4.). Hier gilt der *strenge* Schluss:

$$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$$

D. h. aber, wenn die *Prämissen* ganz *genau* der *Konklusion* entsprechen, erhält man vollständig richtige Resultate. Wie Wahrheitstafel ist also offensichtlich doch in der Quantoren-Logik ohne Einschränkungen einzusetzen.

• *prädikaten-logische Analyse*

Die beste Möglichkeit, in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufzustellen, ist aber, auf die *Prädikaten-Logik* zurückzugreifen, den *quantoren-logischen* in einen *prädikaten-logischen* Ausdruck übersetzen: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$.

Eine *vollständige* Wahrheitstafel lässt sich hier zwar normalerweise nicht aufstellen (weil n dafür zu groß oder sogar unendlich groß ist), aber um nur die Wahrheits-*Struktur* der Relation zu erkennen genügt es, von n = 2 auszugehen, also von: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$.

Wir können *prädikaten-logisch* jetzt auch nachweisen, dass die 4. Zeile in der obigen Wahrheitstafel kein *strenger* Schluss ist. Ich will allerdings nicht die gesamte Wahrheitstafel darstellen, sondern nur den entscheidender Werteverlauf (für n = 2):

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$
Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$): + + + + + + – – + – + – + + + +

Dagegen ergibt sich für $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ ein strenger Schluss:

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \;\Rightarrow\; \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$

Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \;\wedge\; \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \;\Rightarrow\; (Fx_1 \wedge Fx_2) \;\rightarrow (Gx_1 \wedge Gx_2)$

Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\Rightarrow$): + + + + + + + + + + + + + + + +

Abschließend hierzu sei an einer Wahrheitstafel gezeigt, dass tatsächlich gilt:

Quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \;\Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$

Prädikaten-logisch (n = 2): $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \;\wedge\; (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2) \;\rightarrow (Gx_1 \wedge Gx_2)$.

Die Wahrheitstafel zur besseren Übersicht in *Tabellenform*, wiederum limitiert auf n = 2.

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−	−
3	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	+
4	+	−	−	−	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
5	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	+	+	−	−
11	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+
12	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−
13	−	+	+	+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+
14	−	+	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−	−	−

Die Prädikaten-Logik lässt sich *strukturell* weitgehend auf die Aussagen-Logik reduzieren. Daher kann man für $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \;\wedge\; (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$ strukturell äquivalent auch schreiben (ohne Prädikatoren und Individuen-Zeichen): $(X_1 \rightarrow Y_1) \;\wedge\; (X_2 \rightarrow Y_2)$. Oder noch einfacher, *rein aussagen-logisch*: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$.

Allerdings gibt es *keine vollständige strukturelle Reduzierbarkeit* von *Prädikaten-Logik* auf *Aussagen-Logik*. Denn mit den *Indizes* 1, 2, ... , n kann man *explizit* „alle“ und vor allem auch „einige“ ausdrücken, was in der reinen Aussagen-Logik nicht möglich ist.

1-2-1-5 EXISTENZ-PROBLEM

Bei der obigen Formalisierung stellt sich das *Existenz-Problem*, und zwar in doppelter Weise:

Erstens, wir kennen es bereits von der *Implikation* in der *Aussagen-Logik*: Die Implikation ist auch dann gültig, wenn ihr Vorderglied nicht gültig (falsch) ist.

Das bedeutet hier in der *Quantoren-Logik*: Der *All-Satz* $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ ist auch wahr, wenn $\Lambda x(Fx)$ falsch ist. Es geht um die *konträre* Negation $\Lambda x\neg(Fx)$, nicht um die *kontradiktorische* Negation $\neg\Lambda x(Fx)$. $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Im Beispiel: Der Satz $\Lambda x(\text{Mensch } x \rightarrow \text{ sterblich } x)$ – ‘alle Menschen sind sterblich’ – ist auch dann wahr, wenn es gar keinen Menschen gibt: $\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Zweitens, noch komplizierter wird die Sache aber dadurch, dass vielfach behauptet wird, *Partikulär*-Sätze beinhalteten sehr wohl eine *Existenz-Behauptung*, anders als *All*-Sätze. Denn ein Satz wie z. B. ‘einige Lehrer sind klug’ gilt nur als wahr, wenn es auch Lehrer gibt.

Zugespitzt, nach der üblichen Darstellung der Quantoren-Logik gilt:
- ‚Alle Lehrer sind klug': setzt *keine* Existenz von Lehrern voraus.
- ‚Einige Lehrer sind klug': setzt die Existenz von Lehrern voraus.
Um das zu betonen, formuliert man: ‚*Es gibt* einige Lehrer, die klug sind'.

Diese behauptete *Existenz-Asymmetrie* von All- und Partikulär-Sätzen ist m. E. zu kritisieren. Es ist schon problematisch, wenn die Implikation so interpretiert wird, dass sie auch wahr ist, wenn der Vordersatz falsch ist. Dass dies aber auch bei einem All-Satz gelten soll, widerspricht völlig unserer Intuition und dem normalsprachlichen Gebrauch von All-Sätzen (eine mögliche Lösung ist die Positiv-Implikation, vgl. später). Gar nicht einzusehen ist aber zunächst die *Asymmetrie*, dass Sätze mit „einige" die Existenz voraussetzen sollen. Einige wichtige Punkte hierzu werden nachfolgend diskutiert.

- „Alle" entspricht 100%, es ist eine *relative Größe*. „Einige" kann aber in der normalen Sprache sowohl eine *absolute* wie eine *relative* Größe sein. Quantitativ kann „einige" sowohl 0 wie 0 % bedeuten (was äquivalent ist). Der Unterschied zeigt sich z. B. wie folgt: Man kann sagen: „Es gibt *einige* Lehrer, die klug sind". Man kann aber nicht sagen: „Es gibt *alle* Lehrer, die klug sind". Solche Zufälligkeiten der normalen (deutschen) Sprache dürfen aber nicht dazu dienen, eine folgenschwere Unterscheidung in der Logik zu treffen.
- Ein wesentlicher Schluss in der Quantoren-Logik ist der *Schluss von „alle" auf „einige"*: was für alle x gilt, soll auch für (mindestens) einige x gelten. Setzt man bei Partikulär-Sätzen Existenz voraus, bei All-Sätzen aber nicht, dann ist dieser zentrale Schluss ungültig.
- Ein große Rolle spielt dabei, dass man üblicherweise *All-Sätze* mit der *Implikation* $\rightarrow$ formalisiert werden, z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, und *Partikulär-Sätze* mit der *Konjunktion* $\wedge$, z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$, eine unterschiedliche Strukturierung, die sehr problematisch ist. Denn die Konjunktion setzt, anders als die Implikation, die Wahrheit / Existenz beider Glieder voraus.

Die Existenz-Problematik wird vor allem in 1-2-3 weiter ausführlich diskutiert werden.

1-2-2 Positiv-Implikation

Eine mögliche *Lösung des Existenz-Problems* ist, dass man die *Positiv-Implikation* verwendet, und zwar sowohl bei den All-Relationen wie bei den Partikulär-Relationen.

1-2-2-1 ALLGEMEIN

Das Problem mit der Implikation $X \rightarrow Y$, dass sie bei falschem Vordersatz ($\neg X$) als wahr gilt, ist letztlich unabhängig von All-Sätzen- und Partikulär-Sätzen.

Und ich habe schon hingewiesen, dass man dieses Problem der Implikation $X \rightarrow Y$ vermeiden kann, wenn man die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ verwendet. Denn die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen der Vordersatz X wahr ist.

1-2-2-2 ALL-RELATIONEN

Bei All-Relationen bzw. All-Sätzen ergeben sich wichtige Änderungen durch die Ersetzung der Implikation durch die *Positiv-Implikation*, konkret für den All-Satz $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$:

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$$

Wenn die Einzelsätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ falsch sind, dann ist der obige Satz *nicht definiert*. Umgekehrt, wenn $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$ wahr ist, müssen alle Einzel-Sätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ wahr sein; eventuell muss auch nur $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ wahr sein (das wird im quantitativen

Teil diskutiert). Somit enthält $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$ jedenfalls eine *Existenz-Behauptung*, es wird ausgesagt, dass F existiert, dass die Klasse F nicht leer ist; dies gilt ebenso für die Klasse G.

1-2-2-3 PARTIKULÄR-RELATIONEN

Man kann den *Partikulär-Satz* ebenfalls unproblematisch mit dem Positiv-Implikator formalisieren: $Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$. Daraus folgt: $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ müssen wahr sein, d. h. es reicht, dass *einer* von diesen Sätzen wahr ist, und das wird ja genau durch 'mindestens einer' ausgedrückt. Auch hier besteht eine *Existenz-Garantie*: Die Klasse F ist „gefüllt", sie hat mindestens 1 Element. Somit ist die gewünschte *Symmetrie* zu All-Sätzen gegeben.

1-2-2-4 NEGATIONEN

Wie ist ein negierter Satz der Form $\neg X *\!\!\rightarrow Y$ zu interpretieren? Ich habe erläutert, die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) gültig bzw. wahr ist. Das ist hier folgendermaßen zu verstehen: $\neg X$ muss wahr sein, also muss X falsch sein. Es werden also nur die Welten berücksichtigt, in denen $\neg X$ wahr ist.

Entsprechend bedeutet das für All- und Partikulär-Sätze:
Bei $\Lambda x(\neg Fx *\!\!\rightarrow Gx)$ muss $\neg F$ wahr sein, F also falsch. Bei $Vx(\neg Fx *\!\!\rightarrow Gx)$ gilt dasselbe.

1-2-2-5 MODELL POSITIV-IMPLIKATION

Nachfolgend wird ein erweitertes Modell der Positiv-Implikation vorgestellt.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

1-2-3 Systematik

Man kann die *Quantoren* natürlich auch auf andere Relationen anwenden, z. B. auf die *Disjunktion* $Vx(Fx \vee Gx)$, auf $\Lambda\neg(Fx \mid Gx)$ usw. Aber das wichtigste ist die *Kopula*-Funktion, die überwiegend mittels der *Implikation* oder auch mittels der *Konjunktion* realisiert wird.

Und hierfür werde ich jetzt verschiedene Modelle vorführen und diskutieren (wobei ich die *gemischt extensional-intensionale* Form wähle, also z. B. ‚Fx' und nicht ‚$x \in F$' schreibe).

1-2-3-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

Ein besonders *systematisches* Modell ist das folgende: dabei werden *alle* Strukturen mit der *Implikation* formalisiert; die *Negation der Implikation* wird durch Setzung des Negators ¬ vor der Klammer vorgenommen.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Diskussion

Hier ergeben sich folgende Verhältnisse:

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ setzt keine Existenz von F voraus.
- $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur ist äquivalent mit $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$.
  Das wird später genauer erläutert. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide (alle) Glieder wahr sind. Insofern wird die Existenz von F vorausgesetzt (aber nicht von G).
- $Vx(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur setzt wiederum keine Existenz voraus.
- $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$ ist äquivalent der Konjunktion $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$. Somit wird hier wieder die Existenz von F vorausgesetzt.

Dieses Ergebnis ist unbefriedigend. Es ist wenig plausibel, dass gelten soll:
„Alle F sind G“ impliziert nicht die Existenz von F. Aber:
„Alle F sind nicht G“ impliziert die Existenz von F.
(Entsprechendes gilt bei den partikulären Strukturen.) Auch dieses fast paradoxe Ergebnis geht auf die Definition der Implikation zurück.

1-2-3-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\bigvee x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell bietet sich zunächst einmal an, weil es ebenfalls sehr systematisch ist. Es wird immer *derselbe Relator*, der Implikator $\rightarrow$ verwendet. Aber man stößt wie schon angedeutet auf das *Existenz-Problem*, hier allerdings gleichermaßen für All-Relationen und Partikulär-Relationen, für beide wird *keine Existenz-Behauptung* aufgestellt.

1-2-3-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\bigwedge x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\bigwedge x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\bigvee x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\bigvee x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Bei diesem Modell gibt es *bei allen 4 Fällen* eine Existenz-Behauptung (für F).
Das Modell ist aber sehr unplausibel. So würde „alle F sind G“ übersetzt als „alle x sind F und G“. Im Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“ würde übersetzt in: „Alle Objekte sind Menschen und sterblich“. Das wäre absurd, denn dann wären ja alle Dinge auf der Welt sterbliche Menschen.

1-2-3-4 MODELL 4: IMPLIKATION UND KONJUNKTION

Dieses Modell ist das am weitesten verbreitetste. Danach werden All-Sätze und Partikulär-Sätze unterschiedlich formalisiert, *All-Sätze mit Implikation* und *Partikulär-Sätze mit Konjunktion*.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\bigwedge x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\bigwedge x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Hier ergibt sich das anfangs genannte Ergebnis. Die *All-Strukturen* behaupten *keine Existenz*, die *Partikulär-Strukturen* dagegen *ja*. Wie ich erläutert habe, ist das wenig überzeugend.

1-2-3-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell ist ohne Zweifel das überzeugendste und eleganteste: es ist systematisch, macht bei All-Sätzen wie Partikulär-Sätzen eine *Existenz-Behauptung*, und es erfüllt – wie später gezeigt werden wird – auch die gewünschten *analytischen Relationen*. Man könnte dem Modell allenfalls vorwerfen (wie überhaupt der Positiv-Implikation), dass es nicht *alle möglichen Welten* mit einbezieht.

1-2-4 Inklusiv / Exklusiv

1-2-4-1 DEFINITION
Ich habe die Unterscheidung von *inklusiv* vs. *exklusiv* (*einschließend* vs. *ausschließend*) schon eingeführt, aber bezogen auf die *oder*-Relation. Es wurde unterschieden zwischen:
- der *Disjunktion* $\vee$ als inklusivem „oder“
- der *Kontravalenz* >< als exklusivem „oder“

Daneben gibt es wie beschrieben die sogenannte Exklusion | (X | Y), die hier aber außen vor bleibt.

Die Disjunktion $X \vee Y$ heißt *inklusiv*, weil sie die Möglichkeit *einschließt*, dass auch X und Y beide gültig sind (also $X \wedge Y$ gültig ist). Das *exklusive* „entweder – oder“ *schließt* $X \wedge Y$ dagegen *aus*, es kann nur *entweder* X *oder* Y gültig sein.

Entsprechend kann man in der *Quantoren-Logik* zwischen *inklusiv* und *exklusiv* unterscheiden. Und zwar geht es hier um den Partikulär-Quantor „einige“. Das inklusive „einige“ schließt auch die Möglichkeit ein, dass „alle“ gültig ist. Der Satz (bzw. die Relation) „einige Menschen sind neugierig“ schließt die Möglichkeit ein, dass gilt: „Alle Menschen sind neugierig“. Dagegen schließt das exklusive „einige“ aus, dass auch „alle“ richtig sein kann.

Als Symbole wähle ich:

- inklusives „einige“: V
- exklusives „einige“: ∃

Die Unterscheidung „inklusiv – exklusiv“ bezieht sich nur auf den *Partikulär-Quantor* V, der All-Quantor Λ bleibt davon unberührt.

Die Verbindung zwischen „oder“ und „einige“ zeigt sich auch dadurch, dass man das inklusive „einige“ prädikaten-logisch mit dem inklusiven „oder“ $\vee$ formalisiert, das exklusive „einige“ dagegen mit dem exklusiven „oder“ (><), wie noch gezeigt werden wird.

	inklusiv	*exklusiv*
oder	oder: $\vee$	entweder – oder: ><
einige	mindestens einer: V	genau einige: ∃

1-2-4-2 INKLUSIVES „EINIGE“

Ich bin bisher von dem *inklusiven* „einige“ ausgegangen (im Sinne von „mindestens einer“), das wie gesagt „alle“ als möglich mit einschließt.

Dieses inklusive „einige“ wird in der Quantoren-Logik fast durchgängig verwendet. Z. B. zeigt sich das im sogenannten *Logischen Quadrat*, in dem die Beziehungen zwischen den Quantoren dargestellt werden (ich gehe darauf im analytischen Teil ein). Man kann das exklusive „einige“ als vernachlässigt bezeichnen, dabei hat es den Vorteil größerer Präzision.

Verwendet man das *inklusive* „einige“, so erhält man wie beschrieben 4 Unterscheidungen:

- Alle x sind F $\Lambda x(Fx)$
- Alle x sind nicht F $\Lambda x\neg(Fx)$
- Einige x sind F $Vx(Fx)$
- Einige x sind nicht F $Vx\neg(Fx)$

1-2-4-3 EXKLUSIVES „EINIGE“ - EINFACHE RELATIONEN

Die Alternative ist das *exklusive* „einige“, im Sinne von „genau einige“, das „alle“ ausschließt. Dafür verwende ich wie gesagt den *exklusiven* Partikulär-Quantor ∃.

Hier ergibt sich keine 4er-Struktur, sondern eine *3er-Struktur*; formuliert für *einfache* Relationen:

- Alle x sind F $\Lambda x(Fx)$
- Alle x sind nicht F $\Lambda x\neg(Fx)$
- Genau einige x sind F $\exists x(Fx)$

Die 3er Struktur erklärt sich dadurch, dass gilt: $\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx)$.

Das heißt normalsprachlich:
„genau einige x sind F“ ist logisch äquivalent „genau einige x sind nicht F“.

1-2-4-4 EXKLUSIVES „EINIGE“ – KOMPLEXE RELATIONEN

Für *komplexe* Relationen der Art „genau einige F sind G“ ergibt sich (genaue Erläuterungen folgen im quantitativen Teil):

- nach der üblichen Interpretation mit *Konjunktion* (analog oben Modell 4)
  genau einige F sind G $\exists x(Fx \wedge Gx)$
  genau einige F sind nicht G $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$
  Hier zeigt sich wieder die Schwäche des üblichen Modells: In diesem Modell gilt die o. g. Äquivalenz nämlich nicht. Denn:
  $\exists x(Fx \wedge Gx) \neg\Leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$

- nach der Interpretation der *Positiv-Implikation* (analog oben Modell 5)
  genau einige F sind G $\exists x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
  genau einige F sind nicht G $\exists x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
  Hier zeigt sich andererseits wieder die Überlegenheit der Positiv-Implikation; denn dort erhält man das zu erwartende Resultat:
  $\exists x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$

1-2-4-5 EXKLUSIVES „EINIGE“ – PRÄDIKATEN-LOGIK

Im Folgenden soll das exklusive „einige“ individualisiert bzw. *prädikaten-logisch* dargestellt werden: „Genau einige Elemente von F sind auch Elemente von G“ oder kürzer: „Genau einige F sind G“.

• Übliche Interpretation mit Konjunktion: $\exists x(Fx \wedge Gx)$ (vgl. Modell 4)
$\exists x(Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) >< (Fx_2 \wedge Gx_2) >< ... >< (Fx_n \wedge Gx_n)$
Entsprechend gilt hier: Der obige Ausdruck ist nicht dem folgenden logisch äquivalent:
$\exists x(Fx \wedge \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \wedge \neg Gx_1) >< (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) >< ... >< (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$.

• Interpretation der Positiv-Implikation (vgl. Modell 5)
$\exists x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) >< (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) >< ... >< (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$
Hier gilt dagegen: Der Ausdruck ist logisch äquivalent dem folgenden:
$\exists x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) >< \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) >< ... >< \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

Dabei ist Folgendes zu beachten: Bei der *Kontravalenz* >< ist (anders als z. B. bei der Konjunktion) zu unterscheiden, ob sie sich auf 2 Variablen (*dyadisch*), 3 Variablen (*triadisch*) oder mehr Variablen bezieht.

Betrachten wir z. B. X >< Y >< Z.
Dyadische Interpretationen wären:
(X >< Y) >< Z und X >< (Y >< Z).
Beide haben in der Wahrheitstafel denselben Verlauf: + – – + – + + –

Versteht man die Kontravalenz aber triadisch, so gilt:
sie ist nur falsch, wenn *alle* Glieder gültig (+) sind oder *alle* Glieder ungültig (–) sind.
Damit ergibt sich für X >< Y >< Z (triadisch): + – – – – – – +
In diesem – triadischen bzw. „n-dischen“ – Sinn ist der folgende Ausdruck zu verstehen:
$(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) >< (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) >< ... >< (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

1-2-5 Erweiterungen

1-2-5-1 6-WERTIGE LOGIK

Bisher habe ich die *4-wertige* bzw. *3-wertige* Logik vorgeführt. Dabei ließen sich die entsprechenden Quantoren prädikaten-logisch durch die 2-wertigen Junktoren $\wedge$ sowie $\vee$ formalisieren. Das darf allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, dass diese Junktoren (in der Aussagen-Logik) nur 2-wertig sind. Nur durch Verwendung von *Indizes* wie n sind „alle" usw. darzustellen.

Aber die Quantitätsstufen (bzw. die Werte) „alle / alle nicht / einige / einige nicht" lassen sich noch ergänzen, vor allem durch:

- *die meisten*
- *die meisten nicht (bzw. die wenigsten)*

Man käme auf diese Weise zu einer *6-wertigen* Logik (inklusiv) bzw. zu einer *5-wertigen* Logik (exklusiv). Allerdings gibt es in der herkömmlichen Logik für die (normalsprachlichen) Ausdrücke '*die meisten*' und *'die meisten nicht'* keine Quantoren. Man könnte zusätzliche Quantoren einführen. Aber ich verzichte darauf, weil im Rahmen der nachfolgend vorgestellten *quantitativen* Logik „die meisten" usw. gut darzustellen sind und überhaupt viel genauere quantitative Abstufungen vorgenommen werden können.

1-2-5-2 DIMENSIONEN

Man kann die Quantoren „alle" und „einige" auf andere *Dimensionen* wie *Raum* oder *Zeit* beziehen. So ergibt sich z. B. „alle"/Raum: *überall*, „einige"/Raum: *mancherorts*. Systematisch:

	Zeit	*Raum*
alle	immer	überall
die meisten	meistens	meistenorts
einige	manchmal	manchenorts
die wenigsten	selten	(seltenenorts)
alle nicht	niemals	nirgendwo

Aber dies führt aus der Logik im engeren Sinn hinaus (vgl. 1-1-5-4, 1-1-5-5).

Die *Quantifizierung von Zeit* darf nicht so verstanden werden, als beinhalte eine logische Relation selbst einen Zeitfaktor, Entsprechendes gilt für den Raum.

1-2-5-3 MODAL-LOGIK

Im Gegensatz zu einer Raum- oder Zeit-Logik lässt sich eine sogenannte *alethische Modal-Logik* im streng logischen Sinn aufbauen. Dabei wird unterschieden zwischen *notwendig* (nicht) und *möglich* (nicht). Zwar kann man die Modal-Logik *über-logisch*, z. B. in Bezug auf *Kausalität* definieren, aber die Modalbegriffe sind auch in *rein logische* Begriffe zu übersetzen. Dabei gibt es folgende Entsprechungen (Einteilung wie in der Quantoren-Logik):

alle	notwendig	N	$\Leftrightarrow$	$\neg M \neg$	nicht möglich nicht
alle nicht	notwendig nicht	$N\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg M$	unmöglich
einige	möglich	M	$\Leftrightarrow$	$\neg N \neg$	nicht notwend. nicht
einige nicht	möglich nicht	$M\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg N$	unnotwendig

Man könnte auch *nur* vom Begriff „notwendig" ausgehen und dessen Variationen als *Basis* nehmen (bzw. nur vom Begriff „möglich" ausgehen). Aber es bewährt sich, jeweils die *einfachsten* Formen zu nehmen, und dann erhält man als Ausgangsbasis eine *Kombination* von

Notwendigkeits-Begriffen und Möglichkeits-Begriffen. Entsprechend habe ich bei der *Quantoren*-Logik sowohl „alle" wie „einige" als Basis-Begriffe verwendet. Ich gebe in der obigen Übersicht rechts aber auch die *alternativen* Notwendigkeits- bzw. Möglichkeits-Begriffe an; genauer wird deren Verhältnis aber erst im Teil über *analytische* Modal-Logik erörtert.

Wenn man *vier verschiedene* Begriffe verwendet, erhält man:

Notwendig – möglich – unnotwendig – unmöglich.

Anstatt *unnotwendig* wird häufig *zufällig* oder *kontingent* angegeben, aber besser definiert man *zufällig* anders: zufällig (x) $\Leftrightarrow$ unnotwendig (x) $\wedge$ möglich (x). Denn *unnotwendig* schließt auch Unmöglichkeit als Grenzfall ein, was für den Zufallsbegriff nicht erwünscht ist.

1) Scheitern einer *aussagen-logischen* Modal-Logik

Wichtig ist: „notwendig" (N) und „notwendig nicht" (N¬) lassen sich auch rein *aussagen-logisch* ausdrücken, in erster Linie durch die Implikation. Aber „möglich" (M) und „möglich nicht" (M¬) sind nur durch *Quantoren-Logik* bzw. eine höhere Logik darzustellen – gleichgültig, ob in einem *synthetischen* oder einem *analytischen* Ansatz –, deshalb ist eine *vollständige* Modal-Logik eben nur durch Quantoren-Logik oder quantitativ zu formalisieren.

Das sei kurz, für einen synthetischen Ansatz, erläutert: „Y ist notwendig in Bezug auf X" kann man zwar *aussagen-logisch* z. B. durch $X \rightarrow Y$ ausdrücken. Aber es gelingt aussagen-logisch nur mit Problemen, „Y ist unmöglich in Bezug auf X" auszudrücken.

Angenommen man formalisiert: $X \rightarrow \neg Y$. Es ließe sich argumentieren: Wenn X nicht-Y impliziert, dann ist es unmöglich, dass X auch Y impliziert. Aber dies ist logisch durchaus möglich: $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y)$ ist *keine Kontradiktion*. In diesem Fall könnte man sich allerdings mit der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$, die hier eine Kontradiktion angibt, behelfen.

Aber genau so, wie sich „einige" und „einige nicht" nicht *aussagen-logisch* ausdrücken lassen, so auch nicht „möglich" und „möglich nicht". Zwar kann man in Grenzen durch die von mir eingeführte „*semi-analytische Implikation*" den Modus der *Möglichkeit* ausdrücken, aber dies ist mit erheblichen, hier nicht zu schildernden Schwierigkeiten verbunden und führt außerdem aus der herkömmlichen Aussagen-Logik heraus. Man benötigt also eine *quantoren-logische* Modal-Logik.

2) *Quantoren-logische* Modal-Logik

Für *einfache Relationen* ergibt sich quantoren-logisch (im analytischen Teil, Kapitel 2, wird das weiter differenziert):

$\Lambda x(Fx)$	$N(Fx_i)$	'Fx$_i$ ist notwendig'	‚nicht-Fx$_i$ ist unmöglich'
$\Lambda x\neg(Fx)$	$N\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx$_i$ ist notwendig'	‚Fx$_i$ ist unmöglich'
$Vx(Fx)$	$M(Fx_i)$	'Fx$_i$ ist möglich'	‚nicht-Fx$_i$ ist unnotwendig'
$Vx\neg(Fx)$	$M\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx$_i$ ist möglich'	'Fx$_i$ ist unnotwendig'

Wenn die *Negation* ¬ vor der Klammer steht, kann man sie auch in die Klammer ziehen: statt $N\neg(Fx_i)$ also $N(\neg Fx_i)$. Anstatt zu schreiben ‚nicht-Fx$_i$ ist notwendig', formuliert man besser: ‚es ist notwendig, dass nicht F$_i$' oder ‚es ist notwendig, das Fx$_i$ nicht gilt'.

Eine wesentliche Unterscheidung ist nun die zwischen:

synthetischer Modal-Logik
analytischer Modal-Logik

3) Zur Abgrenzung von *synthetischer* und *analytischer* Modal-Logik

• <u>Zum Fall von „alle" / „notwendig":</u>

Wenn *alle* x (als Klasse) die Eigenschaft F haben, bedeutet dies: Es ist *notwendig*, dass jedes individuelle x die Eigenschaft F hat.

Hier bieten sich zwei Formalisierungen an (vgl. 0-2-4):

– logische *Äquivalenz*: $\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow N(Fx_n)$.
Hier sind beide Ausdrücke analytisch äquivalent bzw. definieren sich wechselseitig.
Man verwendet dann am besten x_n, das für *jedes beliebige* x steht.

– logische *Folge*: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$
Hier folgt ein Ausdruck aus dem anderen.
Man verwendet am besten x_i, was für ein *bestimmtes x* steht.

– *synthetische Modal-Logik*: logische *Äquivalenz*: $\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow N(Fx_n)$.
Man kann in diesem Fall von synthetischer Modal-Logik sprechen. Die synthetische Modal-Logik ist (normalerweise) *nicht-relational*, d. h. der Notwendigkeits-Ausdruck $N(Fx_n)$ wird nicht von einem anderen Ausdruck abgeleitet. Zwar könnte das $\Leftrightarrow$ in $\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow N(Fx_n)$ doch an eine (analytische) Ableitung denken lassen, aber bei einer Äquivalenz sind beide Seiten gleichwertig, es wird nicht ein Ausdruck aus dem anderen hergleitet. Vielmehr sind die beiden Ausdrücke logisch gleichbedeutend, definieren sich. $N(Fx_n)$ gilt also einfach als modal-logische Übersetzung des quantoren-logischen $\Lambda x(Fx)$. Und da $\Lambda x(Fx)$ *synthetisch* ist, muss folglich $N(Fx_n)$ auch synthetisch sein.

Bei *komplexen Sätzen* muss man folgendes beachten: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow N(Fx_n \rightarrow Gx_n)$. Das ist korrekt. Man darf aber nicht $N(Gx_n)$ mit $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_n$ gleichsetzen. Denn es kann ja z. B. auch gelten: $\Lambda x(Hx \rightarrow Gx)$, und dies könnte man mit gleichem Recht $N(Gx_n)$ zuordnen. Im Beispiel: Man darf nicht gleichsetzen: „Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch“ mit„Sokrates ist notwendig sterblich“. Denn man könnte genauso gut bestimmen: „Alle Lebwesen sind sterblich und Sokrates ist ein Lebewesen“ und dies mit „Sokrates ist notwendig sterblich“ gleichsetzen. Und „alle Menschen sind sterblich“ ist nicht äquivalent mit „alle Lebwesen sind sterblich“.

– *analytische Modal-Logik: logische Folge*: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$
Hier folgt $N(Fx_i)$ deduktiv aus $\Lambda x(Fx)$, wird mittels des analytischen Implikators $\Rightarrow$ abgeleitet. $N(Fx_i)$ gilt also in Relation zu $\Lambda x(Fx)$.

Dieses Modell entspricht m. E. mehr der Essenz von Modalität. Modal-Begriffe sind letztlich *Modal-Relationen*. Wenn ich sage, etwas ist notwendig, dann muss ich angeben: „notwendig in Bezug auf dies oder das“ (auch wenn das nicht immer explizit vollzogen wird). Z. B.: „Sokrates ist sterblich“ ist notwendig in Relation zu „Alle Menschen sind sterblich“. Formal: „Fx_i“ ist notwendig in Relation zu „$\Lambda x(Fx)$“.

Allerdings kann man einwenden, dass $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$ redundant ist. Denn die logische Folge $\Rightarrow$ an sich drückt bereits die Notwendigkeit aus: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$ gibt bereits an, dass Fx_i notwendig ist relativ zu $\Lambda x(Fx)$.

Dennoch ist es korrekt, $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$ zu schreiben, denn es ist grundsätzlich erlaubt, anstelle $\Phi \Rightarrow \Psi$ zu schreiben $\Phi \Rightarrow N(\Psi)$.

Wenn man dieses Problem umgehen will, kann man z. B. schreiben: $N[(Fx_i), \Lambda x(Fx)]$.
Lies: ‚Fx_i ist notwendig in Relation zu $\Lambda x(Fx)$’.
(Genaueres zur *analytischen* Modal-Logik erst im Kapitel über analytischen Relationen.)

• Zum Fall „einige“ / „möglich“:
Wenn *einige* x die Eigenschaft F haben, dann ist es *möglich*, dass ein beliebiges x, also x_i (bzw. x_n) die Eigenschaft F hat.

– synthetische Modal-Logik, logische Äquivalenz: $Vx(Fx) \Leftrightarrow M(Fx_i)$
– analytische Modal-Logik, logische Folge: $Vx(Fx) \Rightarrow M(Fx_i)$

Hier *muss* man (anders als bei ‚N') in beiden Fällen den Modal-Ausdruck ‚M' verwenden.
Im Fall $Vx(Fx) \Rightarrow M(Fx_i)$ muss man ‚M' verwenden, weil $Vx(Fx) \Rightarrow Fx_i$ kein strenger Schluss ist, nur ein *semi-analytischer*, es gilt also nur $Vx(Fx) \longrightarrow Fx_i$, Denn wenn *einige* x die Eigenschaft F haben, ist ja nicht sicher, dass ein *bestimmtes* x zu diesen einigen gehört und daher auch die Eigenschaft F besitzt. Anders gesagt: ‚Fx_i ist *möglich* in Bezug auf Vx(Fx)' heißt gerade, dass hier kein streng logischer Schluss vorliegt.

4) Exklusive Modal-Logik
Genauso wie sich für die Quantoren-Logik eine *exklusive* Variante formulieren lässt, so auch für die *Modal-Logik.* Während das inklusive „möglich" es offen lässt, ob Notwendigkeit auch gilt, schließt das exklusive „möglich" Notwendigkeit aus.

Folgende *Entsprechungen* gelten:

Inklusiv	*Exklusiv*
mindestens einige (vielleicht alle)	genau einige (nicht alle)
mindestens möglich (vielleicht notwendig)	genau möglich (nicht notwendig)

Das exklusive *möglich* schreibe ich $M^{\exists}$.
Für das exklusive „möglich" gilt entsprechend dem exklusiven „einige":

Es gilt: $M^{\exists}(Fx) \Leftrightarrow M^{\exists}\neg(Fx)$.

Wenn es (genau) möglich ist, dass x die Eigenschaft F besitzt, dann ist es auch genau möglich, dass x *nicht* die Eigenschaft F besitzt und umgekehrt.
Das exklusive „möglich" entspricht m. E. am besten dem „zufällig" oder „kontingent".

1-2-5-4 ERWEITERTE QUANTOREN-VERWENDUNG

Ich habe mich in diesem Punkt 1-2 bisher auf quantoren-logische Ausdrücke mit nur *einer* Individuen-Variable ‚x' beschränkt. Denn wie schon erläutert: Mir geht es primär darum, die *fundamentalen, wesentlichen Strukturen* der Logik darzustellen, diese aber ausführlich, detailliert und mit vielen Erweiterungen und Erneuerungen. Dazu reichen die *einfachen* quantoren-logischen Sätze aus, ja man kann an ihnen sogar am besten und übersichtlichsten die Grundstrukturen erklären.
Natürlich ist es aber auch möglich, *komplexere* quantoren-logische Ausdrücke zu bilden:

- mit mehreren Individuen-Variablen

  z. B. $\Lambda x\, \Lambda y(Fx \rightarrow Gy)$

  „Für alle x, alle y gilt: Wenn x die Eigenschaft F hat, dann hat y die Eigenschaft G"

- mit Identität

  z. B. $\Lambda x(x = x)$

  „Für alle x gilt: x ist identisch mit x"

Dabei wird die *Identität* normalerweise mit dem ‚=' ausgedrückt. Die Identität wird in vielen quantoren-logischen Darstellungen als etwas Besonderes und Kennzeichen einer höheren Quantoren-Logik herausgestellt. Man kann aber i. allg. das ‚=' durch den Äquivalenz-Relator ‚↔' ersetzen. Es geht also um eine ganz normale logische Relation $\Phi \leftrightarrow \Psi$, die durchaus im Rahmen der einfachen Quantoren-Logik abgehandelt werden kann. Einmal davon abgesehen, dass Identität eigentlich auch *raum-zeitliche* Übereinstimmung verlangt, die Logik abstrahiert aber von Raum und Zeit, sie kann also Identität gar nicht vollständig abbilden.

• Anwendung der Quantoren auf Eigenschaften bzw. Klassen

z. B. $VF(Fx_i)$

„Für einige Eigenschaften F gilt: x_i besitzt diese Eigenschaften“

oder:

z. B. $VF(x_i \in F)$

„Für einige Klassen F gilt: x_i ist Element dieser Klassen“

Dies darf nicht mit der *intensionalen Quantifizierung*, der Angabe des *Grades* einer Eigenschaft verwechselt werden, wie sie im folgenden Punkt 1-2-5-5 beschrieben wird.

• Kombinationen

Selbstverständlich gibt es auch Kombinationen der obigen Ansätze:

z. B. $\Lambda x\, \Lambda Y[x = y \leftrightarrow \Lambda F(x \in F \rightarrow y \in F)]$

1-2-5-5 INTENSIONALE QUANTOREN-LOGIK

Ich habe bisher nur eine *extensionale* Quantoren-Logik dargestellt, die sich auf *Klassen* oder Mengen bezieht, wie dies auch der gängigen Darstellung entspricht. Man kann aber auch eine *intensionale* Quantoren-Logik formulieren, die *Eigenschaften* quantifiziert, also die Quantoren auf Eigenschaften anwendet. Aber nicht in der in 1-2-5-4 beschriebenen Weise: „Für alle Eigenschaften gilt ...“, sondern so, dass der *Grad* einer Eigenschaft angeben wird.

Zunächst sei auf die *Prädikaten-Logik* zurückgegriffen. Die Prädikaten-Logik unterscheidet nur zwischen:

- x kommt eine Eigenschaft F zu: Fx
- x kommt die Eigenschaft F *nicht* zu: $\neg Fx$

Die *Prädikaten-Logik* ist also intensional *2-wertig*, es wird nur zwischen „ja“ und „nein“ unterschieden: z. B: ‚x ist klug’ versus ‚x ist nicht klug’.

Die normale extensionale *Quantoren-Logik* knüpft daran an, sie unterscheidet intensional z. B. nur zwischen $\Lambda x(Fx)$ versus $\Lambda x(\neg Fx)$: allen x kommt die Eigenschaft F zu – oder eben nicht.

Man kann aber entsprechend den extensionalen Quantoren weiter differenzieren und so eine intensionale Quantoren-Logik konstruieren; dabei teilt man folgendermaßen ein.

Alle	x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*
Alle nicht	x besitzt die Eigenschaft F *überhaupt nicht*
Einige	x besitzt die Eigenschaft F *partiell*
Einige nicht	x besitzt die Eigenschaft F *partiell nicht*

„x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*“ ist zu verstehen als „x besitzt *alle* Einheiten von F“. Wenn die maximale Intelligenz, also der maximale Intelligenz-Quotient I.Q. z. B. 180 betrüge, dann wäre x vollständig intelligent, wenn es einen I. Q. von 180 besitzt. (Problematischer ist es bei Eigenschaften, bei denen sich keine *Maximalgröße* angeben lässt, was ich hier nicht weiter verfolgen möchte.)

Man kann diese *intensionale* Größenangabe formal so schreiben, dass man dieselben Quantoren Λ und V verwendet: z. B. ΛFx, im Sinne von: „x kommt die Eigenschaft F vollständig zu“. Allerdings besteht hier eine Verwechslungsgefahr mit: „Für alle Eigenschaften F gilt, x besitzt diese Eigenschaften“. Besser schreibt man intensional mit hochgestelltem V: $^{\Lambda}Fx$.

Natürlich lassen sich die extensionale und intensionale Quantoren-Logik verbinden, z. B.:

„alle x besitzen die Eigenschaft F vollständig“: $\Lambda x(\Lambda Fx)$ oder $\Lambda x(^{\Lambda}Fx)$

„kein x besitzt die Eigenschaft F partiell: $\neg Vx(VFx)$ oder $\neg Vx(^{V}Fx)$

• *Fuzzy Logik*
Gegen die Theorie einer *intensionalen Quantoren-Logik* lässt sich allerdings einwenden: Man kann eine *intensionale* Quantifizierung wie „x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*“ auch *extensional* umdeuten, als: „x gehört der Klasse F *vollständig* an“. Hier wird gewissermaßen der *Grad* angegeben, zu dem ein Objekt x Element der Klasse F ist, somit eine extensionale Kennzeichnung vorgenommen. Diese Deutung wird in der *Fuzzy-Logik* vorgenommen (vgl. zur Fuzzy Logik u. a. 1-3-5-5).

Grundsätzlich besteht eine gewisse Verwandtschaft der intensionalen Quantoren-Logik zur Fuzzy Logik. Denn erstens überschreitet auch die Fuzzy-Logik die *2-Wertigkeit* der Prädikaten-Logik, gehört zu den *mehr-wertigen* Logiken. Zweitens ist die Fuzzy Logik aber normalerweise nicht als streng quantitative Logik, mit genauen Zahlenwerten konzipiert. Typisch ist vielmehr für die Fuzzy Logik, dass sie mit Zwischenstufen arbeitet, z. B. *groß*, *sehr groß*; *ein bisschen groß*, *klein*, *sehr klein* usw.; wenn man diese Begriffe streng quantifiziert, entsprechen sie eher einem *Intervall* von Werten.

Allerdings verweisen diese Abstufungen doch eher auf *absolute* Werte, nicht auf *relative* Werte wie bei der intensionalen Quantoren-Logik; so entspricht z. B. „vollständig“ genau 100%, einer relativen Größe (dies werde ich im nächsten Punkt über quantitative Logik erläutern).

Kritisch ist allerdings zu fragen: Kann ich z. B. einen (intensional quantifizierten) Satz wie ‚Peter ist vollständig intelligent’ wirklich gleichsetzen mit der extensionalen Form ‚Peter gehört vollständig der Klasse der Intelligenten an’? wie dies die Deutung der Fuzzy Logik ergeben würde. Und ist ‚Peter gehört vollständig der Klasse der Intelligenten an’? überhaupt sinnvoll zu interpretieren? Ich habe da meine Zweifel und halte jedenfalls die *intensionale* Deutung für überlegen.

• *Extensionale versus intensionale Quantoren-Logik*
Zurück zur normalen, extensionalen Quantoren-Logik. Denn ohne Zweifel ist die Quantoren-Logik, wie überhaupt die normale Logik, weitgehend *extensional* ausgerichtet: man wendet also die Quantoren überwiegend auf *Klassen* von Elementen an, und nicht auf *Eigenschaften* (und deren Größeneinheiten).

So ist die Quantoren-Logik normalerweise *extensional 4-wertig*, *intensional* aber nur *2-wertig*. Extensional unterscheidet sie zwischen: *alle*, *alle nicht*, *einige* und *einige nicht*. Intensional unterscheidet sie aber, wie die Prädikaten-Logik, nur zwischen „ja“ und „nein“, wobei das „nein“ mit dem *Negator* ausgedrückt wird, z. B. $\Lambda x(Fx)$ versus $\Lambda x(\neg Fx)$.

Hier könnte man allerdings zu Recht einwenden, dass es recht willkürlich ist, z. B. ‚alle x sind F’ unbedingt intensional zu deuten. Wenn nur *2-wertig* unterschieden wird, sind die extensionale und die intensionale Darstellung sicher gleichberechtigt: ‚alle x haben die Eigenschaft F’ oder ‚alle x sind Elemente der Klasse F’.

	extensional	(partiell) intensional
positiv	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda x(Fx)$
negativ	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda x(\neg Fx)$

Anstelle der Unterscheidung *extensional versus intensional* kommt hier aber eine andere zum tragen, die Unterscheidung zwischen *Subjekt und Prädikat*.
Dies sei an zwei Beispielsätzen erläutert:
‚*Nicht alle* Lehrer sind intelligent’:
Hier gibt es eine *Negation* des Subjekt, genauer eine Negation des *Subjekt-Quantors*; das „alle“ wird negiert, d. h. es wird ausgesagt, dass etwas *nicht für alle* Elemente einer Klasse zutrifft.

‚*Einige* Lehrer sind *nicht* intelligent'
Hier gibt es eine *Negation* des Prädikats, das Prädikat ‚ist intelligent' wird durch Negation zu ‚ist nicht intelligent', d. h. es wird ausgesagt, dass eine Eigenschaft einer Teilklasse *nicht zukommt*.

Beide Sätze sind *logisch äquivalent*. Somit kann man durch Subjekt-Negation und Prädikat-Negation (in Verbindung mit Bezug auf eine Klasse oder Teilklasse) dasselbe aussagen.

Man könnte bei ‚*nicht alle* Lehrer sind intelligent' zwar auch von einer *extensionalen* Negation sprechen, aber anders sieht es bei ‚*einige* Lehrer sind *nicht* intelligent' aus; man kann diesen Satz gleichermaßen (partiell) *intensional* deuten als ‚e*inige* Lehrer besitzen nicht die Eigenschaft Intelligenz' oder *extensional* als ‚‚e*inige* Lehrer sind *nicht* Elemente der Klasse der Intelligenten'. Hier macht die Unterscheidung zwischen *Subjekt-Negation* und *Prädikat-Negation* also mehr Sinn.

Die Negation ist aber letztlich nur Teil einer *quantitativen Bestimmung*, wie im nächsten Punkt 1-3 genauer erläutert wird. D. h. pointiert: *Subjekt-Negation* und *Prädikat-Negation* bilden ein *Äquivalent*, am Beispiel: die Subjekt-Quantität „nicht alle" („nicht alle x sind F") und die Prädikat-Quantität „... sind nicht F" („einige x sind nicht F") sind vertauschbar. Und so kann man kann eine quantitative Bestimmung wahlweise durch eine Subjekt-Quantifizierung oder eine Prädikat-Quantifizierung vornehmen.

• *Intensionale Aussagen-Logik?*
Kommen wir noch einmal zur *Aussagen-Logik*: die klassische Aussagen-Logik arbeitet mit (unstrukturierten) Aussagen: A, B usw. Ich habe aber gezeigt, dass man sie auch anders interpretieren bzw. verwenden kann: So lässt sich $X \to Y$ *extensional* auch deuten als:
„Alle X sind Y". Dabei unterscheidet die Aussagen-Logik, als *2-wertige* Logik, (implizit) nur zwischen „alle" und „alle nicht", konkret:

alle X sind Y:	$X \to Y$	ja	wahr	‚$X \to Y$' ist wahr
alle X sind nicht Y:	$\neg(X \to Y)$	nein	falsch	‚$X \to Y$' ist falsch

Die Frage ist, ob die Aussagen-Logik auch eine (partiell) *intensionale* Deutung zulässt. Prinzipiell könnte man $X \to Y$ auch deuten: „X besitzt die Eigenschaft Y". „X besitzt nicht die Eigenschaft Y" wäre dann zu schreiben als: $X \to \neg Y$.

Hier dürfen wir allerdings nicht – wie im extensionalen Fall – einfach postulieren, „X besitzt die Eigenschaft Y" sei zu verstehen als „X besitzt die Eigenschaft Y *vollständig*" oder im negativen Fall: „X besitzt die Eigenschaft Y *überhaupt nicht*" (vgl. dazu 1-4-5). In jedem Fall ist die Aussagen-Logik aber auch bei einer (partiell) intensionalen Deutung *2-wertig*.

1 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

1-3-0 Einführung

Die *Quantifizierung* gehört nicht zur Logik im eigentlichen Sinne, aber es gibt heute verschiedene *quantitative* Ansätze zur Weiterentwicklung der Logik. Der bekannteste ist sicher die *Fuzzy Logik*, die aber völlig anders strukturiert ist als mein Modell.

Ich habe den vorliegenden Ansatz wie beschrieben schon vor über 25 Jahren zu entwickeln begonnen, dann über Jahre weiter ausgebaut. Es wird sich noch zeigen, wie fruchtbar diese Theorie ist. Durch Quantifizierung gerät die Logik in die Nähe von *Statistik* und *Mathematik*, aber die Logik wird so dennoch nicht zur Statistik, sondern behält ihre Eigenständigkeit. In der Statistik werden *spezialisierte* und *hochkomplexe* quantitative Methoden entwickelt, aber den Methoden haftet teilweise eine gewisse Willkürlichkeit an. Die Logik behandelt dagegen primär die *fundamentalen Strukturen unseres Denkens und Schlussfolgerns*. Andererseits intendiert mein Ansatz der *Integralen Logik* eine Verbindung von Logik und Statistik, wobei er sich in eine *deduktiv-deterministische* und eine *induktiv-statistische* Logik differenziert.

Jede Relation beinhaltet auch eine *quantitative* Struktur, obwohl diese oft *implizit* ist. Die quantitative Logik beschreibt zum einen neue Quantifizierungen logischer Strukturen. Aber sie zeigt auch die verborgene, *implizite* Struktur von herkömmlicher logischen Relationen oder von normal-sprachlichen Sätzen auf, macht sie *explizit*.

Ehe ich mich der quantitativen Logik zuwende, muss zunächst auf *Quantität* allgemein eingegangen werden, allerdings nur knapp und in Bezug auf unser Thema. Ich erläutere die Eigenschaften der Quantität vor allem an der *Implikation* $X \rightarrow Y$.

1-3-0-1 ABSOLUTE QUANTITÄT

Angenommen, ich formuliere die Relation: „50 Menschen sind Genies“. 50 ist dann die *absolute Quantität* (oder *absolute Häufigkeit*) der Relation. Es wird einer solchen Relation eine *natürliche Zahl* n bzw. r zugewiesen. Ich verwende für die *absolute Quantität* das Symbol ‚q’.

Beispiel: 50 F haben die Eigenschaft G. Formal: $q(F \rightarrow G) = 50$

Man kann allgemein schreiben: $q(X \rightarrow Y) = r$

Allerdings wäre hier auch die Konjunktion denkbar: $q(X \wedge Y) = r$

Ich lasse dabei die *Individuenvariable* ‚x’ weg, weil sie nicht notwendig ist.

Mit einer *Individuenvariablen* ‚x’ kann man schreiben: $q(Fx \rightarrow Gx) = 50$.

Oder mehr in Anlehnung an die Quantoren-Logik: $50x(Fx \rightarrow Gx)$.

Zu lesen: ‚Für 50 x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, dann haben sie auch die Eigenschaft G’.

Man kann auch sagen: Es wird die *Anzahl* der Genies oder die *Mächtigkeit der Menge* der Genies angegeben (vorausgesetzt, nur Menschen können Genies sein).

Den *Wert der absoluten Quantität* berechnet man nach der *Wahrheitstafel*, indem man die Anzahl der *Fälle* in den verschiedenen *logischen Welten* angibt bzw. addiert, in denen die Relation (der Satz) gültig ist, also ein + hat.

	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$q(X \wedge Y)$	= a
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y$	= b
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y)$	= c
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y)$	= d

Bei $X \rightarrow Y$ gibt es in der 1., 3. und 4. Welt ein + (plus), in der 2. Welt ein – (minus).
So ergibt sich: $q(X \rightarrow Y) = a + c + d$

Zurück zum Beispiel: 50 Menschen sind Genies.
Man könnte das halb-formal schreiben: q(Mensch $\rightarrow$ Genie) = 50
Beispielzahlen: a = 10, b = 15, c = 18, d = 32. Dann: $q(X \rightarrow Y) = 10 + 18 + 32 = 50$.
Diese Zahlen ganz unrealistisch (vor allem d), aber so lässt sich der Fall besser darstellen.

Nun zeigt sich hier wieder die *Paradoxie der Implikation*, von der wir schon mehrfach gesprochen haben. Wenn wir sagen, 50 Menschen sind Genies, dann erwarten wir, dass a = 50, denn a ist die Anzahl der Objekte, die Mensch und zugleich Genie sind. Aber $q(X \rightarrow Y) = 50$ ist z. B. auch wahr, wenn a + b + d = 0, nur c = 50; das hieße allerdings, es gäbe gar keine Menschen. Ja, $q(X \rightarrow Y) = 50$ ist sogar wahr, wenn a + b + c = 0, nur d = 50, das hieße aber, es gäbe weder Menschen noch Genies. Für die *normale Sprache* würden wir so eine Quantifizierung als untauglich ablehnen, aber für die logische Implikation ist sie adäquat, sie entspricht genau der Aufteilung der Wahrheitstafel. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Implikation primär durch eine *relative Quantität* bestimmt ist, wie gleich gezeigt wird.

1-3-0-2 RELATIVE QUANTITÄT

Die Logik im eigentlichen Sinn bezieht sich aber nicht auf die *absolute,* sondern primär auf die relative *Häufigkeit (*bzw. *Quantität)* oder *Wahrscheinlichkeit*. Man berechnet also wie üblich die Anzahl der *günstigen Fälle* im Vergleich zu *allen Fällen*. Die relative Quantität symbolisiert man mit p (für *probability* = Wahrscheinlichkeit).

Allgemein kann man sagen: Es geht um die Struktur p(X) = r/n oder noch allgemeiner um $p(\Phi) = r/n$. Dabei gilt: r = Anzahl der *günstigen* Fälle, n = Anzahl *aller* Fälle.

Grundsätzlich kann man p(X) = r/n so lesen: ‚Die Wahrscheinlichkeit von X ist r/n'.
Für die *Implikation* schreibt man: $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Nehmen wir als Beispiel $p(X \rightarrow Y) = 7/10$.
Bedeutung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass X auch Y ist, beträgt 7/10".

Genauer kann man, neben anderen, vor allem folgende, spezielle und allgemeine *Deutungen* für die Implikation (bzw. entsprechend für andere logische Relationen) unterscheiden:

- *relative Quantität* bzw. *relative Häufigkeit*
  - Beispiel: 7 von 10 X implizieren Y / 70% der X sind Y
  - allgemein: r von n X implizieren Y / r von n X sind auch Y
- *Wahrscheinlichkeit*
  - Beispiel: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt 0,7
    wenn X, dann mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% auch Y
  - allgemein: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt r/n
- *relative Wahrheit*
  - Beispiel: die Relation $p(X \rightarrow Y) = 10/10$ ist zu 70% wahr.
  - allgemein: Die Relation $p(X \rightarrow Y) = 1{,}0$ ist mit einem Grad von r/n wahr

• *Relative Quantität bzw. relative Häufigkeit*

Relative Quantität: Ausgang sei eine bestimmte, reale V*erteilung*. Man untersucht z. B. alle Bücher eines Autors (n = 10) und stellt fest, dass 2 von ihnen autobiographisch sind. Die relative Quantität ist dann: 2 von 10. Also 2 von 10 Büchern sind autobiographisch (p = 2/10).

Relative Häufigkeit: Davon spricht man eher bei *Ereignissen*. Man stellt z. B. fest, dass John bei 8 Kinobesuchen 4mal zu spät kommt (p = 4/8). Man kann allerdings auch allgemein von ‚relativer Häufigkeit' bzw. ‚Häufigkeitsverteilung' sprechen.

• *Empirische und theoretische Wahrscheinlichkeit*

Es ist zu unterscheiden zwischen *empirischer* und *theoretischer* Wahrscheinlichkeit. Daneben gibt es auch eine *subjektive* Wahrscheinlichkeit, von der ich aber hier absehe.

Erstens, die *empirische Wahrscheinlichkeit:* Sie richtet sich nach *empirischen Verteilungen.* Dabei wird die *relative Häufigkeit* auf den *Einzelfall* übertragen. Am obigen Beispiel:

– *Menge/relative Häufigkeit*: 2 von 10 Büchern (= 20%) eines Autors sind autobiographisch.
– *Individuum/Wahrscheinlichkeit*: Ich habe ein (beliebiges) Buch des Autors vorliegen, dann ist es mit einer *Wahrscheinlichkeit* von 2/10 = 1/5 = 0,2 (oder 20%) autobiographisch.

Diese Wahrscheinlichkeit nennt man auch *statistische* oder *faktische* Wahrscheinlichkeit. In der Statistik wird normal zwischen *relativer Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* unterschieden und es werden dafür auch unterschiedliche Symbole verwendet, für die *relative Häufigkeit* (einer Stichprobe) z. B. h_r und für die *Wahrscheinlichkeit* p. Ich verwende hier jedoch gleichermaßen für relative Häufigkeit und (empirische) Wahrscheinlichkeit das *Symbol* ‚p'. Das scheint mir aus Gründen der Vereinfachung legitim, zumal in diesem Text auch keine statistischen Untersuchungen vorgenommen werden (Genaueres im Kap. 3 und 4).

Zweitens die *theoretische Wahrscheinlichkeit* (oder *Zufalls-Wahrscheinlichkeit*): Sie bezieht sich auf *Zufallsverteilungen* wie z. B. beim Glücksspiel: Bei einem Würfel mit 6 Seiten gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/6$, dass ich mit einem Wurf z. B. die Zahl 3 würfele. Wenn ich nur 6mal würfele, ist keinesfalls sicher, dass dann 1mal die Zahl 3 darunter ist. Doch je größer die Anzahl der Würfe, desto mehr ist zu erwarten, dass die 3 zu 1/6 auftritt. Und wenn man *unendlich* mal würfeln würde, dann träte die 3 genau zu 1/6 = 16,7 % auf; bzw. 1/6 ist der *Grenzwert* der relativen Häufigkeit, wenn n gegen *unendlich* geht.

So oder so ähnlich wird es jedenfalls oft behauptet. Aber erstens ist der Ausgleich bei *großen Zahlen* ein *relativer, prozentualer* Ausgleich, es muss damit nicht ein Ausgleich in *absoluten* Zahlen verbunden sein. Und zweitens, um es ganz klar zu sagen: Es ist *extrem unwahrscheinlich* (die Wahrscheinlichkeit geht gegen 0), aber *nicht unmöglich*, dass bei einer Folge von *unendlichen* Würfen die Zahl 3 keinmal oder sogar ausschließlich die Zahl 5 auftritt.

Auch beim Würfeln kann man *die relative Häufigkeit* berechnen. Man macht z. B. eine Serie von Würfen und gibt dann *empirisch* an, wie oft die 1, 2, 3, 4, 5 und 6 aufgetreten sind. Aber die theoretische Wahrscheinlichkeit wird nicht aus der relativen Häufigkeit empirisch ermittelt, sondern nach Gesetzen der *Kombinatorik* berechnet. Die theoretische Wahrscheinlichkeit ist somit *analytisch* und wird deshalb hier nicht weiter behandelt. Vor allem diese *theoretische* Wahrscheinlichkeit kommt in Kapitel 3 und 4 noch ausführlich zur Sprache.

• *Gesamtheit und Stichprobe*

Hier ist eine weitere wichtige Unterscheidung zu treffen: zwischen *Gesamtheit* (All-Menge) und *Stichprobe* (Teilmenge). Wenn man eine empirische Untersuchung macht, kann man normalerweise nur eine *Teilmenge* untersuchen; eine *unendliche* Menge ist prinzipiell nicht vollständig zu untersuchen, eine *endliche*, aber große Menge aus praktischen Gründen nicht.

Angenommen, man macht eine Untersuchung über die Lehrer in Deutschland. Nehmen wir weiter an, es gäbe 100.000 Lehrer. Es wäre viel zu aufwendig, diese *alle* zu untersuchen. Man macht nur Untersuchungen einer *repräsentativen Stichprobe*, sagen wir: 1.000 Lehrer. Man stellt z. B. fest: 700 von den 1.000 Lehrern sind Zeitungsleser. Dieser Wert 700/1000 lässt sich die *relative Häufigkeit* der Stichprobe nennen. Ich schreibe dafür:

p/Stichprobe(Lehrer → Zeitungsleser) = 700/1000.

Nun kann man aber nicht voraussetzen, dass sich in der *Gesamtheit* aller Lehrer genau dieselbe Häufigkeitsverteilung findet. Wenn die Stichprobe nicht ganz repräsentativ ist, könnte für die Gesamtheit z. B. gelten: von 100.000 Lehrern sind 80.000 Zeitungsleser. Es wäre zu schreiben: p(Lehrer $\rightarrow$ Zeitungsleser) = 80.000/100.000 = 0.8 = 80 %. Die *Dezimalangabe* (0,8) bzw. die *Prozentangabe* (80%) darf man streng genommen allgemein nur verwenden, wenn man die *Gesamtheit*, also *alle* Elemente der Menge untersucht hat. Und auch nur dann darf man allgemein sagen: ‚Die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein *beliebiger* Lehrer auch Zeitungsleser ist, beträgt 80%'. Ansonsten muss man immer die Einschränkung auf die Stichprobe vornehmen. Von daher wird in der Statistik genau zwischen Stichprobe und Gesamtheit unterschieden, was ich aber hier bei meinen Beispielen vernachlässigen kann.

• *Wahrheitsgrad*

Hier soll zunächst auf das Verhältnis von *Wahrheit* und *Wahrscheinlichkeit* eingegangen werden. Etwas ist *wahr-scheinlich* heißt wörtlich: „es *scheint* wahr zu sein". „Es ist wahrscheinlich, dass A" heißt im Grunde soviel wie „es ist wahrscheinlich, dass A *wahr* ist". Man könnte daher annehmen, dass Wahrscheinlichkeit und Wahrheit strukturell übereinstimmen. Es sind aber wesentliche Unterschiede zu konstatieren:

– Die Wahrscheinlichkeit wird meist *quantitativ* angegeben, z. B. in Prozent: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A" heißt: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A wahr ist". Die Wahrheit wird dagegen normalerweise *qualitativ* (2-wertig) angegeben: wahr oder falsch.

– Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die *Objekt-Ebene*, z. B. auf einen realen Sachverhalt. Wahrheit bezieht sich auf eine *Meta-Ebene*, man gibt an, ob ein Satz (oder ein Urteil, ein Gedanke usw.) mit der Realität übereinstimmt (= wahr) oder nicht übereinstimmt (falsch).

– Damit hängt zusammen: Die Wahrscheinlichkeit (als relative Häufigkeit) ist erst einmal ein *objekt-sprachlich,* z. B: 75% aller F sind G; man kann das allerdings auch *meta-sprachlich* ausdrücken: ‚Der Satz A hat eine Wahrscheinlichkeit von 75%'. Dagegen wird Wahrheit überwiegend *meta-sprachlich* verwendet, bezogen auf *Sätze*.

Obwohl man also bei der Wahrheit normalerweise nur wahr und falsch unterscheidet, lässt sich aber doch ein *Wahrheitsgrad* konstruieren. Dieser ist klar von der Wahrscheinlichkeit abzugrenzen, wird aber aus ihr hergeleitet. Genauso wie es hier um *empirische* Wahrscheinlichkeit geht, geht es hier auch um *empirische* Wahrheit.

Mit dem Wahrheitsgrad wird der *Grad* angegeben, zu dem ein Satz *mit der Wirklichkeit übereinstimmt*. Ich schreibe den Wahrheitsgrad mit ‚w'. Drei unterschiedliche Fälle:

<u>Reale p: 1, ausgesagte p: r/n, Wahrheitsgrad w: r/n (bzw. Dezimal- oder Prozentwerte)</u>

Angenommen die *Realität* sei: 100 % aller Menschen sind sterblich. (Sachverhalt: p = 1)
Jemand macht aber die *Aussage*: ‚40% aller Menschen sind sterblich'. (Satz: p = r/n)
Dann ist seine Aussage zu 40% (0,4) wahr bzw. zu 60% (0,6) falsch. (Wahrheit: w = r/n)
Man berechnet also einen *Wahrheitsgrad* w, für den gilt (wie für ‚p'): $0 \leq w \leq 1$.
Hier gilt ganz einfach: w = *ausgesagte* p. Allgemein: $p(\Phi) = 1 \;\Rightarrow\; w[‚p(\Phi) = r/n'] = r/n$.

<u>Reale p: r/n, ausgesagte p: 1, Wahrheitsgrad w: r/n</u>:

Z. B.: Real: 60% aller Sportler sind gesund. Satz: ‚100% aller Sportler sind gesund'.
Wahrheitsgrad des Satzes: 60%. Allgemein: $p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; w[‚p(\Phi) = 1'] = r/n$.

<u>Reale p: r/n ($\neq$ 1), ausgesagte p: s/n ($\neq$ 1), Wahrheitsgrad w: nach Formel</u>

Z. B.: Real: 50% aller Lehrer rauchen. (p = r/n) Satz: ‚70% aller Lehrer rauchen'. (p = s/n)
Hier muss man etwas anders vorgehen, wobei es *zwei* unterschiedliche Möglichkeiten gibt.
1) $w[‚p(\Phi) = r/n'] = 1 - |r/n - s/n|$. Z. B. $w[‚p(\Phi) = 0{,}5'] = 1 - |0{,}5 - 0{,}7| = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
Der Wahrheitsgrad w beträgt nach diesem ersten Berechnungs-Modell somit 80% bzw. 0,8.
2) Man berechnet zunächst wie oben die absolute Abweichung (hier: 70 – 50 = 20), dann die *prozentuale* Abweichung, im Beispiel: 50/20 = 100/x. x = (100 x 20)/50 = 40 (bzw. 40%).
Eine Abweichung um 20% vom Wert 50% entspricht eben 40% Abweichung von 100%.
Diesen *Falschheitsgrad* f (hier: 40%) zieht man dann von 100% ab: 100 – 40 = 60.
Der Wahrheitsgrad w beträgt somit nach diesem zweiten Berechnungs-Modell 60% bzw. 0,6.

Um Missverständnisse zu vermeiden, sollte man also für den Wahrheitsgrad nicht ‚p' verwenden, sondern ‚w', also: w(‚70% aller Lehrer sind Raucher') = 0,6.

Genauer ist es, wenn man den Wahrheitsgrad des Satzes *relativ* angibt, bezogen auf den gegebenen Sachverhalt. Das hieße in unserem Beispiel:

w(‚70% aller Lehrer sind Raucher', 50% aller Lehrer sind Raucher) = 0,6.

Man muss dies aber nicht so deuten, dass man einen *Satz* (sprachlich) mit einem *Sachverhalt* (real) vergleicht. Man kann dies auch *neutral* so interpretieren, dass man angibt, inwieweit eine *Relation* mit einer anderen Relation *übereinstimmt*.

Schreibt man dies *halb-formal*, so ergibt sich:

Ausgang-Relation: p(Lehrer → Raucher) = 0,7. Bezugs-Relation: p(Lehrer → Raucher) = 0,5

w[p(Lehrer → Raucher) = 0,7, p(Lehrer → Raucher) = 0,5] = 1 – 0,4 = 0,6

Formal: $w[p(F \rightarrow G) = 0{,}7,\ p(F \rightarrow G) = 0{,}5] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Dies gelingt nicht bei *individuellen* Sätzen. Angenommen, es gilt: 70% aller x sind klug. Ich betrachte nun ein beliebiges Individuum x_i. Dann darf ich sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' gilt *mit* 70 % Wahrscheinlichkeit. Aber ich kann nicht sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' ist *zu* 70% wahr'.

Allgemein lässt sich am Beispiel der Implikation $X \rightarrow Y$ definieren:

$w(X \rightarrow Y) = 1$	Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) wahr
$w(X \rightarrow Y) = 0$	Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) falsch
$0 < w(X \rightarrow Y) < 1$	Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist partiell wahr bzw. partiell falsch.

Auf der *empirischen* Ebene gilt also:

Der *Wahrheitsgrad* ist nicht identisch mit der *Wahrscheinlichkeit*, aber aus ihr abzuleiten.

Wir werden später sehen, dass dagegen auf der *theoretischen* Ebene gilt:

theoretischer Wahrheits-Grad (Tautologie-Grad) = *theoretische Wahrscheinlichkeit.*

Die Wahrheits-Interpretation stelle ich aber einmal zurück, sie trifft nicht wirklich die Intention der logischen Relationen. Für *relative Häufigkeit* oder *Wahrscheinlichkeit* verwende ich wie gesagt gleichermaßen den Buchstaben ‚p'. Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit symbolisiere ich durch ‚p^T'. Ansonsten bevorzuge ich die *Quantitäts-Interpretation* (r von n X sind Y). Bei *individuellen* Sätzen kommt allerdings nur die Häufigkeits-Interpretation in Frage (in r von n *Fällen* ...). Diese Thematik wird uns später noch beschäftigen.

1-3-0-3 BERECHNUNG DER RELATIVEN QUANTITÄT

Die konkrete Berechnung soll am Beispiel der *Implikation* $p(X \rightarrow Y) = r/n$ erläutert werden.

$p(X \rightarrow Y) = r/n$ ist z. B. zu lesen als: ‚Die Wahrscheinlichkeit von $p(X \rightarrow Y)$ beträgt r/n'.

Die Berechnung von ‚p' vollzieht sich anhand der *Wahrheitstafel:*

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$q(X \wedge Y) = a$
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y) = b$
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y) = c$
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y) = d$

• *Zähler*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in den *belegten* Welten, d. h. in den *+Welten*, in denen + unter dem Relator → steht. Im Beispiel: a + c + d.

• *Nenner*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in *allen* Welten, d. h. in den *+Welten* und *–Welten*. Der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.

• *Wahrscheinlichkeit p*: Zur Berechnung von p dividiert man also (vereinfacht) die günstigen Fälle durch alle Fälle.

$$\frac{Fälle:(+)Welten}{Fälle:(+)Welten + Fälle:(-)Welten}$$

Für die (relative Häufigkeit der) Implikation ergibt sich daher folgende Formel:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Bei der Quantifizierung von Relationen gilt grundsätzlich:

a + b + c + d > 0. Denn mit a + b + c + d sind eben alle möglichen Welten erfasst.
r = 0, 1, ... , n. Anders formuliert: $0 \leq r \leq n$
n = 1, 2, ... Und: n = a + b+ c + d
$0 \leq p \leq 1$

Die Herleitung der Formel für die Implikation soll noch ausführlicher erläutert werden. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

• Bezug auf die *absoluten* Größen $q(X \wedge Y) = a$, $q(X \wedge \neg Y) = b$ usw.

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}$$

Den Nenner kann man einfacher schreiben:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X) + q(\neg X)}$$

Anstelle von $q(X) + q(\neg X)$ könnte man auch $q(Y) + q(\neg Y)$ angeben.
Mit Verwendung von a, b, c, und d lässt sich die Formel aber einfacher schreiben:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

• Bezug auf die *relativen* Größen $p(X \wedge Y)$, $p(\neg X \wedge Y)$, $p(\neg X \wedge \neg Y)$

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Zur Erläuterung folgendes Beispiel (die Zahlen sind willkürlich gewählt):
„70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß“, halbformal:
$p(X \rightarrow Y)$: p(deutsche Apfelsorte → schmeckt süß) = 70/90 = 7/9 = 0,78

X = deutsche Apfelsorte, Y = schmeckt süß
a = Anzahl der deutschen Apfel, die süß schmecken: 25
b = Anzahl der deutschen Äpfel, die nicht süß (sauer) schmecken: 20
c = Anzahl nicht deutscher (ausländischer) Äpfel, die süß schmecken: 15
d = Anzahl nicht deutscher Äpfel, die nicht süß schmecken: 30

• *Absolute Quantität*
Beispiel: „70 deutsche Apfelsorten schmecken süß“

z. B.: a = 25, b = 20, c = 15, d = 30 (n = 90)
Die absolute Quantität der Beispiel-Relation ist hier a + c + d = 70

• *Relative Quantität*
Beispiel: „70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß".
Hierbei werden auch die nicht-deutschen Apfelsorten im Nenner wie im Zähler hinzugezählt (also c + d). Das mag unserer Intuition widersprechen, dieses Resultat ergibt sich aber eben aus der logischen Definition der *Implikation*. Die Problematik wird also nicht erst durch die *Quantifizierung* erzeugt; genauso erscheint es unserem normalen Sprachverständnis wenig plausibel, dass ein Wenn-dann-Satz auch als wahr gilt, insofern der Wenn-Satz falsch ist.

Es ergibt sich also der Satz: „x_i ist eine deutsche Apfelsorte → x_i schmeckt mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 7/9 süß".

Dieser Satz ist auch wahr, wenn es gar keine deutschen Apfelsorten gibt (a + b = 0), er schließt eben nur aus, dass deutsche Apelsorten zu einem anderen Prozentsatz süß schmecken.

Man kann diese Problematik umgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* verwendet (dazu später); der Vorteil der normalen Implikation ist allerdings, dass sie alle *möglichen* Welten mit einbezieht und eindeutige Gültigkeits-Zuordnungen vornimmt. Besondere Probleme für die Implikations-Formel entstehen bei Relationen, die sich auf *unendliche* Mengen beziehen, wie im nächsten Punkt gezeigt werden wird.

• *Zahlentheorie*
Zur numerischen Darstellung *absoluter* Größen seien nur *natürliche* Zahlen (n = 0, 1, 2, ...) verwendet.

Bei der numerischen Darstellung *relativer* Größe bzw. Wahrscheinlichkeit sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:
- *Bruchdarstellung*: Die hier verwendeten Brüche sind *rationale Zahlen*. Rationale Zahlen sind Quotienten aus ganzen Zahlen, d. h. alle *positiven und negativen Brüche* ± r/n, wobei r und n *natürliche Zahlen* sind. Die Menge der natürlichen Zahlen N ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen Q, also: $N \subset Q$. Andererseits sind die beiden Mengen N und Q äquivalent. Somit ist auch die Menge der rationalen Zahlen *abzählbar unendlich*. Die in der quantitativen Logik verwendeten Brüche sind aber nur eine *Teilmenge* der rationalen Zahlen, weil hier nur positive Brüche ($r \geq 0$) vorkommen und nur Brüche ≤ 1, d. h. $r \leq n$.
- *Dezimaldarstellung*: Bei der Dezimaldarstellung bzw. den Dezimalbrüchen muss differenziert werden. Einem Bruch wie 1/2 entspricht eine *endliche* Dezimalzahl, hier 0,5. Dagegen entspricht z. B. dem Bruch 1/3 eine *unendliche* Dezimalzahl, nämlich 0,333333 ... = $0,\overline{3}$. Wir können aber auch 1/2 als unendliche Dezimalzahl schreiben, nämlich als 0,499999 ... = $0,\overline{49}$. Alle diese unendlichen Dezimalzahlen sind *periodisch*, d. h. es tauchen in Folge oder im Wechsel immer dieselben Zahlen auf. Solche unendlichen periodischen Dezimalbrüche gelten als rationale Zahlen. Davon zu unterscheiden sind unendliche *nicht-periodische* Dezimalzahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, z. B. $\sqrt{5}$ = 2,2360679 ... (hier gibt es keine periodische Zahlenwiederholung). Diese Zahlen nennt man *irrational*, die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die (überabzählbar unendlichen) *reellen* Zahlen.

Man könnte die *rationale* Dezimalzahl 1 als 1,00 (mit 2 Stellen hinterm Komma) schreiben, um sie deutlich von der *natürlichen* Zahl 1 abzugrenzen, der Einfachheit halber verzichte ich aber normalerweise darauf. Entsprechendes gilt für 0,00 vs. 0.

Wichtig ist, dabei folgendes im Blick zu halten: Auch wenn die *absoluten* Größen r und n *infinite* Werte sein können, die relative Größe (Wahrscheinlichkeit) einer Relation oder Aussage ist immer *finit*, denn es gilt wie gesagt: $0 \leq p \leq 1$, p hat maximal den Wert 1. Obwohl der Wertebereich 0 bis 1 also *abgeschlossen* ist, gibt es dennoch innerhalb dieses Wertebereichs *unendlich* viele rationale Zahlen.

1-3-0-4 ENDLICHKEIT UND UNENDLICHKEIT

• *Arten von Unendlichkeit*

Die Quantität einer Relation / eines Satzes kann *finit* sein (endlich) oder *infinit* (unendlich).

Im Einzelnen unterscheidet man bei *unendlich* zwischen:

– *abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *natürlichen* Zahlen)

– *überabzählbar* bzw. *nicht abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *reellen* Zahlen).

Des Weiteren unterscheidet man zwischen:

– *aktual* unendlich, d. h. unendlich *seiend* (z. B. die Menge der natürlichen Zahlen)

– *potentiell* unendlich, d. h. unendlich *werdend* (z. B. Zahlenfolgen oder Funktionen), wie es vom *Grenzprozess* bzw. Grenzwert bekannt ist.

Genauer kann auf die verschiedenen Unendlichkeitsbegriffe hier nicht eingegangen werden.

Die Unterscheidung zwischen *endlich* und *unendlich* ist durchaus auch für die Logik von Bedeutung. Quantoren- bzw. prädikaten-logisch kann man z. B. zwischen *finiten* und *infiniten* All-Relationen folgendermaßen unterscheiden:

– endlich: $\Lambda x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$

– unendlich : $\Lambda^{\infty} x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots$

oder: $= Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge \ldots$

Diese Schreibweise erklärt sich wie folgt: Auch wenn die Menge der natürlichen Zahlen *unendlich* ist, steht das *n* doch dafür, dass eine *letzte* natürliche Zahl als Index eingesetzt wird, also eine *endliche Folge* vorliegt. Bei einer *unendlichen Folge* gibt man gar *keine letzte Zahl* an (allerdings wäre eine andere Notation wohl überzeugender). In der Mathematik hat man es vor allem mit *Zahlen-Folgen* zu tun: $a_n = a_1, a_2, \ldots , a_n$. In der Logik haben wir es vor allem mit Verknüpfungen (z. B. Konjunktionen) von *Aussagen-Folgen* zu tun.

• *Probleme infiniter Relationen*

Ich bin bisher stillschweigend von *finiten* (*endlichen*) Mengen bzw. Relationen ausgegangen. Denn *infinite* Relationen oder Aussagen werfen besondere Probleme auf. So kann man infinite All-Aussagen nicht *verifizieren*, da man nicht eine unendliche Anzahl von Objekten überprüfen kann. Und aus einer unendlichen Menge kann man auch keine *Stichprobe* ziehen. Dies ist allerdings primär ein Problem der Wissenschaftstheorie, weniger der Logik.

Die Unendlichkeit spielt aber auch in der Logik, vor allem in der *quantitativen Logik* eine Rolle. Dabei ergibt sich folgendes Problem: Wenn man den Objektbereich von logischen Relationen nicht einschränkt, so beziehen sie sich (und entsprechend auch die Formel) auf fast *alle Objekte der Welt*. Nehmen wir zur Analyse die Implikation $X \rightarrow Y$:

Z. B. „Alle Menschen sind Erdbewohner", also: Mensch (=X) → Erdbewohner (=Y).

Es gibt folgende 4 Möglichkeiten bzw. Welten:

q(Mensch ∧ Erdbewohner) = a

q(Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = b

q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner) = c

q(Nicht-Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = d

Wir prüfen das auf *endlich* oder *unendlich*:

– Menschen: vermutlich gibt es (zu allen Zeiten) nur *endlich* viele Menschen

– Erdbewohner: gibt es zwar ein Vielfaches von der Anzahl der Menschen (nämlich alle irdischen Lebewesen), aber wohl *endlich* viele Erdbewohner

– Nicht-Menschen: das sind alle Objekte, die keine Menschen sind, dies könnte durchaus eine *unendliche* Menge sein (wenn das Universum räumlich oder zeitlich unendlich ist)

– Nicht-Erdbewohner: das könnte auch eine *unendliche* Menge sein, wenn es z. B. auf unendlich vielen anderen Planeten andere Lebewesen gibt

Dann lassen sich daraus die Un-/Endlichkeits-*Vermutungen* für die Konjunktionen ableiten:

q(Mensch $\wedge$ Erdbewohner)	a	finit
q(Mensch $\wedge$ Nicht-Erdbewohner)	b	finit
q(Nicht-Mensch $\wedge$ Erdbewohner)	c	finit
q(Nicht-Mensch $\wedge$ Nicht-Erdbewohner)	d	infinit

Bei ‚c' kommt man zu der Einschätzung „finit", obwohl die Menge der Nicht-Menschen infinit sein mag; denn wenn die Menge der Erdbewohner finit ist, kann die Größe der Konjunktion q(Nicht-Mensch $\wedge$ Erdbewohner) auch nur finit sein; entsprechendes gilt für ‚b'.

Dies bedeutet (vermutlich) für die Formel der Implikation:

$$p(X \to Y) = \frac{a(finit) + c(finit) + d(\neg finit)}{a(finit) + b(finit) + c(finit) + d(\neg finit)} = \frac{r}{n}$$

Dann steht im Zähler wie im Nenner eine *infinite* 'Zahl', nämlich ‚d'. ‚d' steht wie gesagt für q($\neg$X $\wedge$ $\neg$Y). Damit sind die endlichen Werte vernachlässigbar, weil jeder endliche Wert verschwindend gering ist im Vergleich zu einer infiniten ‘Zahl’. Also ist der Wert der Gleichung nahe 1 oder auch genau 1; denn zwei unendliche Mengen gelten als *gleich groß*, es sei denn, eine ist *abzählbar* unendlich, die andere aber *überabzählbar*, somit größer.

$$\frac{r = \infty}{n = \infty} \approx 1 \quad \text{oder} \quad \frac{r = \infty}{n = \infty} = 1$$

Dies würde bedeuten, dass für alle derartigen Formeln, bei fast jeder Implikation, sich ein Wert von (annähernd) 1 ergibt. Denn ‚d' ist ja der absolute Wert der *Negation* von X und von Y, genau: d = q($\neg$X $\wedge$ $\neg$Y). Wofür immer X und Y stehen, deren Negation führt – in einer infiniten Welt – zu einer infiniten Größe. Das ist natürlich ganz unerwünscht. Man erfährt nichts über das *Verhältnis des spezifischen X zu dem spezifischen Y*.

Es gibt noch einen *zweiten Problemfall*: Bei anderen Relationen – etwas der *Konjunktion* – ergibt sich leicht, wie später genauer gezeigt werden soll, dass der *Zähler* q(X $\wedge$ Y) *endlich* ist, der *Nenner* n aber *unendlich*: Damit ist der Wert des Bruchs nahe 0, egal, wie groß der Zähler ist (man kann auch postulieren, dass der Wert sogar genau 0 ist).

$$\frac{q(X \wedge Y)}{n = \infty} \approx 0 \quad \text{d. h. } \textit{allgemein} \quad \frac{r}{n = \infty} \approx 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{n = \infty} = 0$$

Auch dies ist ein unerwünschtes Ergebnis, denn man will wiederum eine *spezifische* Relation zwischen X und Y ausdrücken und nicht – durch einen unendlich großen Wert von ‚d' (das eigentlich uninteressant ist) – einen Bruch mit dem Wert von 0 bekommen.

Das Problem stellt sich auch, wenn man es nicht mit unendlichen Werten, sondern endlichen, aber *sehr großen* Werten zu tun hat. Angenommen, unser Universum ist *räumlich und zeitlich endlich*, dann kann dennoch ein sehr hoher Wert, insbesondere von ‚d', zu wenig brauchbaren Ergebnissen führen.

• Mathematische Behandlung der Unendlichkeit
Man könnte allerdings kritisieren, dass die obige Gleichung für die Implikation nicht korrekt ist, denn ein Bruch ∞/∞ ist in der Mathematik *nicht definiert*. Stattdessen verwendet man *Grenzwert*-Berechnungen.

Für die Implikation $p(X \to Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n}$ gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: r = n, b = 0. Hier könnte man folgende Formel aufstellen:

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} = 1$ oder $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} \to 1$ Auf diese Weise erhält man auch den Wert 1.

2. Möglichkeit: r < n, b > 0. Diese Möglichkeit ist interessanter; wir können aber nicht generell angeben, wie groß b und damit r genau ist. Nehmen wir hier nur folgendes Beispiel:
$r = \sqrt{n}$. Dann können wir schreiben: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r}{n} = 0$ bzw. allgemein $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$
Mit der Grenzwertberechnung erhalten wir also ein anderes Ergebnis als oben angegeben: Dort hatten wir gesagt, der Größenunterschied zwischen zwei unendlichen Mengen ist vernachlässigbar, danach erhielte man immer: ∞/∞ = 1. Hier haben wir es mit zwei unendlichen Mengen n und n^2 zu tun, es ergibt sich aber als Grenzwert für den Quotienten n/n^2 aber nicht der Wert 1, sondern der Wert 0. Wie erklärt sich das? Dazu müssen wir etwas ausholen:
Wir haben es hier mit 2 Mengen zu tun:

der Menge der *natürlichen Zahlen*: N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
die Menge der *Quadratzahlen* X^2 = {1, 4, 9, 16, 25, ...}

Wenn man diese beiden Mengen einander zuordnet, ergibt sich:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
n^2:	1			4					9							16 ...

Dabei zeigt sich einerseits: Die Menge der Quadratzahlen ist *Teilmenge* der Menge natürlichen Zahlen: $X^2 \subset N$; andererseits: Die Menge N und X^2 besitzen die *gleiche Mächtigkeit*, beide sind *abzählbar unendlich*; das erscheint zunächst paradox, ist aber mathematisch beweisbar. Außerdem sieht man, dass n^2 viel schneller steigt als n, eben in der Potenz.

Bei der obigen Rechnung: ∞/∞ = 1 waren wir vom Begriff *aktual unendlich* ausgegangen (vgl. oben): zwei unendliche *Mengen* wurden als Quotient dargestellt (was aber wie gesagt mathematisch als nicht definiert gilt). Bei der Grenzwertrechnung geht man vom Begriff *potentiell unendlich* aus. Zwei Zahlen-*Folgen*, nämlich n und n^2, tendieren in Richtung unendlich. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass dies auf den Grenzwert 0 zuläuft, wenn man sich die Quotienten-Folge veranschaulicht:

1/1 (= 1,0), 2/4 (= 0,5), 3/9, 4/16, 5/25, 6/36, 7/49, 8/84, 9/81, 10/100 (= 0,1) usw.

Hier werden also nicht zwei *abgeschlossene* unendliche Mengen in Beziehung gesetzt, sondern es geht um die Entwicklung des Größenverhältnisses von n/n^2 (vgl. hierzu auch Kap. 3).

Weiter werde ich auf diese Problematik nicht eingehen, ohnehin möchte ich nur eine *informelle* Unendlichkeits-Darstellung geben, ich kann hier nicht in die höchst komplizierte *Mathematik der Unendlichkeit* einsteigen. Die obigen Differenzierungen sind auch nicht entscheidend. Ob sich nun für die Implikations-Formel $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$ bei infinitem r bzw. n prinzipiell 1, 0 oder „nicht definiert" ergibt, solche generellen Werte sind inadäquat. Es zeigt sich, dass ein Bruch mit einem *unendlichen* Wert im Zähler und Nenner oder auch nur im Nenner für die uns hier interessierende Berechnung ungeeignet ist.

1-3-0-5 LÖSUNGEN DES UNENDLICHKEITS-PROBLEMS

Ich möchte nachfolgend zwei Lösungen für das *Unendlichkeits-Problem* vorstellen: *Festlegung eines Definitionsbereichs* und *Limitierung der Negation*.

• *Festlegung eines Definitionsbereichs*

Hier wird der *Anwendungsbereich*, der 'universe of discourse', auf eine bestimmte Klasse eingegrenzt, es wird ein *Definitionsbereich* festgelegt, d. h. die Relation bezieht sich nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums. Z. B. die Aussage: Λx(Mensch(x) $\rightarrow$ sterblich(x)). In der normalen Sprache würde dieser Satz lauten: ‚Alle Menschen sind sterblich', es ist eine Aussage nur über *alle* Menschen. Durch die Struktur der logischen *Implikation* ergibt sich aber ein anderes Ergebnis: Es ist eine Aussage über *alle x*, also alle Objekte des Universums, auch über die Nicht-Menschen. Mag die Menge der Menschen *endlich* sein, wenn die Menge aller Objekte des Universums (also aller x) *unendlich* ist, dann handelt es sich dennoch um eine *infinite* Aussage. Mit der *normalen Implikation* gibt es hier kein Entkommen.

Wie sieht es mit der *Positiv-Implikation* aus? Die besagt ja nur: „*Wenn* ein X ein Mensch ist, dann ..." – und wenn das falsch ist, gilt sie als *undefiniert*. Dies könnte also eine Lösung sein: Man muss hier *nur* die Menschen erfassen, also (vermutlich) eine *endliche* Menge.

Noch sicherer geht man jedoch, wenn ein *Definitionsbereich* festgelegt wird: Man bezieht eine Aussage nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums, sondern direkt auf eine *finite Menge* (Definitionsbereich). Im Beispiel legt man fest: x = Mensch. So gilt z. B.:

Λx = Mensch(Fx $\rightarrow$ Gx) lies: ‚für alle x = Mensch gilt ...'

Dies ist nur eine Aussage über die Menschen, also eine *endliche* Menge. Das hebelt die Struktur der Quantoren-Logik zwar etwas aus, muss aber erlaubt sein.

(Allerdings könnte man eventuell weiterfragen: Muss man, um die x, die Menschen sind, von den anderen abzutrennen, zunächst doch *alle* Objekte untersuchen, also eine *infinite* Menge?)

• *Limitierung der Negation*

Auch wenn wir x (auf die Menge der Menschen) *eingeschränkt* haben, bleibt ein weiteres Problem bestehen. Betrachten wir den Satz: ‚Alle Männer sind klug', halb formal:

Λx = Mensch(Mann (x) $\rightarrow$ klug (x))

„Klug" ist normal-sprachlich eine *Eigenschaft*. Was ergibt sich, wenn man „klug" *verneint*, also „¬klug" angibt? Bei *Prädikatoren*, die in der normalen Sprache *Eigenschaften* ausdrücken, also *Adjektive*n, ergibt sich normal-sprachlich automatisch, dass die *Negation* sich nur auf die *betreffende Eigenschaft* bezieht. Wenn man von jemand sagt, er ist nicht klug, dann meint man *nicht*, er ist z. B. groß, dick, reich oder gesund, sondern man meint, er ist dumm. Auch logisch wird dies normalerweise so interpretiert.

Streng betrachtet kann aber „nicht klug" jede mögliche andere Eigenschaft meinen, also prinzipiell eine *infinite* Menge. Um das Problem zu lösen, müssen wir uns klarmachen, "klug" und „dumm" sind nur zwei *Ausprägungen* auf der *Merkmalsdimension* „Intelligenz". Genauer werden wir auf die quantitativen Ausprägungen noch eingehen, aber man kann sagen: Innerhalb der Dimension „Intelligenz" bedeutet „dumm" die Verneinung von „klug" und umgekehrt. Und wenn wir eine Aussage über kluge Männer machen, dann wollen wir sie eben unterscheiden von dummen Männern, aber nicht von reichen, kleinen oder alten Männern.

Es ist also zunächst zu fragen, ob etwas überhaupt eine Ausprägung von Intelligenz haben kann, z. B. ein Stein ist weder klug noch dumm, diese Begriffe lassen sich nicht auf ihn anwenden. Man könnte sagen, er besitzt keine „Intelligenzfähigkeit". Man kann festlegen:

intelligenzfähig $\leftrightarrow$ klug >< dumm, als *Definition*: intelligenzfähig $\leftrightarrow_{df}$ klug >< dumm.

Dann bedeutet: ¬klug = dumm, ¬dumm = klug (zur genauen Formalisierung vgl. unten).

Das gleiche Problem, wenn auch etwas abgeschwächt, stellt sich bei der *Negation* von Prädikatoren, die in der normalen Sprache *Gegenstände* (traditionell Substanzen) bezeichnen, also *Substantive* wie z. B. ‚Mann'. Die moderne Logik unterscheidet wie schon beschrieben nicht zwischen Substantiven und Adjektiven; sie unterscheidet also nicht zwischen ‚Mann' und ‚männlich' – insofern stellt sich bei ihr das Problem in gleicher Schärfe.

Was ist die *Negation* von ‚Mann'? Was bedeutet ‚¬Mann'? Zunächst einmal könnte unlimitiert jede mögliche Entität damit bezeichnet werden; nun haben wir aber im Beispiel den Definitionsbereich auf die Klasse der Menschen festgelegt, es gilt: $\Lambda x(\text{Mann}(x) \rightarrow \text{Mensch}(x))$. Somit muss (hier) auch ein Nicht-Mann ein Mensch sein. Dennoch gibt es verschiedene denkbare Negationen von ‚Mann', z. B. ‚Junge', ‚Kind', ‚Mutter', ‚Mädchen', Feigling' u. ä.

Auch hier müssen wir also wieder eine Festlegung vornehmen: Demnach sind „Mann" und „Frau" die beiden relevanten Ausprägungen auf der Dimension „*Geschlecht*". Wir können Menschen natürlich auch anders unterteilen bzw. einteilen, in arme und reiche, gesunde und kranke, schöne und hässliche u.v.m. Aber wenn wir als einen Pol „Mann" festlegen, dann bedeutet ¬Mann = Frau, dann ist der relevante Gegenpol „Frau".

Anders gesagt: Wir gehen davon aus, die Klasse der Menschen lässt sich (u. a.) aufteilen in die Teilklasse der Männer und die Teilklasse der Frauen. Dies bedeutet halb-formal:

$$\text{Mensch} \leftrightarrow \text{Mann} \vee \text{Frau} \quad \text{bzw.} \quad \text{Mensch} \leftrightarrow \text{Mann} >< \text{Frau}$$

(wir verwenden das ausschließende „oder" ><, wenn wir festlegen wollen, dass ein Mensch *entweder* Mann *oder* Frau ist).

Quantoren-logisch würden wir schreiben: $\Lambda x(\text{Mensch}(x) \leftrightarrow \text{Mann}(x) >< \text{Frau}(x))$.
Angenommen, man macht eine Aussage über die *Teilklasse* der *Männer*. Die Negation der Teilklasse der Männer, also die Nicht-Männer, sind dann nicht mehr alle *Objekte* außer den Männern, sondern alle *Menschen* außer den Männern, also die *Teilklasse* der *Frauen*; und diese Menge muss finit sein, wenn die Menge aller Menschen finit ist. Logisch lässt sich das folgendermaßen (vereinfacht) darstellen:

$$[\text{Mensch} \leftrightarrow (\text{Mann} >< \text{Frau}) \wedge \text{Mensch} \wedge \neg\text{Mann}] \Rightarrow \text{Frau}$$

Somit ergibt sich für unser konkretes Beispiel:

Mann	→ klug			
+	+	Mann ∧ klug	q(Mann ∧ klug)	= a
+	−	Mann ∧ dumm	q(Mann ∧ dumm)	= b
−	+	Frau ∧ klug	q(Frau ∧ klug)	= c
−	−	Frau ∧ dumm	q(Frau ∧ dumm)	= d

$$p(\text{Mann} \rightarrow \text{klug}) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Angenommen, p = 60/100 (dies sind natürlich unrealistisch kleine Werte). Wie Sie das auf ‚a', ‚c', und ‚d' aufteilen wollen, überlasse ich vorsichtshalber Ihnen. Wenn z. B. c = 30 (und d = 0), sind z. B. alle Frauen klug, wenn d = 30 (und c = 0) sind alle Frauen dumm. Die Werte für die Männer entsprechend. Es muss eben nur gelten: b = 40, weil a + b +c + d = 100. Um es noch einmal zu wiederholen: diese merkwürdigen Ergebnisse verdanken wir der *Implikation*, die in 3 von 4 möglichen Welten als wahr gilt; entsprechend müssen wir bei der *quantitativen* Fassung der Implikation *alle Fälle* aus diesen 3 Welten für den Zähler summieren.

Zusammenfassung

Ich gebe noch einmal eine Übersicht über *absolute* und *relative* Quantität:

p(Klasse) = 1, es sei denn q(Klasse) = 0, dann auch p(Klasse) = 0
p(Teilklasse) ≥ 0
p(Teilklasse) ≤ 1, da q(Teilklasse) ≤ q(Klasse)
bei einer *echten* Teilmenge bzw. Teilklasse gilt:
p(Teilklasse) < 1, da q(Teilklasse) < q(Klasse)

A) absolute Quantität q

1) der Klasse	q(Klasse)	z. B. 800
2) einer Teilklasse	q(Teilklasse)	z. B. 200

B) relative Quantität p

1) der Klasse	$\frac{q(Klasse)}{q(Klasse)}$	z. B. 800/800 = 1
2) der Teilklasse	$\frac{q(Teilklasse)}{q(Klasse)}$	
a) echte relative Quantität		z. B. 200/800
b) rechnerische relative Quantität		
• Bruchdarstellung		
- beliebiger Bruch		z. B. 225/900
- maximal gekürzter Bruch (mit natürlichen Zahlen)		z. B. 1/4
• Prozentdarstellung		z. B. 25%
• Dezimaldarstellung		z. B. 0,25

Eine Relation mit p = 0 nenne ich ‚*nullistisch*'. Diesen Terminus verwende ich, weil es keinen eingeführten Terminus gibt. Man könnte auch von 'deterministisch negativ' in Abgrenzung von 'deterministisch positiv' (p = 1) sprechen.

1-3-1 Implikation

1-3-1-1 IMPLIKATION

Die Formel für die Implikation wurde bereits in 1-3-0-3 vorgestellt. Es sei daran erinnert, dass man die Implikation als die beste Repräsentation der *Kopula* ansehen kann. Insofern gilt diese Formel auch für die Kopula. Andererseits wurde auf die Probleme hingewiesen, die sich durch Verwendung der normalen Implikation als Kopula ergeben.

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

1-3-1-2 NEGATIONEN

Es lassen sich verschiedene *Negationen* der Implikation angeben. Die wichtigsten sind die folgenden drei; deren Formeln werden wie beschrieben aus den *Wahrheitstafeln* abgeleitet:

$$p(X \to \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

$$p\neg(X \to Y) = \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$p\neg(X \rightarrow \neg Y) = \frac{a}{a+b+c+d}$$

Ganz korrekt müsste man schreiben: p(¬(X → Y)) u. ä., aber die Schreibung ohne *zweite Klammer* ist übersichtlicher. Normalerweise verwende ich die vereinfachte Schreibung.

1-3-1-3 REPLIKATION

$$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

1-3-1-4 ÄQUIVALENZ

$$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Die doppelt negierte Äquivalenz hat dieselbe Formel:

$$p(\neg X \leftrightarrow \neg Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

1-3-1-5 KOMPLEXERE FORMELN

Bisher sind wir von *2 (zwei)* Variablen X, Y ausgegangen; bei denen ergeben sich $2^2 = 4$ Kombinationsmöglichkeiten. Mit *3 (drei)* Variablen X, Y, Z ergeben sich $2^3 = 8$ Möglichkeiten und damit *komplexere Formeln*.

Ich bringe unten eine Übersicht über die möglichen *Kombinationen* der 3 Variablen. Dabei gibt es 2 zwei Möglichkeiten, die *absoluten Größen* mit Buchstaben zu bezeichnen: entweder man verwendet 8 unterschiedliche Buchstaben (a bis h) oder man verwendet wie bisher 4 Buchstaben, gibt ihnen aber jeweils 2 unterschiedliche Indizes, also:

a_1, a_2, b_1, b_1, c_1, c_2, d_1,,d_2

X	Y	Z		
+	+	+	a	a_1
+	+	–	b	a_2
+	–	+	c	b_1
+	–	–	d	b_2
–	+	+	e	c_1
–	+	–	f	c_2
–	–	+	g	d_1
–	–	–	h	d_2

Mit 8 Buchstaben sieht die Formel für p(X → Y) folgendermaßen aus:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+b+e+f+g+h}{a+b+c+d+e+f+g+h} = \frac{r}{n}$$

Dies scheint auf den ersten Blick übersichtlicher als die Kennzeichnung mit *Indizes* (unten), aber das Modell mit Indizes ist systematischer, bietet eine viel bessere Vergleichbarkeit mit 2-Variablen-Relationen und soll deshalb hier bevorzugt werden. Ich notiere also:

$q(X \wedge Y \wedge Z) = a_1$
$q(X \wedge Y \wedge \neg Z) = a_2$
$q(X \wedge \neg Y \wedge Z) = b_1$
$q(X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) = b_2$ usw.

Stellen wir von daher die konkrete *Wahrheitstafel* für X→ Y auf (aber eben auf der Basis von 8 Möglichkeiten):

X	→	Y	
+	+	+	a_1
+	+	+	a_2
+	–	–	b_1
+	–	–	b_2
–	+	+	c_1
–	+	+	c_2
–	+	–	d_1
–	+	–	d_2

Dann ergibt sich z. B. folgende Formel für die *Implikation* X → Y:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Weitere Formeln, für andere Implikationen, sind z. B.:

$$p(Z \rightarrow X) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

$$p(Z \rightarrow Y) = \frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Die eigentliche Funktion der komplexeren Formeln ergibt sich aber erst, wenn man 3 Variablen in *einem* Implikationsausdruck verwendet. So erhält man aus der Wahrheitstafel z. B.:

$$p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Oder, was eben nicht äquivalent ist:

$$p(X \to (Y \to Z)) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

1-3-2 Positiv-Implikation

Ich habe – zuerst in Kapitel 0 – die modifizierte *Positiv-Implikation* X *→ Y eingeführt. Mit der lassen sich Relationen so formalisieren, dass sie näher an unserer Alltagsaufassung bzw. an unserer Alltagssprache sind. Denn ein *Wenn-dann-Satz* ‚Wenn X, dann Y' wird normalsprachlich so aufgefasst, dass er nur die Fälle berücksichtigt, in denen der Wenn-Satz ‚X' *wahr* ist. Oder ein *Kopula-Satz*: ‚X ist ein Y' wird so aufgefasst, dass die *Existenz* von X vorausgesetzt wird. Wie das *quantitativ* umgesetzt wird, sei im Folgenden erläutert.

1-3-2-1 FORMEL

Auch hier kann man zunächst wieder von der *Wahrheitstafel* ausgehen:

X	*→	Y	
+	+	+	$q(X \wedge Y) = a$
+	–	–	$q(X \wedge \neg Y) = b$

$$p(X \ast\!\!\to Y) = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y)} = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X)} = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$$

Die Werte der Positiv-Implikation entsprechen im Wesentlichen der Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der *Statistik*.

Diskrepanz zwischen aussagen-logischem und quantitativen Ansatz

Ich muss hier auf ein Problem hinweisen, das ich bisher nicht vollständig lösen konnte, eine *Diskrepanz* zwischen dem *aussagen-logischen* und dem *quantitativen* Ansatz der Positiv-Implikation:

• aussagen-logischer Ansatz

In diesem qualitativen Ansatz wird mit Wahrheitstafeln gearbeitet. Und zwar hatte ich bei der Positiv-Implikation unterschieden zwischen einer *verkürzten* und einer *vollständigen* Wahrheitstafel:

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–		+
–		–

Und ich hatte ausgeführt, dass sich verschiedene logische Relationen nur plausibel darstellen lassen, wenn man die *vollständige* Wahrheitstafel verwendet, die zusätzlich das Zeichen (undefiniert) und ggf. auch noch ? (unbestimmt) enthält.

• quantitativer Ansatz

Die Formeln des quantitativen Ansatzes beziehen sich aber ausschließlich auf die + und – in der Wahrheitstafel, und ? werden nicht berücksichtigt.

Von daher gibt es in einigen wenigen Fällen Diskrepanzen zwischen diesen beiden Ansätzen, die noch zu klären sind. Bis dahin räume ich aber dem quantitativen Ansatz Priorität ein.

Zwei Modelle der Positiv-Implikation
Es gilt aber, noch eine weitere Unterscheidung zu treffen: Bei der *normalen Implikation* bzw. überhaupt den 4-Welten-Relatoren hatte ich festgelegt:

$$a + b + c + d > 0$$

Begründung: a + b + c + d umfasst *alle* Fälle in *allen* möglichen Welten (bei 2 Variablen X, Y), die Summe kann daher nicht gleich 0 sein, denn dies wäre ein logischer Widerspruch.

Eine wichtige Frage ist: Soll man bei der Positiv-Implikation entsprechend fordern:

$$a + b > 0$$

Dagegen spricht: a + b umfasst ja *nicht* die Fälle in allen möglichen Welten, es könnte ja gelten: a + b = 0, aber c + d > 0.
Dafür spricht: Die Positiv-Implikation wird so verstanden, dass sie von der Gültigkeit des Vordergliedes X ausgeht. D. h. aber, es muss gelten a + b > 0, denn wenn a + b = 0, dann gäbe es gar kein X bzw. X wäre ungültig.

Diese Frage ist ganz entscheidend:

Entweder gilt: $a + b > 0$. Oder es gilt $a + b \geq 0$.

Es lassen sich aus diesen beiden Möglichkeiten *zwei verschiedene Modelle* einer Logik der Positiv-Implikation aufbauen. Im analytischen Bereich wird das ausführlich dargestellt.

1-3-2-2 NEGATIONEN

Hier sollen die Formeln für die wichtigsten *Negationen* der Positiv-Implikation genannt werden:

p(X *→ ¬Y)	p(¬X *→ Y)	p(¬X *→ ¬Y)
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{c}{c+d}$	$\frac{d}{c+d}$

p¬(X *→ Y) hat dieselbe Formel wie p(X *→ ¬Y), also $\frac{b}{a+b}$.

1-3-2-3 REPLIKATION

p(X ←* Y)

$$\frac{a}{a+c}$$

Folgende Negationen der Replikation seien genannt:

p(¬X ←* Y)	p(X ←* ¬Y)	p(¬X ←* ¬Y)
$\frac{c}{a+c}$	$\frac{b}{b+d}$	$\frac{d}{b+d}$

1-3-2-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

$$p(X \ast\!\leftrightarrow Y) = \frac{a}{a+b+c}$$

Die Formel der Positiv-Äquivalenz p(X *↔ Y) lässt sich ableiten aus den Formeln der Positiv-Implikation und Positiv-Replikation:

$$p(X \ast\!\rightarrow Y) \quad \frac{a}{a+b} \qquad\qquad p(X \leftarrow\!\ast Y) \quad \frac{a}{a+c}$$

1-3-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Zur Übersicht ein Vergleich einiger Formeln von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X \ast\!\rightarrow Y) = \frac{a}{a+b}$$

$$p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X \ast\!\rightarrow \neg Y) = \frac{b}{a+b}$$

$$p\neg(X \rightarrow Y) = \frac{b}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \ast\!\rightarrow Y) = \frac{b}{a+b}$$

1-3-3 Systematik

Wir kommen jetzt zu Formeln für andere *Junktoren* bzw. *Relatoren*.

Zur Erinnerung: die Aufstellung der jeweiligen Formel erfolgt aus den *Wahrheitstafeln*. Man dividiert die Anzahl der Fälle in den positiven Welten (+) durch die Anzahl der Fälle in allen Welten (+/–).

1-3-3-1 KONJUNKTION

Es ergibt sich für die *Konjunktion* X ∧ Y:

X ∧ Y	
+ + +	a
+ – –	b
– – +	c
– – –	d

$$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Da die Konjunktion zu den wichtigsten Relationen gehört, wird sie hier genauer dargestellt.

- *Absolute* Quantität: q(X ∧ Y) = r oder spezieller: q(Fx ∧ Gx) = r.
  Beispiel: q(Fx ∧ Gx) = 50, zu lesen: ‚für 50x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.
- *Relative* Quantität: p(X ∧ Y) = r/n oder spezieller: p(Fx ∧ Gx) = r/n
  Beispiel: p(Fx ∧ Gx) = 50/100, zu lesen: ‚für 50 von 100 x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.

Negationen der Konjunktion

X ∧ ¬Y	X >– Y	$\frac{b}{a+b+c+d}$
¬X ∧ Y	X –< Y	$\frac{c}{a+b+c+d}$
¬X ∧ ¬Y	X ∇ Y	$\frac{d}{a+b+c+d}$

1-3-3-2 GESETZE DER KONJUNKTION

Man kann durch eine Formel ausdrücken, wie sich die Wahrscheinlichkeit p einer Konjunktion (bzw. der ihr entsprechenden Relation) aus den Wahrscheinlichkeiten der zwei Glieder der Konjunktion berechnen läst.

Beispiel: (X ↔ Y) ⇔ p(X → Y) ∧ p(X ← Y)

Die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion (X → Y) ∧ (X ← Y) bzw. der äquivalenten Relation (X ↔ Y) wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Konjunktions-Glieder addiert und den Wert 1 subtrahiert.

p(X ↔ Y) = p(X → Y) + p(X ← Y) – 1

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} + \frac{a+b+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{2a+b+c+2d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$$

Dieses Gesetz gilt allerdings nicht uneingeschränkt. Das zeigt folgendes Beispiel:

X >< Y ⇔ (X >< Y) ∧ (X ∨ Y)

$$p(X >< Y) = \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

Dies müsste also aus der Berechnung herauskommen. Real ergibt sich aber:

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{a+b+c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{a+2b+2c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{b+c-d}{a+b+c+d}$$

Man kann die oben genannte Rechenregel aber folgendermaßen ergänzen: *negative Summanden werden gestrichen*.

So wird also in dem Bruch $\frac{b+c-d}{a+b+c+d}$ das ‚d' gestrichen, womit das gewünschte Ergebnis herauskommt.

Fassen wir die *Regel* noch mal zusammen:
Die Wahrscheinlichkeit einer *Konjunktion* $\wedge$ (bzw. der äquivalenten Relation) wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Konjunktions-Glieder addiert und 1 subtrahiert. Negative Summanden werden gestrichen.

1-3-3-3 ANDERE RELATIONEN

Diese Relationen entsprechen X und Y bzw. ¬X und ¬Y.

Präpension (Präpensor) $p(X \rfloor Y) = p(X) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$

Postpension (Postpensor) $p(X \rceil Y) = p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$

Pränonpension (Pränonpensor) $p(X \lfloor Y) = p(\neg X) = \frac{c+d}{a+b+c+d}$

Postnonpension (Postnonpensor) $p(X \lceil Y) = p(\neg Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d}$

1-3-3-4 TAUTOLOGIE UND ANTILOGIE

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass m. E. der *Tautologator* $\top$ und der *Antilogator* $\perp$ nicht als normale Relatoren aufgefasst werden dürfen. Da der Tautologator alles zu einer *Tautologie* verbindet und der Antilogator alles zu einer *Kontradiktion*, gehören sie ohnehin in den analytischen und nicht in den synthetischen Bereich. Dennoch seien ihre möglichen Formeln hier genannt:

$$p(X \top Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

$$p(X \perp Y) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

1-3-3-5 QUANTITATIVE WAHRHEITSTAFEL

Erst jetzt sind die Informationen vorhanden, um ein Thema anzugehen, was eigentlich schon vorher einen Platz verdient hätte: die *quantitative Wahrheitstafel*. Und zwar wollen wir 2 Fälle, am Beispiel der Implikation, unterscheiden (vgl. 2-3-0 und den Exkurs zu Kap. 2):

1) *Gesamt-Ausdruck* / 1fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y) = m/n$
2) *Getrennte Komponenten* / 2fache Quantifizierung: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$

Untersuchen wir diese 2 Fälle gesondert (das ist vor allem für Spezialisten gedacht):

1) *1fache Quantifizierung*: $p(X \rightarrow Y) = m/n$
Die zentrale Frage lautet: Lässt sich eine Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y) = m/n$ angeben?

• Qualitative Wahrheitstafel
Man könnte zunächst meinen, man übernimmt den Wahrheitsverlauf der *qualitativen Implikation* $X \rightarrow Y$. Dies wäre eine einfache und elegante Lösung, die ich auch anfangs für sinnvoll hielt. Für die qualitative Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ gilt:

	X	Y	$X \rightarrow Y$		
1.	+	+	+	$X \wedge Y$	$\Rightarrow X \rightarrow Y$
2.	+	–	–	$X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$
3.	–	+	+	$\neg X \wedge Y$	$\Rightarrow X \rightarrow Y$
4.	–	–	+	$\neg X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow X \rightarrow Y$

Gilt dann entsprechend für $p(X \rightarrow Y) = m/n$?

	$p(X) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p(X \rightarrow Y) = m/n$
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	–	+

Nach genauer Analyse ist diese Darstellung aber nicht haltbar. Aus folgenden Gründen:
Bei einer Wahrheitstafel wird der Wert einer Relation aus den Werten ihrer *Komponenten* abgleitet, als deren Funktion: d. h. die Relation ist *wahrheitswert-funktional*.

Die *Komponenten* sind offensichtlich X und Y, im quantitativen Modell als p(X) und p(Y) zu fassen. Für p(X) und p(Y) sind allerdings keine Werte ausgewiesen. Wir können ihnen aber welche zuweisen und wählen: $p(X) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ (damit wir haben allerdings indirekt keine 1fache, sondern eine 3fache Quantifizierung). Es gibt zunächst keinen Grund, warum man die Werte nicht *unterschiedlich* wählen soll; doch auch wenn man sie gleich wählt, also $p(X) = r/n$ und $p(Y) = r/n$ ergibt sich kein anderes Ergebnis.

Zwar ist $p(X \rightarrow Y)$ nicht völlig unabhängig von p(X) und p(Y), z. B. gilt: $p(Y) \leq p(X \rightarrow Y)$. Das ändert aber nichts daran, dass keine strengen, *genauen* Schlüsse von $p(X) \wedge p(Y)$ auf $p(X \rightarrow Y)$ möglich sind. Man findet nur *partielle, semi-analytische* Schlüsse wie:

$$p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n.$$

Es gibt also keine Methode, aus $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n$ einen sicheren Wert für $p(X \rightarrow Y)$ abzuleiten. Anders als im *qualitativen* Modell, wo aus X und Y bzw. deren Negationen *strenge* Schlüsse auf $X \rightarrow Y$ möglich sind (vgl. die obige Wahrheitstafel).

• Konstanten
Selbst, wenn man anstatt der *Variablen* r/n, s/n und m/n *Konstanten* verwendet, sind hier keine *strengen* Schlüsse möglich. Nur *ein* Beispiel. Erinnern wir uns zunächst, dass gilt:

p(X)	p(Y)	$p(X \rightarrow Y)$
$\dfrac{a+b}{a+b+c+d}$	$\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$	$\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$

Wenn a = 3, b = 1, c = 2, d = 1. Dann: $p(X) = 4/7 \wedge p(Y) = 5/7 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) =$ **6/7**.
Wenn aber: a = 2, b = 2, c = 3, d = 0. Dann: $p(X) = 4/7 \wedge p(Y) = 5/7 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) =$ **5/7.**
D. h. bei gleichen Prämissen $p(X) = 4/7 \wedge p(Y) = 5/7$ kann $p(X \rightarrow Y)$ unterschiedlich sein. Nur, wenn wir *alle* Werte kennen, also a, b, c, und d, können wir sichere Schlüsse vollziehen, aber das ist nur ein Ausnahmefall.

• Zusammengefasste Prämissen
Es wäre vorstellbar, dass wir die Prämissen $p(X) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ zusammenfassen und ihnen somit nur *einen* Wert zusprechen, also: $p(X \wedge Y) = r/n$, entsprechend $p(X \wedge \neg Y) = s/n$ usw. Aber damit wäre nichts gewonnen. $p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n$ ist ebenso nur ein *partieller* Schluss. Allenfalls wären sehr komplizierte Konstruktionen denkbar, der Art: $p(X \wedge Y) = r/n \wedge p(\neg X \wedge Y) = s/n \wedge p(\neg X \wedge \neg Y) = t/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = r/n + s/n + t/n$.

• Synthetische Relation
Eine andere Möglichkeit: Wir können $p(X \rightarrow Y) = r/n$ als *völlig unabhängig* von p(X) und p(Y) behandeln und zwischen den drei eine *synthetische* Relation (mit dem synthetischen Implikator $\rightarrow$ statt dem semi-analytischen $\longrightarrow$) herstellen, daher mit 8 Kombinationsmöglichkeiten, der Form: $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \rightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n$.
Dann ergäbe sich:

p(X):	+ + + + – – – –
p(Y):	+ + – – + + – –
$p(X \rightarrow Y)$:	+ – + – + – + –

Aber $p(X \rightarrow Y)$ ist eben – wie aufgezeigt – nicht *völlig* unabhängig von p(X) und p(Y); das zeigt sich ja *syntaktisch* schon daran, dass X und Y in $p(X \rightarrow Y)$ vorkommen. Daher führt eine synthetische Darstellung auch nicht zu einem realistischen Ergebnis.

• Fazit
Für $p(X \rightarrow Y) = m/n$ lässt sich keine Wahrheitstafel und entsprechend kein Wahrheitsverlauf angeben. Wir müssen $p(X \rightarrow Y)$ als *nicht weiter zerlegbare* Einheit betrachten, entsprechend p(X) und p(Y). $p(X \rightarrow Y) = m/n$ ist nicht wahrheitswert-funktional.

Dennoch kann man $p(X \rightarrow Y)$ wie aufgezeigt durch eine *Formel* wiedergeben, die auf der qualitativen Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ beruht, deren Grundstruktur quantitativ umsetzt, nämlich $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n$.

• Quantitative Aussagen-Logik
Wichtig ist aber: In der quantitativen *Aussagen-Logik*, in der nur die Werte p = 1 und p = 0 vorkommen, sind die Verhältnisse völlig anders. Für $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$ lässt sich nämlich sehr wohl eine Wahrheitstafel angeben, denn wir können $p(X \rightarrow Y) = 1$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 0$ in Abhängigkeit von p(X) und p(Y) angeben, wobei wie gesagt nur folgende Werte zugelassen sind: p(X) = 1, p(X) = 0, p(Y) = 1, p(Y) = 0. Somit ist $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$ auch *wahrheits-wert-funktional* (vgl. Punkt 1-4).

Und anders sieht es auch aus für den Ausdruck mit *zwei getrennt quantifizierten* Komponenten, nämlich: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$. Dafür lässt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel aufstellen, wie ich im Folgenden zeigen werde.

2) *2fache Quantifizierung*: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
In einem solchen Fall ist es technisch möglich, eine logische Wahrheitstafel aufzustellen.

Wir folgen dabei wieder der *aussagen-logischen* Wahrheitstafel für die Implikation:

	X	Y	$X \rightarrow Y$	primäre Deutung der Wahrheitstafel:
1.	+	+	+	$X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
2.	+	–	–	$X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$
3.	–	+	+	$\neg X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
4.	–	–	+	$\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow Y$

Entsprechend stellen wir dann eine *quantitative* Wahrheitstafel auf:

	p(X) = r/n	p(Y) = s/n	p(X) = r/n $\rightarrow$ p(Y) = s/n
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	–	+

Nun müssten auch die entsprechenden Relationen gelten, also:

1. $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
2. $p(X) = r/n \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow \neg[p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n]$
3. $\neg[p(X) = r/n] \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
4. $\neg[p(X) = r/n] \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$

Es mag erstaunen, dass diese Schlüsse gelten sollen, vor allem z. B. in der 4. Zeile mit 2 negativen Prämissen. Aber man geht hier quasi nach einer *logischen Mechanik* vor, die sich aus der *Definition der Implikation* ergibt. Und danach ist eine Implikation eben grundsätzlich wahr bzw. ein Schluss gültig, wenn die Vordersätze negiert bzw. falsch sind.

Allerdings werden hier p(X) und p(Y) quasi *entquantifiziert*, sie werden einfach wie X und Y behandelt. So sind die obigen Schlüsse *mathematisch* gesehen unplausibel oder sogar sinnlos. Das zeigt sich, wenn man eine *quantitative Wahrheitstafel* für $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$ aufstellt. Hierfür sind das + (wahr) und – (falsch) in *Zahlenwerte* zu übersetzen. Dabei bietet sich an:

qualitativ:	quantitativ:	
X (+)	$p(X) = r/n$	
X (–) bzw. $\neg X$	$\neg[p(X) = r/n]$	$p(X) \neq r/n$
Y (+)	$p(Y) = s/n$	
Y (–) bzw. $\neg Y$	$\neg[p(Y) = r/n]$	$p(Y) \neq s/n$

Somit ergibt sich die folgende *quantitative* Wahrheitstafel:

	p(X)	p(Y)	p(X) = r/n $\rightarrow$ p(Y) = s/n
1.	r/n	s/n	+
2.	r/n	$\neq$s/n	–
3.	$\neq$r/n	s/n	+
4.	$\neq$r/n	$\neq$s/n	+

Schon die Werte r/n und s/n, aber vor allem die *negierten* Werte $\neq$r/n und $\neq$s/n sind völlig *unbestimmt*. Sie können, je nach Interpretation der Negation, für viele (u. U. unendlich viele)

Werte stehen. Es ist daher keine Methode erkennbar, mit der man *mathematisch* beweisen könnte, dass hier ein strenger Schluss vorliegt.

Fazit: Die Wahrheitstafel ist generell sinnvoll nur in der (*quantitativen*) *Aussagen-Logik*, aber nicht in einer *allgemeinen quantitativen Logik.* Sie ist gar nicht verwendbar bei Gesamt-Ausdrücken wie p(X → Y) = r/n, und logisch verwendbar, aber mathematisch unplausibel bei getrennten Komponenten wie p(X) = r/n → p(Y) = s/n.

1-3-4 Inklusiv / Exklusiv

1-3-4-1 INKLUSIVES ODER
Das *inklusive* (einschließende) „oder" bzw. die *Disjunktion* ist die wichtigste *oder*-Verknüpfung. Für p(X ∨ Y) gilt die folgende Formel:

$$X \vee Y \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

1-3-4-2 EXKLUSIVES ODER
Das *exklusive* (ausschließende) „oder" wird durch folgende Formel berechnet:

$$X >< Y \qquad \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

1-3-4-3 EXKLUSION
Der Wert der *Exklusion* p(X | Y) berechnet sich wie folgt:

$$X \mid Y \qquad \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

1-3-4-4 NEGATION DER ODER-VERKNÜPFUNGEN

p¬(X ∨ Y)	p¬(X >< Y)	p¬(X | Y)
$\frac{d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a}{a+b+c+d}$

1-3-4-5 GESETZE DER DISJUNKTION
Wie lässt sich eine Disjunktion berechnen? Es gilt folgende Rechenregel:
Man *addiert* die Formeln der Glieder der Disjunktion, streicht aber alle *doppelten* Variablen bzw. Buchstaben weg.

Beispiel: Es gilt: (X >< Y) ∨ (X | Y) ⇔ X |Y

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{2b+2c+d}{a+b+c+d}$$

Streicht man nun das doppelte ‚b' und ‚c', so ergibt sich das erwünschte Ergebnis:

$$p(X \mid Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

1-3-5 Erweiterungen

Hier soll die *intensionale Quantität* behandelt werden. Ich habe bisher nur die *extensionale* Quantität von Objekten bzw. Relationen dargestellt:

- *absolute* Anzahl bzw. absolute Häufigkeit (q)
- *relative* Anzahl bzw. relative Häufigkeit (p)

Denn wie schon gesagt: die Logik geht im Wesentlichen von der extensionalen Quantität aus. Man kann aber auch die *intensionale* Quantität von *Eigenschaften* (*Intensität*) angeben.

Die intensionale Qualität ist der *Grad*, mit dem eine Eigenschaft einem Objekt zukommt. Beispiel: „Peter ist intelligent". Man könnte nun *quantitativ* angeben, *wie* intelligent er genau ist. Im Einzelnen unterscheidet man in der Statistik bzw. der Wissenschaftstheorie verschiedene *Skalen*: *Nominal-Skala, Ordinal-Skala, Intervall-Skala* und *Ratio-Skala*.

1-3-5-1 NOMINAL- SKALA

Hier wird nur unterschieden, ob jemand eine Eigenschaft zukommt oder nicht.
Man spricht von *qualitativen* Eigenschaften oder Merkmalen. Z. B.:

„Fritz ist klug"
„Fritz ist nicht klug (= dumm)"

Auf die Probleme dieser qualitativen Unterscheidung gehe ich noch später ein.
Dies lässt sich im Rahmen der normalen (Prädikaten-)Logik ausdrücken. Fx_i oder $\neg Fx_i$.

1-3-5-2 ORDINAL-SKALA

Auf der *Ordinal-Skala* werden *Größenunterschiede* festgestellt. Dies entspricht grammatisch dem *Komparativ*. Z. B.:

„Fritz ist klüger als Peter"
„Fritz ist dümmer als Peter"
„Fritz ist gleich intelligent wie Peter, nicht klüger und nicht dümmer"

Um das logisch zu schreiben, formuliert man am besten um:

„Die Intelligenz von Fritz ist größer als die Intelligenz von Peter"
halb-formal: q[Intelligenz[Fritz]] > q[Intelligenz[Peter]]
formal: $q[F[x_1]] > q[F[x_2]]$

Zur Abgrenzung von der *extensionalen* Schreibweise kann man z. B. *eckige* Klammern statt *runder* Klammern verwenden.

1-3-5-3 INTERVALL-SKALA

Auf der *Intervall-Skala* arbeitet man mit *Zahlenwerten* bzw. quantitativen Eigenschaften, man verwendet also eine „Messlatte". Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150"

Das obige Beispiel betrifft die *absolute* Quantität. Man kann aber auch die *relative* Quantität angeben. Dies ist allerdings bei der Intelligenz von Menschen nicht ganz unproblematisch. Man könnte etwa festlegen: 180 I. Q ist die *maximale* Intelligenz eines Menschen, und gibt davon die konkrete Intelligenz eines Menschen in Relation zu dieser Maximalgröße an. Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150/180, d. h. er ist zu ca. 83% intelligent"

Eine solche Aussage über die Intelligenz ist aber problematisch, weil es keine natürliche O-bergrenze der Intelligenz gibt (oder sie uns jedenfalls nicht bekannt ist).

Anders wäre dagegen z. B. eine Aussage über den geometrischen Winkel zu beurteilen. Ein normaler Winkel (sehen wir vom überstumpfen Winkel usw. ab) kann einen beliebigen Wert > 0° und < 180° einnehmen. Gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass wir 180° als obersten Winkelwert festlegen. Dann wäre es unproblematisch (wenn auch nicht üblich) zu sagen: ‚Ein Winkel von 90° besitzt 90/180 = 50% Winkelgröße'.

Zurück zum Beispiel mit der Intelligenz:

Halb-formal könnte man schreiben:

q[Intelligenz[Fritz]] = 150 bzw. p[Intelligenz[Fritz]] = 150/180 = 0,83

Formal:

$q[F[x_1]] = 150$ bzw. $p[F[x_1]] = 150/180 = 0{,}83$

Denkbar wäre auch: $0{,}83F[x_1]$

1-3-5-4 RATIO-SKALA

Eine Ratio-Skala ist auch eine metrische Skala, aber im Gegensatz zur Intervall-Skala gibt es bei ihr einen *natürlichen 0-Punkt*. Dies ist bei der Körpergröße der Fall, aber z. B. bei der Temperatur-Skala gibt es keinen natürlichen 0-Punkt. Innerhalb einer Ratio-Skala sind erweiterte mathematische Operationen möglich.

1-3-5-5 FUZZY LOGIK

Die *Fuzzy-Logik* ist auch eine *quantitative* Logik. Nach meiner Auffassung ist das, was in der Fuzzy Logik vollzogen wird, eine *intensionale* Quantifizierung. Nur deutet man das in der Fuzzy Logik quasi *extensional*, nämlich als den *Grad, in dem ein x einer Menge angehört*. Dies besagt aber nicht anderes als den *Grad*, mit dem eine *Eigenschaft* einem Objekt x zukommt. So gesehen findet keine echte extensionale Quantifizierung in der Fuzzy Logik statt (vgl. zur Fuzzy Logik vor allem 1-2-5-5, 1-4-0-1).

Mein Ansatz berücksichtigt zwar auch die *intensionale* Quantifizierung, also die Quantifizierung von Eigenschaften bzw. der Relation, in der eine Eigenschaft einem Objekt zukommt). Aber im Vordergrund steht bei meinem Ansatz die *extensionale* Quantifizierung, nämlich die Angabe der Anzahl der Individuen, die Elemente einer Klasse sind oder denen eine Eigenschaft zukommt.

Um den Unterschied noch einmal am Beispiel zu verdeutlichen:

- *extensional*: „70% aller Menschen sind egoistisch"
- *intensional*: „Der (bzw. dieser) Mensch ist zu 70% egoistisch (zum Grad von 70%)"

Auf einer höheren Ebene kann man das kombinieren oder integrieren:

2fach: „70% der Menschen sind zu 60% intelligent"

3fach: „70% der Menschen, die zu 60% intelligent sind, sind zu 90% hilfsbereit"

Allgemein: 3fach: „r/n aller x, die zu s% Eigenschaft F haben, haben zu t% Eigenschaft G".

Z. B.: $p(s{*}F \rightarrow t{*}G) = r/n$

In der Mathematik und vor allem *Statistik* sind solche und noch komplexere quantitative Verknüpfungen durchaus üblich; anstatt reiner Prozentangaben können dabei auch Formeln stehen. In der Logik ist aber die *Quantifizierung* bis heute eher noch die Ausnahme. Ich versuche in meinem Modell, die Vorteile der Quantifizierung in die Logik einzubeziehen, ohne dabei die Stärken und Eigenständigkeiten der Logik aufzugeben.

1 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

1-4-0 Einführung

Aussagen-logische Relationen scheinen nicht *quantitativ* bestimmt zu sein, anders als in der *Quantoren-Logik* gibt es keine Quantitäts-Zeichen, wenn man nicht die Negation als Quantitäts-Zeichen interpretiert. Wie ich aber schon angemerkt habe, ist *jede* Relation notwendig auch quantitativ (sieht man einmal ab von einer metaphysisch-spekulativen Wirklichkeitssphäre, in der es keine Quantität geben mag). Eine aussagen-logische Relation wie $X \rightarrow Y$ enthält eine verborgene, *implizite Quantität*. Auch jede Aussage der normalen Sprache wie z. B. 'Der Mensch ist sterblich' enthält implizit eine quantitative Struktur, obwohl kein Zahlwort o. ä verwendet wird. Die *quantitative Aussagen-Logik* hat erstens die Funktion, diese implizite Quantität *explizit* zu machen, zweitens, aussagen-logische Relationen zu *quantifizieren*.

Zur ersten Erläuterung der quantitativen Aussagen-Logik bleiben wir zur Einfachheit bei der *Implikation*, die – wie aufgezeigt – eine besonders wichtige Rolle spielt. In der *2-wertigen* Logik gilt für die Implikation: Sie kann *positiv* (gültig) sein und *negativ* (ungültig).

1-4-0-1 QUANTIFIZIERUNG QUALITATIVER KENNZEICHNUNGEN

Ich vertrete also die Auffassung, dass die *qualitativen* Kennzeichnungen „positiv" und „negativ" *implizit* quantitativ sind. Zumindest lassen sie sich quantitativ interpretieren bzw. darstellen, und zwar gilt:

$X \rightarrow Y$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 0$

Man kann das (u. a.) folgendermaßen übersetzen:
$p(X \rightarrow Y) = 1$ alle X sind Y
$p(X \rightarrow Y) = 0$ alle X sind nicht Y
(Auf Probleme dieser Deutung bzw. mögliche andere Deutungen gehe ich noch ein.)

Es ist also zu unterscheiden:
- $X \rightarrow Y$ als Struktur in der Aussagen-Logik mit (implizitem) Wert von $p = 1$ (Konstante)
- $X \rightarrow Y$ in $p(X \rightarrow Y) = r/n$ in der quantitativen Logik als Struktur mit unbestimmten Wert (Variable), der erst durch p ein Wert zugesprochen wird.

In der quantitativen Form nenne ich eine Relation mit $p = 1$ oder $p = 0$ *deterministisch*. Alle anderen Werte, also $0 < p < 1$, sind *statistisch*. Man kann die Werte $p = 1$ und $p = 0$ somit als statistische *Grenzfälle* ansehen.

Anders gesagt, lässt sich die (quantitative) Aussagen-Logik insgesamt als *Grenzfall* der Quantitäts-Logik betrachten, welche *alle* Werte $0 \leq p \leq 1$ umfasst. Damit ergibt sich:

$p = 1$	deterministisch-positiv
$0 < p < 1$	statistisch
$p = 0$	deterministisch-negativ („nullistisch“)

Es sind natürlich auch andere semantische Deutungen als „alle X sind Y“ für $X \rightarrow Y$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 1$ möglich; vor allem lassen sich folgende quantitative Deutungen bzw. Anwendungen für $X \rightarrow Y$ unterscheiden (vgl. 1-1-0-2):

– *rein aussagen-logisch*: wenn die Aussage ‚X' wahr ist, dann ist *in allen Fällen* auch die Aussage ‚Y' wahr
– *funktional*: wenn X, dann *in allen Fällen* (immer) auch Y
– *extensional*: *alle* X sind Y, die Klasse X ist *Teilmenge* der Klasse Y
– *intensional*: (ein) X ist *vollständig* Y

Die intensionale Deutung ist wieder nur *partiell intensional*, eine *streng intensionale* Aussage operiert wie beschrieben *nur* mit Begriffen oder Eigenschaften.

Entsprechendes gilt für $\neg(X \rightarrow Y)$ oder $p(X \rightarrow Y) = 0$

Natürlich kann man sich auch von der *Implikation* lösen und allgemein bestimmen:

$p(\Phi) = 1$: Φ gilt *generell*, d. h. für *alle*, *immer* oder *vollständig*

$p(\Phi) = 0$: Φ gilt *generell nicht*, d. h. für *keinen*, *niemals* oder *gar nicht*

Die *extensionale* Deutung erweist sich aber als besonders praktikabel und anschaulich. Daher werde ich sie auch im Folgenden bevorzugen. Ebenso erweist sich die Implikation als besonders geeignet zur Demonstration, daher werde ich sie ebenfalls weiterhin bevorzugen.

Auch die *Fuzzy-Logik* ist quantitativ. Dies wird in der Fuzzy-Logik so interpretiert, dass damit die *2-wertige Logik* bzw. überhaupt die *2-Wertigkeit* überwunden ist. Ich halte eine andere Interpretation für sinnvoller. Die 2-Wertigkeit wird nur verschoben, bleibt aber erhalten. Das gilt gleichermaßen für eine extensionale wie eine intensionale Quantifizierung.

Es geht eben bei Quantifizierung nicht mehr darum, ob X oder nicht X, sondern stattdessen ob $p(X) = r/n$ oder $p(X) \neq r/n$. Im Beispiel: $p(X)$ kann nicht *zugleich* 0,5 und nicht 0,5 sein, genauso wenig wie *zugleich* X und nicht X gelten kann. Damit ist der *Satz vom Widerspruch* $\neg(X \wedge \neg X)$ weiterhin gültig, man könnte ihn z. B. quantitativ formulieren:

$$\neg[p(X) = r/n \wedge p(X) \neq r/n]$$

Entsprechend gilt der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* $X >< \neg X$ quantitativ:

$$p(X) = r/n >< p(X) \neq r/n.$$

1-4-0-2 DETERMINISTISCH POSITIV

Für eine *deterministische* Relation oder Struktur gilt wie gesagt $p = 1$. Ich erläutere deterministisch-positive Strukturen näher anhand der Implikation $X \rightarrow Y$.

Wir hatten als Formel der relativen Größe der Implikation kennen gelernt:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

D. h. für $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Somit $r = n$. Es zeigt sich:

Wenn $b = 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$. Man braucht hier nicht hinzuzufügen: $a + b + c > 0$. Denn es gehört wie beschrieben zu den Grundvoraussetzungen, dass gilt: $a + b + c + d > 0$. Somit:

$$b = 0 \Rightarrow a + b + c > 0.$$

Damit gilt *in diesem System* sogar die logische *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$:

$$b = 0 \Leftrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \text{ bzw. } \frac{b}{a+b+c+d} = 0 \Leftrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

1-4-0-3 WAHRHEITSTAFEL

Ich gebe im Folgenden die Wahrheitstafel für p(X → Y) = 1 an. Man kann die Wahrheitstafel über *absolute* Werte (q) definieren, sinnvoller ist aber, von *relativen Größen* (p) auszugehen.

• Alternative Quantifizierung von X → Y

Wir haben bisher X → Y als p(X → Y) = 1 quantifiziert. Technisch gesehen, ist es zunächst schwierig, für p(X → Y) = 1 eine Wahrheitstafel aufzustellen. Unproblematischer wäre es, für p(X) = 1 → p(Y) = 1, eine Wahrheitstafel aufzustellen. p(X) = 1 → p(Y) = 1, also doppelt quantifiziert, könnte man auch als eine Quantifizierung von X → Y ansehen. Beide Ausdrücke sind aber nicht äquivalent, es gilt: p(X → Y) = 1 ⇒ p(X) = 1 → p(Y) = 1. Für den Wahrheitsverlauf in der Wahrheitstafel ergeben sich allerdings keine Unterschiede, daher ziehe ich p(X → Y) = 1 vor, das X → Y exakter quantifiziert als p(X) = 1 → p(Y) = 1.

• Zunächst zur Erinnerung die *qualitative* Wahrheitstafel und ihre primäre Deutung:

	X → Y	Deutung:
1.	+ + +	X ∧ Y ⇒ X → Y
2.	+ − −	X ∧ ¬Y ⇒ ¬(X → Y)
3.	− + +	¬X ∧ Y ⇒ X → Y
4.	− + −	¬X ∧ ¬Y ⇒ X → Y

• Normale, quantitative Wahrheitstafel

Übersetzen wir das in eine *quantitative* Wahrheitstafel mit *relativen* Größen (p), so werden die qualitativen Werte von X wie folgt interpretiert (für Y und X → Y entsprechend):

qualitativ	quantitativ
X +	p(X) = 1
X − (bzw. ¬X)	p(X) = 0

Manchmal werden von anderen Autoren auch in der herkömmlichen, qualitativen Tafel die Zeichen 1 und 0 eingesetzt, für „wahr“ bzw. „falsch“. Aber dort sind es nur *Symbole*, hier, in meinem Ansatz, geht es aber um konkrete *Zahlenwerte*; das ist nicht zu verwechseln.

	p(X → Y)	Deutung:
1.	1 1 1	p(X ∧ Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 1
2.	1 0 0	p(X ∧ ¬Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 0
3.	0 1 1	p(¬X ∧ Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 1
4.	0 1 0	p(¬X ∧ ¬Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 1

p(X ∧ Y) = 1, p(X ∧ ¬Y) = 1 usw. stehen alle zueinander in (konjunktiver) *Kontradiktion*.
Streng genommen wäre z. B. die 1. Zeile zu lesen: p(X) = 1 ∧ p(Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 1,
d. h. p(X) und p(Y) werden *separat erfasst*. Diese Unterscheidung ist hier zu vernachlässigen, denn zwischen p(X) = 1 ∧ p(Y) = 1 und p(X ∧ Y) = 1 besteht logische Äquivalenz.

• konjunktive Wahrheitstafel
Hier ergibt sich eine *getrennte* Erfassung von p(X) und p(Y):

	p(X) $\wedge$ p(Y)		$\Rightarrow$ p(X $\to$ Y)	Deutung:
1.	1	1	1	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$
2.	1	0	0	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y) = 0$
3.	0	1	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$
4.	0	0	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, ergibt sich:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$ $\wedge$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$ $\Rightarrow$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	0	0
3.	0	1	1
4.	0	0	1

Diese konjunktive Wahrheitstafel muss aber letztlich *implikativ* gedeutet werden, sonst landet man in einem *unendlichen Regress* landen. Im Folgenden seien die einzelnen Zeilen erläutert:

1. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$ d. h. : a + c > 0, b + d = 0

Daraus ergibt sich: a > 0, b + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$$

2. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$ d. h. : a + c = 0, b + d > 0

Daraus ergibt sich: b > 0, a + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{0}{b} = 0$$ (denn b kommt als einziges nicht im Zähler vor)

3. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$ d. h.: a + b = 0, c + d > 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$ d. h. : a + c > 0, b + d = 0

Daraus ergibt sich: c > 0, a + b + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{c}{c} = 1$$

4. Zeile $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$ d. h.: a + b = 0, c + d > 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$ d. h. : a + c = 0, b + d > 0

Daraus ergibt sich: d > 0, a + b + c = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{d}{d} = 1$$

Man erhält also ein beeindruckend systematisches bzw. symmetrisches Ergebnis. Und man erhält 4 *strenge logische Schlüsse*, die allerdings mit *mathematischen Größen* operieren. (Wie ich später zeigen werde, kann man solche Schlüsse dennoch als rein logisch auffassen).

Während man also bei der generellen *quantitativen Logik* Wahrheitstafeln kaum sinnvoll verwenden kann, so ist dies bei der quantitativen Aussagen-Logik sehr wohl möglich. Denn diese Tafeln entsprechen genau den Tafeln der Aussagen-Logik, was beweist, dass meine *Übersetzung der Aussagen-Logik in mathematische Formeln* berechtigt ist.

Noch ein Hinweis: Wir haben hier schon viel mit *analytischen* Relationen gearbeitet. Denn es ist unvermeidlich, wenn man die Wahrheitstafel näher erläutern will, schon im Kapitel 1 über *synthetische* Relationen, ausführlich auch *analytische* Relationen zu verwenden. Wie ich bereits am Anfang des Buches angemerkt habe, lässt sich wegen der Verflochtenheit von synthetischen und analytischen Relationen grundsätzlich keine streng lineare Abhandlung vornehmen, erst nur synthetisch, dann nur analytisch. Genauer und systematischer gehe ich auf analytische Relationen und konkret auf die analytischen Eigenschaften der Wahrheitstafel aber erst im Kapitel 2 („Analytische Relationen") ein.

Damit wäre der *eine* Wert der 2-wertigen Logik abgehandelt. Der *zweite* Wert ergibt sich, wenn X → Y falsch bzw. negativ ist. Dafür verwendet man die *Negation* ¬. Also ¬(X → Y).

1-4-0-4 DETERMINISTISCH NEGATIV

Die *deterministisch-negative* Relation wird wie gesagt durch den Wert p = 0 ausgedrückt.

Somit ergibt sich: ¬(X → Y): p(X → Y) = 0 (Alternative: p(X) = 0 → p(Y) = 0)

Für die normale, qualitative Wahrheitstafel heißt das:

	¬(X → Y)	Deutung:
1.	− + + +	X ∧ Y ⇒ ¬¬(X → Y) ⇒ X → Y
2.	+ + − −	X ∧ ¬Y ⇒ ¬(X → Y)
3.	− − + +	¬X ∧ Y ⇒ ¬¬(X → Y) ⇒ X → Y
4.	− − + −	¬X ∧ ¬Y ⇒ ¬¬(X → Y) ⇒ X → Y

Die *doppelte Negation* erklärt sich wie folgt: wenn z. B. unter dem Negationszeichen $\neg$ in $\neg(X \rightarrow Y)$ ein – (minus) steht, ist die Negation ihrerseits negiert. Nun gilt: $\neg\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y)$. Übersetzen wir die *qualitative* wieder in eine *quantitative* Wahrheitstafel:

	$p\neg(X \rightarrow Y)$	Deutung:	
1.	0 1 1 1	$p(X \wedge Y) = 1$	$\Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$
2.	1 1 0 0	$p(X \wedge \neg Y) = 1$	$\Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 1$
3.	0 0 1 1	$p(\neg X \wedge Y) = 1$	$\Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$
4.	0 0 1 0	$p(\neg X \wedge \neg Y) = 1$	$\Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$

Wie noch gezeigt werden wird, gilt: $p\neg(X \rightarrow Y) = 0 \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1$
Ganz korrekt schriebe man mit *doppelter* Klammer: $p(\neg(X \rightarrow Y))$ statt $p\neg(X \rightarrow Y)$; aus Gründen der Vereinfachung wähle ich aber meistens die erste Schreibweise.

Will man die umständlichen Termini *deterministisch-positiv* und *deterministisch-negativ* vermeiden, kann man nur die Relationen mit p = 1 deterministisch nennen und die Relationen mit p = 0 *nullistisch* (in Ermangelung eines besseren Begriffs). Allerdings ist zu bedenken:

$$p(X \rightarrow Y) = 0 \Leftrightarrow p(X >\!- Y) = 1$$

D. h. einer *deterministisch-negativen* Struktur entspricht immer auch eine *deterministisch-positive* Struktur. Somit kann man prinzipiell *alle* deterministischen Relationen auch als deterministisch-*positiv* kennzeichnen und auf die Bestimmung „nullistisch“ verzichten.

1-4-0-5 EINWÄNDE GEGEN DIE QUANTIFIZIERUNG

Ich habe hier für *aussagen-logische* Relationen oder Relatoren eine quantitative Interpretation bzw. eine Quantifizierung mittels der (empirischen) *Wahrscheinlichkeit* p vorgestellt.
Und zwar *Position*: p = 1, *Negation*: p = 0. Natürlich kann man diesen Ansatz in Frage stellen und ich will daher mögliche andere Ansätze diskutieren (mit der Implikation als Beispiel):

1) *Wahrheitsgrad* w

Aussagen-logisch versteht man die Position $X \rightarrow Y$ als: ‚$X \rightarrow Y$' ist (empirisch) *wahr*; dagegen die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ als ‚$X \rightarrow Y$' ist (empirisch) falsch. Es geht also um Kategorien der *Wahrheit*. Von daher könnte man argumentieren, für eine Quantifizierung sei die *Wahrscheinlichkeit* nicht geeignet. Sinnvoller sei jedenfalls, mit einem *Wahrheitsgrad* w zu operieren. Es ergäbe sich dann:

$$X \rightarrow Y\colon\ w(X \rightarrow Y) = 1 \qquad \neg(X \rightarrow Y)\colon\ w(X \rightarrow Y) = 0$$

Sicher wäre es generell auch denkbar, eine Quantifizierung der Aussagen-Logik mit einem *Wahrheitsgrad* w durchzuführen. Aber die Verwendung der *Wahrscheinlichkeit* ist nicht nur legitim, sondern sogar überlegen. Dieser Wahrscheinlichkeits-Ansatz spielt eine wesentliche Rolle in der vorliegenden Arbeit und wird daher im Folgenden ausführlich erläutert:

- Es ist berechtigt, die (empirische) aussagen-logische Wahrheit oder Falschheit mit der (empirischen) Wahrscheinlichkeit zu quantifizieren. In einem *2-wertigen* System wie der Aussagen-Logik gilt: wahr = vollständig wahr = in allen Fällen wahr; nicht wahr (falsch) = gar nicht wahr = in keinem Fall wahr. Der Bezug aus „alle“ oder „keiner“ wird aber gerade durch die *Wahrscheinlichkeit* p ausgedrückt. Natürlich kann der Satz p(X) = 1 auch falsch sein, dann gilt eben p(X) = 0. Und natürlich kann auch ein Satz wie $p(X \rightarrow Y) = 0{,}75$ wahr oder falsch sein, aber ein solcher Satz ist in der quantitativen *Aussagen-Logik* nicht definiert.
- In der *quantitativen Aussagen-Logik* sind Wahrheitsgrad und Wahrscheinlichkeit quantitativ gleichsetzen, es gilt: p = w; statt $w(X \rightarrow Y) = 1$ kann man also auch $p(X \rightarrow Y) = 1$ angeben. Nun soll man in jeder Wissenschaft generell möglichst mit *wenig* Parametern auskommen. Wenn man also w und p austauschen kann, sollte man auf *einen* dieser Parameter ver-

zichten. Die *Wahrscheinlichkeit* p ist aber für die quantitative Logik wesentlich wichtiger, daher kann man hier auf die Einführung eines Wahrheitsgrades w verzichten (ähnlich wie ich auch die *theoretische* Wahrscheinlichkeit und die *theoretische* Wahrheit beide mit dem gleichen Symbol p^T darstelle).

• Fälle, in denen w und p nicht übereinstimmen, sind hier nicht relevant. Zunächst kann man gegen die Gleichsetzung w = p einwenden: Im obigen Fall ist zwar die *Gleichsetzung* von w und p unproblematisch. Es gibt es aber Situationen, in den w und p differieren, so dass man w und p nicht automatisch gleichsetzen darf (vgl. 1-3-0-2); z. B. r*eal* gilt: 70% aller Lehrer lesen Zeitung. Man stellt den *Satz* auf: ‚70% aller Lehrer lesen Zeitung'. Real und sprachlich gilt also p = 0,7. Der Wahrheitsgrad w des *Satzes in Relation zum Sachverhalt* beträgt aber w = 1, weil p real und p im Satz genau übereinstimmen. Hier differiert p also mit w, und daher müssen beide Parameter (getrennt) berücksichtigt werden.

Auf diesen Einwand kann man antworten: Man muss bei Wahrheit *zwei* Aspekte unterscheiden: Zum einen, Wahrheit ist auf der *Objekt-Ebene* eine (quantitative) Eigenschaft einer Aussage bzw. Relation. Hier geht es nicht im engeren Sinn um Wahrheit, sondern um *Position* und *Negation*. Zum anderen, Wahrheit ist auf der *Meta-Ebene* die – graduelle – Übereinstimmung einer (quantitativen) Aussage mit einem Sachverhalt, also eine meta-sprachliche Beziehung zwischen einem Satz und einem Sachverhalt. Im ersten Fall kann man p und w identifizieren, im zweiten Fall nicht. Aber bei der Quantifizierung aussagen-logischer Relationen geht es nur um den ersten Fall, hier können wir somit w durch p ersetzen.

• M. E. bildet die Logik ein einheitliches, *gestuftes System*. Es ist unbestreitbar, dass man quantoren-logische Formeln wie $\Lambda x(X \rightarrow Y)$ mit der relativen Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit p darstellen kann – und ich habe ja gezeigt, dass man eine quantitative Logik aufbauen kann, die ebenfalls auf p basiert, z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Von daher ist es auch aus *systematischen* und technischen Gründen vorzuziehen, schon bei der Aussagen-Logik mit der Wahrscheinlichkeit bzw. relativen Häufigkeit p zu operieren.

• Die *quantitative Logik* auf der Basis von p funktioniert ausgezeichnet. Man kann mit ihr elegant und einfach alle aussagen-logischen Relationen und Schlüsse berechenbar darstellen. Dieser Erfolg spricht für die Richtigkeit des Ansatzes.

2) *absolute Häufigkeit* q

Auch wenn man einräumt, dass man aussagen-logische Relationen mittels der *Häufigkeit* quantitativ interpretieren kann, könnte man einwenden: Es geht nicht um die *relative* Häufigkeit p, sondern um die *absolute* Häufigkeit q. Dabei wären folgende Deutungen naheliegend:

$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) = 1$ $\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$

Oder :

$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) > 0$ $\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$

Das könnte man z. B. folgendermaßen begründen. Für eine *allgemeine* Aussage (wie „alle Menschen sind sterblich"), mag p angemessen sein, aber auch für eine *singuläre* Aussage wie „Peter geht ins Kino"? Dabei kann man unterscheiden:

– einfacher singulärer Satz: ‚Peter geht immer (in allen Fällen) ins Kino'. Hier bietet sich wiederum die *relative* Häufigkeit p an, weil Bezug auf „alle" (p = 1) genommen wird.

– strikt singulärer Satz: „Peter geht einmal (jetzt) ins Kino". Hier könne man zunächst an q denken (q = 1 oder q > 0). Denn man will eventuell nur etwas über *einen* Fall aussagen.

Nun gilt nach den obigen Analysen: $q(X) = q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y) = a + b$

Der Satz X gelte als wahr, wenn a + b = 1 oder a + b > 0. Und als falsch, wenn a + b = 0.

Betrachten wir nun $\neg X$, also die *Negation*:

Dafür ergäbe sich: $q(\neg X) = q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y) = c + d$

Der Satz $\neg X$ gelte als wahr, wenn c + d = 1 oder c + d > 0. Und als falsch, wenn c + d = 0.

Danach wäre es aber durchaus möglich, dass X und ¬X beide wahr sind, also X ∧ ¬X, denn das hieße ja z. B.: (a + b = 1) ∧ (c + d = 1), und das ist kein Widerspruch. Dagegen steht das fundamentale logische *Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs*: ¬(X ∧ ¬X). Auf einem Widerspruch kann man aber keine Logik aufbauen.

Sei noch hinzugefügt: ‚X ist falsch': ¬X (a + b = 0) und ‚¬X ist falsch': ¬¬X (c + d = 0) ist andererseits ein Widerspruch, weil gelten muss: a + b + c + d > 0. Formal ergibt sich in diesem Fall: ¬X ∧ ¬¬X. Dies ist wirklich ein Widerspruch, aber ¬X ∧ ¬¬X ⇔ X ∧ ¬X, also sind beide Formeln äquivalent. Es ist aber unmöglich, dass von zwei äquivalenten Formeln nur *eine* widersprüchlich sein soll.

Welche Konsequenzen muss man daraus ziehen? Sind singuläre Sätze nicht quantifizierbar? Oder darf man singuläre Sätze nicht in der Aussagen-Logik verwenden? Beides wäre unbefriedigend.

Ich würde es eher so deuten, dass eben die absolute Häufigkeit q nicht zur Logik-Quantifizierung von (singulären) Sätzen geeignet ist.

Dies verweist einen zurück auf die Wahrscheinlichkeit p. Und man kann tatsächlich auch strikt singuläre Sätze mit der Wahrscheinlichkeit p erfassen. Man geht aus von p(X) = r/n, muss aber festlegen, dass r = 1 und n = 1.

Es gilt eben generell: p(X) = n/n = 1. n/n steht für *alle*, auch wenn „alle" im Sonderfall nur *einer* (q = 1) ist. Hier ist ¬X ausgeschlossen, wenn X gilt, genau sowie gefordert. Als Formel:

$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1/1$ = 1. Hier gilt: c + d = 0. Somit folgt: p(¬X) = 0.

3) *Wahrscheinlichkeit* p: p = 1 versus p < 1

Wir sind ausgegangen von: X: p(X) = 1, ¬X: p(X) = 0. Man kann zwar grundsätzlich an der Quantifizierung durch *Wahrscheinlichkeit* festhalten, aber andere Werte wählen. Es lässt sich nämlich ein wichtiger Einwand gegen die Interpretation mit p = 1 und p = 0 anbringen: *Positive* und *negierte* Relationen sind in der Aussagen-Logik *kontradiktorisch*, also z. B.:

(X → Y)	$^{+}$><$^{+}$	¬	(X → Y)
+	+	–	+
–	+	+	–
+	+	–	+
+	+	–	+

Die *Implikation* X → Y und ihre *Negation* ¬(X → Y) stehen aussagen-logisch in einem *kontradiktorischen* Verhältnis, was durch den *Kontravalenz*-Relator >< ausgedrückt wird.

Bei der Quantifizierung ergibt sich aber ein *konträres* Verhältnis:
p(X → Y) = 1 und p(X → Y) = 0 sind nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr.*
Generell sind p = 1 und p = 0 nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr*.

Bei einer Kontradiktion gilt: wenn X falsch ist, muss Y wahr sein und umgekehrt.
Dagegen ist es bei einem konträren Verhältnis möglich, dass *beide Aussagen falsch* sind.
Und dies ist ja bei p = 1 und p = 0 gegeben, denn es kann ja gelten: 0 < p < 1.
Wenn z. B. p = 0,5 ist, dann sind p = 1 und p = 0 falsch.

Die *konträre* Relation wird durch den *Exklusor* | ausgedrückt. Es gilt:

p(X → Y) = 1 $^{+}|^{+}$ p(X → Y) = 0

Der *kontradiktorische* Gegensatz von p = 1 ist dagegen p < 1. Es gilt also:

p(X → Y) = 1 $^{+}$><$^{+}$ p(X → Y) < 1

Und entsprechend ist p > 0 der kontradiktorische Gegensatz von p = 0. Somit gilt:

p(X → Y) = 0 $^{+}$><$^{+}$ p(X → Y) > 0

Es ist natürlich zunächst unbefriedigend, dass *aussagen-logisch* zwischen $(X \rightarrow Y)$ und $\neg(X \rightarrow Y)$ eine *kontradiktorische* Relation besteht, dagegen zwischen den *Quantifizierungen* $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$ nur eine *konträre*. So wäre zu fragen, ob man besser eine Quantifizierung wählt, bei der das kontradiktorische Verhältnis erhalten bleibt.

Naheliegend wäre zunächst das folgende Modell:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) < 1$
$(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$
$\neg(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$

Hier wäre allerdings die *2-Wertigkeit* der Aussagen-Logik aufgehoben, man könnte mit der Aussagen-Logik 4 unterschiedliche Werte ausdrücken. Schon diese Aufhebung der 2-Wertigkeit ist problematisch, denn die Aussagen-Logik gilt allgemein als 2-wertiges System.

Vor allem aber führt dieser Ansatz zu großen Problemen, ja zu Widersprüchen, wie hier jedoch nicht im Einzelnen gezeigt werden soll. Um nur *ein* Argument anzuführen: wie demonstriert wurde, lässt sich aus den Wahrheitstafeln ableiten:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

D. h. $X \rightarrow Y$ und $X \rightarrow \neg Y$ haben eine ganz *unterschiedliche* logische Struktur, $X \rightarrow \neg Y$ ist also keineswegs nur eine bestimmte *quantitative Ausprägung* von $X \rightarrow Y$, sondern eine ganz andere Relation. Fazit: $X \rightarrow \neg Y$ kann nicht mit $p(X \rightarrow Y) = 0$ gleichgesetzt werden. (Anders wäre es bei der *Positiv-Implikation*: denn da gilt: $X \, {*\!\rightarrow} \neg X \Leftrightarrow \neg(X \, {*\!\rightarrow} Y)$).

Man könnte sich aber nur auf die 2 Werte $p = 1$ und $p < 1$ festlegen und unterscheiden zwischen: $X \rightarrow Y$ bedeutet $p(X \rightarrow Y) = 1$, $\neg(X \rightarrow Y)$ bedeutet $p(X \rightarrow Y) < 1$. Dann hätte man nicht das Problem mit der anderen Struktur von $X \rightarrow \neg Y$ und mit der 4-Wertigkeit. Doch dann gäbe es gar keine Möglichkeit, $p(X \rightarrow Y) = 0$ aussagenlogisch auszudrücken.

Und bestimmte logische Schlüsse wie der *Modus tollendo ponens* $(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$ ließen sich so nicht beweisen. Denn $p(X \vee Y) = 1 \wedge p(X) < 1 \longrightarrow p(Y) = 1$ ist nur ein *semi-analytischer* Schluss, er ist nicht streng folgerichtig (Genaueres dazu in Kapitel 2).

Mit der Deutung von $\neg(X \rightarrow Y)$ als $p(X \rightarrow Y) < 1$ bzw. allgemein von $\neg\Phi$ als $p(\Phi) < 1$ ergibt sich also keine überzeugende Lösung des Kontradiktionsproblems.

4) *Wahrscheinlichkeit* p: $p > 0$ versus $p = 0$

Allerdings wäre eine andere Lösung theoretisch denkbar:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$

Hier bliebe also wie erwüscht die Deutung „$\neg(X \rightarrow Y)$ bedeutet $p(X \rightarrow Y) = 0$“ erhalten. Dafür wird die quantitative Deutung von $p(X \rightarrow Y)$ verändert: von $p = 1$ zu $p > 0$.

Doch hier treten ebenfalls nicht tolerierbare Probleme auf. So gibt es keine Deutung mehr für $p = 1$. Außerdem gelten wichtige logische Gesetze nicht, z. B. der *Modus ponendo ponens*:

$$p(X \rightarrow Y) > 0 \;\wedge\; p(X) > 0 \longrightarrow p(Y) > 0$$

Das Symbol $\longrightarrow$ steht wie gesagt für eine nur *semi-analytische* Implikation, einen nur *partiellen* Schluss; der *Modus ponens* ist aber ein *vollständiger* Schluss.

5) *Wahrscheinlichkeit* p: $p = 1$ versus $p = 0$

Die obigen Analysen zeigen, dass man bei den anfangs gewählten Definitionen bleiben sollte:

$p = 1$ (positiv, gültig, wahr) $\qquad$ $p = 0$ (negativ, ungültig, falsch)

Dies umso mehr, als sich noch zeigen wird, wie fruchtbar dieses Modell ist, man kann mit ihm alle aussagen-logischen Strukturen und Gesetze *numerisch* darstellen.

Und das *Kontradiktions-Problem* lässt sich durchaus innerhalb dieses Modells lösen, sogar ganz elegant. Dies lässt sich wie folgt begründen: In einem System, in dem nur *zwei* Werte zugelassen sind (positiv / negativ bzw. p = 1 / p = 0), *müssen* diese Werte *kontradiktorisch* sein. Und genau dies ist der Fall in der quantitativen Aussagen-Logik, hier gilt:

$$p = 1 \;><\; p = 0 \quad \text{oder} \quad \neg(p = 1) \Leftrightarrow p = 0 \quad \text{bzw.} \quad \neg(p = 0) \Leftrightarrow p = 1$$

In einem differenzierteren System, mit *mehr* Werten, sind p = 1 und p = 0 dagegen nur *konträr*. Das werde ich für die *quantitative* Quantoren-Logik zeigen, in der 4 Werte unterschieden werden und daher andere *Negationen* vollzogen werden; hier gilt z. B.: $\neg(p = 1) \Leftrightarrow p < 1$ bzw. $\neg(p = 0) \Leftrightarrow p > 0$ (zum Problem der *intensionalen* Quantifizierung vgl. 1-4-5).

1-4-1 Implikation

1-4-1-1 DEFINITION

Die Implikation wurde schon in der Einführung beschrieben. Es ergibt sich:

Deterministisch

aussagen-logisch:	$X \to Y$
quantitativ:	$p(X \to Y) = 1$
Formel:	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 1$
Bedingungen:	$a + c + d > 0, b = 0$
Gegen-Relation:	$p(X >\!- Y) = 0$

Nullistisch

Aussagen-Logik	$\neg(X \to Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \to Y) = 0$
Formel	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + c + d = 0, b > 0$
Gegen-Relation	$p(X >\!- Y) = 1$

1-4-1-2 NEGATIVE IMPLIKATION

Deterministisch

Aussagen-Logik	$X \to \neg Y$ (entspricht $X \mid Y$)
Quantitäts-Logik	$p(X \to \neg Y) = 1$

Formel	$\dfrac{b+c+d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	b + c + d > 0, a = 0
Gegen-Relation	p(X ∧ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X → ¬Y)
Quantitäts-Logik	p(X → ¬Y) = 0
Formel	$\dfrac{b+c+d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	b + c + d = 0, a > 0
Gegen-Relation	p(X ∧ Y) = 1

1-4-1-3 REPLIKATION

Deterministisch

Aussagen-Logik	X ← Y
Quantitäts-Logik	p(X ← Y) = 1
Formel	$\dfrac{a+b+d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	a + b + d > 0, c = 0
Gegen-Relation	p(X –< Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X ← Y)
Quantitäts-Logik	p(X ← Y) = 0
Formel	$\dfrac{a+b+d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a + b + d = 0, c > 0
Gegen-Relation	p(X –< Y) = 1

1-4-1-4 ÄQUIVALENZ

Deterministisch

Aussagen-Logik	X ↔ Y

Quantitäts-Logik $p(X \leftrightarrow Y) = 1$

Formel $\frac{a+d}{a+b+c+d} = 1$

Bedingungen $a + d > 0,\ b + c = 0$
Gegen-Relation $p(X >< Y) = 0$

Nullistisch

Aussagen-Logik $\neg(X \leftrightarrow Y)$
Quantitäts-Logik $p(X \leftrightarrow Y) = 0$

Formel $\frac{a+d}{a+b+c+d} = 0$

Bedingungen $a + d = 0,\ b + c > 0$
Gegen-Relation $p(X >< Y) = 1$

1-4-1-5 KOMPLEXE IMPLIKATION
Es soll auch für eine Implikation mit *3* Variablen das obige Schema ausgefüllt werden:

$$p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Deterministisch

Aussagen-Logik $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
Quantitäts-Logik $p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = 1$

Formel $\frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

Bedingungen $a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 > 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 = 0$

Nullistisch

Aussagen-Logik $\neg((X \rightarrow Y) \rightarrow Z)$
Quantitäts-Logik $p(\neg((X \rightarrow Y) \rightarrow Z)) = 0$

Formel $\frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$

Bedingungen $a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 = 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 > 0$

1-4-2 Positiv-Implikation

1-4-2-1 HERLEITUNG

Die Herleitung aus der Wahrheits-Tafel ergibt für: p(X *→ Y) = 1

	X	*→	Y		
1.	+	+	+	$q(X \wedge Y)$	$= a > 0$
2.	+	−	−	$q(X \wedge \neg Y)$	$= b = 0$

1-4-2-2 SCHEMA DER POSITIV-IMPLIKATION

Direkte (kontradiktorische) *Gegen-Relationen* gibt es bei der Positiv-Implikation nicht. Denn es gibt eben nur 3 Positiv-Relatoren (die alle auf der Implikation beruhen): *→, ←*, *↔. Gegen-Relationen müssen somit mit Hilfe der *Negation* gebildet werden.

Deterministisch

Aussagen-Logik X *→ Y
Quantitäts-Logik p(X *→ Y) = 1

Formel $\frac{a}{a+b} = 1$

Bedingungen a > 0, b = 0
Gegen-Relation p(X *→ ¬Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik ¬(X *→ Y)
Quantitäts-Logik p(X *→ Y) = 0

Formel $\frac{a}{a+b} = 0$

Bedingungen a = 0, b > 0
Gegen-Relation p(X *→ ¬Y) = 1
(Die Bedingung b > 0 und entsprechende sollen später noch diskutiert werden.)

1-4-2-3 POSITIV-REPLIKATION

Deterministisch

Aussagen-Logik X ←* Y
Quantitäts-Logik p(X ←* Y) = 1

Formel $\frac{a}{a+c} = 1$

Bedingungen a > 0, c = 0
Gegen-Relation p(¬X ←* Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik ¬(X ←* Y)
Quantitäts-Logik p(X ←* Y) = 0

Formel $\frac{a}{a+c} = 0$

Bedingungen a = 0, c > 0
Gegen-Relation p(¬X ←* Y) = 1

1-4-2-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

Deterministisch

Aussagen-Logik X *↔ Y
Quantitäts-Logik p(X *↔ Y) = 1

Formel $\frac{a}{a+b+c} = 1$

Bedingungen a > 0, b + c = 0
Gegen-Relation p¬(X *↔ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik ¬(X *↔ Y)
Quantitäts-Logik p(X *↔ Y) = 0

Formel $\frac{a}{a+b+c} = 0$

Bedingungen a = 0, b +c > 0
Gegen-Relation p¬(X *↔ Y) = 1

1-4-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Wir stellen zum genauen Vergleich den „Steckbrief“ von p(X → Y) = 1 und p(X *→ Y) = 1 noch einmal gegenüber:

Deterministisch	*Positiv-Implikation*	*Implikation*
Aussagen-Logik	X *→ Y	X → Y
Quantitäts-Logik	p(X *→ Y) = 1	p(X → Y) = 1
Formel	$\frac{a}{a+b}=1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	a > 0, b = 0	a + c + d > 0, b = 0
Gegen-Relation	p(X *→ ¬Y) = 0	p(X >– Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X *→ Y)	¬(X → Y)
Quantitäts-Logik	p(X *→ Y) = 0	p(X → Y) = 0
Formel	$\frac{a}{a+b}=0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a = 0, b > 0	a + c + d = 0, b > 0
Gegen-Relation	p(X *→ ¬Y) = 1	p(X >– Y) = 1

1-4-3 Systematik

Wir stellen hier ausgewählte Relatoren im obigen Schema vor, vom „Null-Welt-Relator“ bis zum „Vier-Welt-Relator“; der Name richtet sich danach, in *wie vielen Welten* ein Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt. Beim „Null-Welt-Relator“ (Antilogator) und „Vier-Welt-Relator“ (Tautologator) habe ich schon angemerkt, dass es keine echten Relatoren sind.

Besonders der *Antilogator* ist problematisch, zwei Interpretationen sind bei ihm möglich:

- a + b + c + d > 0

Dann gilt p(X ⊥ Y) = 0/a+b+c+d = 0. Dies ist keine Kontradiktion, so wie ¬(X ⊥ Y) keine Kontradiktion ist (sondern eine Tautologie). Erst p(X ⊥ Y) = 1 ist eine Kontradiktion.

- a + b + c + d = 0

Eine *Division durch 0* ist in der Mathematik *nicht definiert*. Somit gilt: p(X ⊥ Y) = 0/a+b+c+d = 0/0 = undefiniert. p(X ⊥ Y) = 1 ist dann konktradiktorisch *und* undefiniert.
Ich bevorzuge die erste Lösung, weil a + b + c + d > 0 eine *generelle Bedingung* ist, die für alle Relatoren gilt und selbst bei der Kontradiktion aufrechterhalten bleiben sollte.

1-4-3-1 NULL-WELT-RELATOR (ANTILOGATOR)

	Deterministisch	
Aussagen-Logik	X ⊥ Y	(Kontradiktion)
Quantitäts-Logik	p(X ⊥ Y) = 1	(Kontradiktion)

Formel $\frac{0}{a+b+c+d}=1$ (Kontradiktion)

Gegen-Relation p(X ⊤ Y) = 0 (Kontradiktion)

Nullistisch

Aussagen-Logik ¬(X ⊥ Y) (Tautologie)
Quantitäts-Logik p(X ⊥ Y) = 0 (Tautologie)

Formel $\frac{0}{a+b+c+d}=0$ (Tautologie)

Gegen-Relation p(X ⊤ Y) = 1 (Tautologie)

1-4-3-2 EIN-WELT-RELATOREN

Deterministisch

Aussagen-Logik X ∧ Y (Konjunktion)
Quantitäts-Logik p(X ∧ Y) = 1

Formel $\frac{a}{a+b+c+d}=1$

Bedingungen a > 0, b + c + d = 0
Gegen-Relation p(X | Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik ¬(X ∧ Y)
Quantitäts-Logik p(X ∧ Y) = 0

Formel $\frac{a}{a+b+c+d}=0$

Bedingungen a = 0, b + c +d > 0
Gegen-Relation p(X | Y) = 1

Für die anderen 1-Welt-Relatoren X –< Y, X >– Y und X ∇ Y gilt Entsprechendes.

1-4-3-3 ZWEI-WELT-RELATOREN
Die wichtigen 2-Welt-Relatoren ↔ und >< werden an anderer Stelle behandelt.

Deterministisch

Aussagen-Logik	X ⌋ Y (Präpension)
Quantitäts-Logik	p(X ⌋ Y) = 1
Formel	$\frac{a+b}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	a +b > 0, c + d = 0
Gegen-Relation	p(X ⌉ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X ⌋ Y)
Quantitäts-Logik	p(X ⌋ Y) = 0
Formel	$\frac{a+b}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a + b = 0, c + d > 0
Gegen-Relation	p(X ⌉ Y) = 1

Für die Relatoren X⌊Y und X⌈Y und X ⌉ gilt Entsprechendes wie oben.

1-4-3-4 DREI-WELT-RELATOREN

Deterministisch

Aussagen-Logik	X | Y (Exklusion)
Quantitäts-Logik	p(X | Y) = 1
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	b +c + d > 0, a = 0
Gegen-Relation	p(X ∧ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X | Y)
Quantitäts-Logik	p(X | Y) = 0
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	b + c + d = 0, a > 0
Gegen-Relation	p(X ∧ Y) = 1

Weitere 3-Welt-Relatoren wie

$$X \rightarrow Y: \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1, \; X \leftarrow Y: \frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1 \text{ und } X \vee Y: \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$$

werden an anderer Stelle besprochen.

1-4-3-5 VIER-WELT-RELATOR (TAUTOLOGATOR)

Hier gibt es nur *einen* Relator, den *Tautologator* ⊤, der wie gesagt im eigentlichen Sinn kein Relator ist (obwohl er von manchen Logiker als Junktor aufgestellt wird).

Deterministisch

Aussagen-Logik	$X \top Y$	(Tautologie)
Quantitäts-Logik	$p(X \top Y) \equiv 1$	(Tautologie)
Formel	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} \equiv 1$	(Tautologie)
Gegen-Relation	$p(X \perp Y) \equiv 0$	(Tautologie)

Nullistisch

Aussagen-Logik	$\neg(X \top Y)$	(Kontradiktion)
Quantitäts-Logik	$p(X \top Y) = 0$	(Kontradiktion)
Formel	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 0$	(Kontradiktion)
Gegen-Relation	$p(X \perp Y) = 1$	(Kontradiktion)

Diese Auflistung zeigt, dass der *Tautologator* nicht mit den anderen Relatoren gleichzusetzen ist. Ja sie zeigt, dass es wenig sinnvoll ist, überhaupt einen solchen Relator aufzustellen. Tautologien werden vielmehr durch alle 14 anderen Relatoren (ohne Antilogator) gebildet.

1-4-4 Inklusiv / Exklusiv

1-4-4-1 INKLUSIVES „ODER“

Das *inklusive* „oder“ ist die *Disjunktion*.

Deterministisch

Aussagen-Logik	$X \vee Y$
Quantitäts-Logik	$p(X \vee Y) = 1$

Formel	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	a +b +c > 0, d = 0
Gegen-Relation	p(X ∇ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X ∨ Y)
Quantitäts-Logik	p(X ∨ Y) = 0
Formel	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a + b + c = 0, d > 0
Gegen-Relation	p(X ∇ Y) = 1

1-4-4-2 NEGATION DES INKLUSIVEN „ODER“

Deterministisch

Aussagen-Logik	¬(X ∨ Y), entsprechend X ∇ Y
Quantitäts-Logik	p(X ∇ Y) = 1
Formel	$\frac{d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	d > 0, a +b +c = 0
Gegen-Relation	p(X ∨ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X ∇ Y)
Quantitäts-Logik	p(X ∇ Y) = 0
Formel	$\frac{d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a + b + c < 0, d = 0
Gegen-Relation	p(X ∨ Y) = 1

1-4-4-3 EXKLUSIVES „ODER“

Das *exklusive* „oder“ ist die *Kontravalenz* X >< Y. Diese darf (wie beschrieben) nicht mit der Exklusion X | Y verwechselt werden.

Deterministisch

Aussagen-Logik	X >< Y
Quantitäts-Logik	p(X >< Y) = 1
Formel	$\dfrac{b+c}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	b +c > 0, a + d = 0
Gegen-Relation	p(X ↔ Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X >< Y)
Quantitäts-Logik	p(X >< Y) = 0
Formel	$\dfrac{b+c}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	b + c = 0, a + d > 0
Gegen-Relation	p(X ↔ Y) = 1

1-4-4-4 NEGATION DES EXKLUSIVEN „ODER“

Deterministisch

Aussagen-Logik	¬(X >< Y), entsprechend X ↔ Y
Quantitäts-Logik	p(X ↔ Y) = 1
Formel	$\dfrac{a+d}{a+b+c+d}=1$
Bedingungen	a + d > 0, b + c = 0
Gegen-Relation	p(X >< Y) = 0

Nullistisch

Aussagen-Logik	¬(X ↔ Y)
Quantitäts-Logik	p(X ↔ Y) = 0
Formel	$\dfrac{a+d}{a+b+c+d}=0$
Bedingungen	a + d = 0, b + c > 0
Gegen-Relation	p(X >< Y) = 1

1-4-4-5 VERGLEICH INKLUSIVES UND EXKLUSIVES „ODER“

	Inlusives Oder	*Exklusives Oder*
	Deterministisch	*Deterministisch*
Aussagen-Logik	$X \vee Y$	$X >< Y$
Quantitäts-Logik	$p(X \vee Y) = 1$	$p(X >< Y) = 1$
Formel	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{b+c}{a+b+c+d} = 1$
Bedingungen	$a + b + c > 0$, $d = 0$	$b + c > 0$, $a + d = 0$
Gegen-Relation	$p(X \nabla Y) = 0$	$p(X \leftrightarrow Y) = 0$
	Nullistisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$\neg(X \vee Y)$	$\neg(X >< Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \vee Y) = 0$	$p(X >< Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0$	$\frac{b+c}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + b + c = 0$, $d > 0$	$b + c = 0$, $a + d > 0$
Gegen-Relation	$p(X \nabla Y) = 1$	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$

1-4-5 Erweiterungen

1-4-5-1 EXTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

Die Erweiterungen, vor allem 1-4-5-1 bis 1-4-5-3, sind besonders für Experten gedacht.

In der *quantitativen Aussagen-Logik* geht es darum zu zeigen, dass ein (scheinbar nur *qualitativer*) aussagen-logischer Ausdruck wie $X \rightarrow Y$ *implizit* eine *quantitative Struktur* besitzt, die man in Zahlen *angeben* kann.

Bisher habe ich die quantitative Aussagen-Logik nur bezogen auf die *Extension* behandelt. Fassen wir hierzu das Allerwichtigste noch einmal zusammen, am Beispiel der *Implikation*. Grundsätzlich bedeutet in der *klassischen Aussagen-Logik* die Implikation $X \rightarrow Y$: „wenn die Aussage X wahr ist, dann ist auch die Aussage Y wahr“. Ich habe die Aussagen-Logik aber erweitert bzw. gezeigt, dass sie sich nicht nur auf Aussagen, sondern auch auf andere Bereiche anwenden lässt, z. B. auf *Mengen* und deren Elemente, als *extensionale* Darstellung (zu anderen Deutungen der Aussagen-Logik vgl. u. a. 1-1-0-2).

Entscheidend ist aber nicht der *Bereich*, sondern vielmehr die *implizite Quantität* aussagen-logischer Relationen, und die ist unabhängig von der Anwendung. Logische Relatoren und somit auch die Implikation beinhalten generell *positiv,* wie $X \rightarrow Y$, den Wert „alle“, *negativ* wie $\neg(X \rightarrow Y)$ den Wert „alle nicht“.

Traditionell hieße das: „wenn Aussage X wahr ist, dann ist in *allen* Fällen auch die Aussage Y wahr“. Ich ziehe hier aber die extensionale Mengendeutung vor: „alle Elemente der Menge X sind auch Elemente der Menge Y“, bzw. kurz „alle X sind Y“. Zwar würde man dies in erster Linie als $X \subset Y$ formalisieren, während die Implikation $X \rightarrow Y$ primär auf eine *funktionale* Deutung verweist; aber ich habe ausführlich begründet, dass dennoch auch diese mengen-relationale Verwendung möglich ist.

‚Alle' ist ein *Zahlwort*, entsprechend dem *All-Quantor* in der Quantoren-Logik. Streng quantitativ-numerisch gilt: „alle“: p = 1, „alle nicht“: p = 0.

Übersicht: Extensionale Quantität in der Aussagen-Logik (allgemein)

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
alle X sind Y	100% der X sind Y	$X \rightarrow Y$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(\Phi) = 1$
alle X sind nicht Y	0% der X sind Y	$\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(\Phi) = 0$

Wir dürfen „alle X sind nicht Y“ nicht formalisieren als $X \rightarrow \neg Y$ bzw. $p(X \rightarrow \neg Y) = 1$. Denn $X \rightarrow Y$ und $X \rightarrow \neg Y$ bilden nur einen *subkonträren Gegensatz*: $(X \rightarrow Y) \;^{+}\!\vee^{+}\; (X \rightarrow \neg Y)$, d. h. beide Aussagen können *zusammen* wahr sein, sie können nur nicht beide falsch sein. Aber natürlich ist es unmöglich, dass zugleich „alle X sind Y“ und „alle X sind nicht Y“ gilt.

Hier ergab sich im Wesentlichen eine *Übereinstimmung* von *Logik* mit der *normalen* (deutschen) Sprache.

In der *Aussagen-Logik* ist eine Implikation $X \rightarrow Y$ (also ohne Quantor, nur mit impliziter Quantität) extensional zu verstehen als „alle X sind Y“:

In der *normalen Sprache* wird ein Satz – ohne Zahlwort, nur mit impliziter Quantität – entsprechend verstanden; so ist z. B. bei ‚der Mensch ist sterblich' oder ‚Menschsein heißt sterblich sein' gemeint: „Alle Menschen sind sterblich“. In der Negation: ‚Der Mensch ist nicht sterblich' hieße: „Alle Menschen sind nicht sterblich“.

Nur kurz erwähnt sei: Interpretiert man $X \rightarrow Y$ als *individuellen* Satz, dann wäre er zu interpretieren als: „X ist in *allen* Fällen (immer) Y“, man kann dies als *quasi extensionale* Interpretation bezeichnen, man bezieht sich auf die Klasse der *Fälle* oder die Klasse der Zeitpunkte.

Übersicht: Extensionale Quantität in der Aussagen-Logik (individuell)

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
X ist immer Y	X ist in 100% aller Fälle ein Y	$X \rightarrow Y$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(\Phi) = 1$
X ist niemals Y	X ist in 0% aller Fälle ein Y	$\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(\Phi) = 0$

1-4-5-2 INTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

Jetzt geht es um die Frage, wie sich die *intensionale* Quantität (aussagen-)logischer Strukturen bestimmen lässt. Denn aussagen-logische Relationen wie $X \rightarrow Y$ enthalten nicht nur extensional, sondern auch intensional eine implizite quantitative Bestimmung.

Auf die intensionale Quantität wurde schon mehrfach eingegangen (vor allem in 1-3-5), es ist die Quantität des *Prädikats*, im Allgemeinen die Quantität einer *Eigenschaft*.

Wichtig ist, hier folgende Verwechslung zu vermeiden: *Intensionale Quantität* heißt *nicht* (z. B.):

„*Wie viele* Menschen besitzen die *Eigenschaft* der Klugheit?

Sondern:

„*Zu welchem Grad* ist dieser Mensch (oder sind alle Menschen) klug?“

(bzw.: „zu welchem Grad besitzt dieser Mensch die Eigenschaft Klugheit?“)

Es geht hier also nicht primär darum, ob eine Relation/ein Satz *generell* extensional oder partiell intensional formuliert bzw. interpretiert wird, sondern um die *Art der Quantifizierung*. Z. B.: ‚*alle* Menschen besitzen die Eigenschaft der Intelligenz’. Hier liegt eine *extensionale Quantifizierung* vor (obwohl auch – intensional – eine Eigenschaft angesprochen wird). Dagegen: ‚dieser Mensch besitzt *vollkommen* die Eigenschaft der Intelligenz (bzw. besitzt die Eigenschaft vollkommener Intelligenz)’; hier liegt eine *intensionale Quantifizierung* vor.

Nun haben wir es in der klassischen *Aussagen-Logik* nicht mit *Prädikaten* zu tun, ein Relation $X \rightarrow Y$ (bzw. $A \rightarrow B$) wird primär gedeutet als Verbindung zwischen zwei (nicht analysierten) Aussagen: „wenn X wahr ist, dann auch Y“ bzw. „wenn X wahr ist, dann ist in *allen* Fällen auch Y wahr“.

Aber wir haben *extensional* die Aussagen-Logik *erweitert*, so dass wir z. B. $X \rightarrow Y$ auch als „alle X sind Y“ deuten. Und entscheidend ist: logische Relatoren wie $X \rightarrow Y$ beinhalten implizit immer ein „alle“, numerisch den Wert $p = 1$. Daher dürfen wir $X \rightarrow Y$ immer mir $p(X \rightarrow Y) = 1$ übersetzen.

Können wir die Aussagen-Logik *intensional* genauso erweitern und interpretieren wie extensional? Nehmen wir das zunächst einmal als Hypothese an. Dabei wäre es am einfachsten, von einem (singulären) *Individuum* X auszugehen, dem eine *Eigenschaft* Y zukommt. (Das ist allerdings nur *partiell* intensional; *streng* intensional bezieht man sich *nur* auf Eigenschaften/Begriffe, nicht auf Individuen, was hier aber wenig sinnvoll wäre.)

So kann man $X \rightarrow Y$ partiell intensional zunächst einmal deuten als „X besitzt die Eigenschaft Y“ bzw. „X besitzt nicht die Eigenschaft Y“, oder verkürzt: „X ist (ein) Y“, $\neg(X \rightarrow Y)$ als „X ist nicht (ein) Y“. Auch hier darf man nicht, was zunächst naheliegend erscheinen mag, $X \rightarrow \neg Y$ schreiben. Denn dann könnte zugleich wahr sein, dass X ein Y ist und dass X kein Y ist, was aber unmöglich ist.

Für eine konkretere, *spezifischere Darstellung* lässt sich mit *Individuen*- und *Prädikat*-Zeichen arbeiten, dann würde ich schreiben: $x_i \rightarrow F$ und $\neg(x_i \rightarrow F)$.

Im Beispiel: Sokrates $\rightarrow$ weise, für: „Sokrates besitzt die Eigenschaft der Weisheit“, oder kurz: „Sokrates ist weise“.

Nun ergeben sich aber zwei Probleme:

• Erstens, die Quantität in der (Aussagen-)Logik ist offensichtlich *extensional angelegt*: Es bietet sich viel mehr an, $X \rightarrow Y$ zu deuten als „alle X sind Y“ als in der Weise: „X besitzt die Eigenschaft Y (in der und der Größe)“.

• Zweitens, bei der *extensionalen* Quantität ist es recht *eindeutig* (wie ich gezeigt habe), dass hier nur *eine* quantitative Deutung in Frage kommt: für den *positiven* Fall $X \rightarrow Y$ mit $p = 1$ und den negativen Fall $\neg(X \rightarrow Y)$ mit $p = 0$. Dies ist aber im intensionalen Fall keineswegs so eindeutig, wie ich vor allem in 1-4-5-4 genau ausführen werde. Man darf keineswegs einfach automatisch unterstellen, „X ist Y“ würde quantitativ durch $p(X \rightarrow Y) = 1$ wiedergeben und „X ist nicht Y“ durch $p(X \rightarrow Y) = 0$, sondern es ergeben sich auch verschiedene andere Möglichkeiten.

Nun verlangt die Logik aber Klarheit. Deshalb vollziehe ich dennoch eine *bestimmte* Deutung der intensionalen Quantität, und zwar eine, die der extensionalen Quantität entspricht. Und zwar entspricht sich:

extensional:	intensional:
alle	vollständig
alle nicht	vollständig nicht (gar nicht)

Was extensional eine *Klasse von Objekten* ist, das ist intensional eine *Klasse von Größeneinheiten*.

So ergibt sich für die *intensionale Quantität* einer (individuellen) Relation;
positiv: $X \rightarrow Y$ steht für: „X ist *vollständig* Y“
negativ: $\neg(X \rightarrow Y)$ steht für: „X ist *vollständig nicht* Y“
Bzw. positiv: „X besitzt in vollkommener (maximaler) Weise die Eigenschaft Y“.
Negativ: „X besitzt in keinster (minimalster) Weise die Eigenschaft Y“.

Im Beispiel: Sokrates → weise, für: „Sokrates besitzt in *vollkommenem Ausmaß* die Eigenschaft Weisheit“, „Sokrates ist *vollständig* weise“.

Man könnte irrtümlich meinen, $X \rightarrow Y$, auf ein *Individuum* bezogen, hieße: „X ist in *allen* Fällen Y“. Aber dies ist die extensionale Form eines individuellen Satzes, eben nicht die intensionale Form, vgl. oben.

Diese Bestimmung der intensionalen Quantität ist zwar etwas willkürlich, es bedeutet eine *Festlegung*, die sich nicht ohne weiteres aus der Logik ergibt; hier wird nicht nur etwas implizit Vorhandenes explizit gemacht, sondern eine Entscheidung getroffen. Andererseits lässt es sich gut begründen, dass wenn man einen Relator wie → *extensional* mit $p = 1$ bzw. $p = 0$ (bei Negation) interpretiert, dass er dann *intensional* mit den gleichen Zahlenwerten interpretiert wird.

Man kann die intensionale Quantität prinzipiell in zweierlei Weise *schreiben*:

Erstens, man verwendet eine *einheitliche Form*, z. B. $X \rightarrow Y$, die – je nach Kontext – gedeutet werden, als extensionale oder intensionale Quantität.

Zweitens, man will genau kennzeichnen, ob man die extensionale oder die intensionale Quantität meint. Dies ist m. E. die bessere Lösung. Daher verwende ich für die intensionale Quantität *eckige Klammern*, während ich für die extensionale Quantität die gebräuchlichen runden Klammern nutze.

Übersicht: Intensionale Quantität in der Aussagen-Logik

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
X ist *vollständig* Y	X ist zu 100% Y	$[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 1$	$p[\Phi] = 1$
X ist *gar nicht* Y	X ist zu 0% Y	$\neg[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 0$	$p[\Phi] = 0$

1-4-5-3 QUANTITATIVE PRÄDIKATEN-LOGIK

Diese Darstellung von ‚X ist (vollständig) Y' als $X \rightarrow Y$, nur mit Symbolen der herkömmlichen *Aussagen-Logik*, ist natürlich ungewöhnlich: Normal wäre hier die *Prädikaten-Logik*, mit Verwendung spezifischer Symbole für *Individuum* (‚x') und *Prädikat* (‚F') und einem spezifischen Relator, für den allerdings kein Symbol gesetzt wird, sondern der sich allein syntaktisch, durch die *Stellung* von ‚x' und ‚F' realisiert, z. B. als Fx oder ¬Fx.

Alternativ kommt die Verwendung des Element-Relators aus der Mengenlehre in Frage, also: $x \in F$ bzw. $x \notin F$.

Wie sind prädikaten-logische Ausdrücke wie Fx oder ¬Fx extensional und intensional *quantitativ* zu deuten?

• extensionale Quantität
Hier müssen wir unterscheiden: *bestimmtes* oder *unbestimmtes* Individuum.
Unbestimmtes Individuum:
Gehen wir zunächst von einem *unbestimmten* Individuum aus: x bzw. x_n. Wir schreiben also Fx bzw. Fx_n. Dann kann man zunächst die *absolute* Quantität q angeben. Denn anders als normalerweise in der Logik (z. B. in der Aussagen-Logik oder der Quantoren-Logik) ist für die Prädikaten-Logik die *absolute Quantität primär*: es wird von einzelnen Individuen x_1, x_2, x_3 usw. ausgegangen, deren Anzahl eben durch die absolute Quantität angegeben wird. Wenn irgendein Individuum x die Eigenschaft F hat, dann gibt es also jedenfalls dieses x, es könnte aber auch weitere Individuen mit der Eigenschaft F geben. Das schreibt man am besten wie folgt: $q(Fx) \geq 1$; d. h. „die Anzahl der Individuen mit der Eigenschaft F beträgt mindestens 1".
Zusammenfassend:

Fx: $q(Fx) \geq 1$
¬Fx: $q(Fx) = 0$

Kommen wir zur *relativen* Quantität p: Welchen *Prozentsatz* die Individuen mit der Eigenschaft F an allen Individuen haben, wissen wir nicht. Wir können aus $q(Fx) \geq 1$ nur für die *relative* Quantität folgern: $p > 0$, also:

Fx: $p(Fx) > 0$
¬Fx: $p(Fx) = 0$

Bestimmtes Individuum:
Betrachten wir nun ein *bestimmtes* Individuum x_i; dann bietet es sich an, zu schreiben: $q(Fx_i) = 1$. Denn dieses bestimmte Individuum ist eben genau *eins*. Für die relative Quantität p ergibt sich: $p(Fx_i) = 1$: denn ein Individuum von einer Menge mit eben nur diesem einem Individuum als Element ergibt 1/1, also 1. Die Quantität der Relation mit einem *unbestimmten* Individuum ist aber die wesentlichere, und auf diese werde ich mich nachfolgend auch weitgehend beschränken. Zusammenfassend:

Fx_i: $q(Fx_i) = 1$
$\neg Fx_i$: $q(Fx_i) = 0$
Fx_i: $p(Fx_i) = 1/1 = 1$
$\neg Fx_i$: $p(Fx_i) = 0/1 = 0$

• Intensionale Quantität
Hier können wir auf die Unterscheidung zwischen einem bestimmten und einem unbestimmten Individuum verzichten Es gibt intensional keine *eindeutige implizite* Quantität, die nur *explizit* zumachen wäre (vgl. später).

Z. B. Fx_i mit der Bedeutung ‚Peter ist intelligent'. Es wird nicht explizit gesagt, *welche* Quantität hier der Intelligenz von Peter zugeschrieben wird, also *wie* intelligent Peter ist. Sondern es handelt sich um ein *2-wertiges* System, das nur zwischen „ja" und „nein" unterscheidet. Ich beschränke mich hier auf die relative Quantität p (weil die absolute Quantität q wenig informativ ist). Wir können nur sicher wissen:

Fx: $p[Fx] > 0$
¬Fx: $p[Fx] < 1$

(ich verwende wieder eckige Klammern für die intensionale Quantität). Denn ein *positiver* Wert muss über 0 liegen, ein *negativer* Wert muss unter dem Maximum 1 liegen.

Dies sind natürlich wenig präzise Angaben. Denn > 0 umfasst alle (infiniten) Werte bis einschließlich 1; und < 1 umfasst alle (infiniten) Werte bis einschließlich 0. Ich möchte hier dennoch nicht (wie bei X → Y bzw. x → F) eine genauere Quantität festlegen.

Nun ergibt sich aber folgendes Problem: Prädikaten-logisch sind Fx und seine Negation ¬Fx *kontradiktorisch*. Für eine quantitative Deutung muss man verlangen, dass sie zumindest *konträr* ist (diese Problematik wurde ja schon bei der quantitativen Aussagen-Logik behandelt). $p[Fx] > 0$ und $p[Fx] < 1$ sind aber nur *subkonträr*, d. h. sie können zusammen wahr sein; wenn man z. B. den Wert $p[Fx] = 0{,}5$ hat, dann sind $p[Fx] > 0$ und $p[Fx] < 1$ beide gültig. Das widerspricht aber jedenfalls zunächst unseren Vorstellungen, denn Fx und ¬Fx können nicht beide gültig sein.

Eine mögliche Lösung ist: Wir ergänzen die Definitionen Fx: $p[Fx] > 0$ und ¬Fx: $p[Fx] < 1$ durch die Gleichung: $p[Fx] = 1 - p[\neg Fx]$. Wenn z. B. $p[\neg Fx] = 1$, dann gilt: $p[Fx] = 0$ und umgekehrt. Es wird also ausgeschlossen, dass $p[Fx]$ und $p[\neg Fx]$ beide den Maximalwert 1 besitzen; wenn $p[Fx] = 1$, wenn also x *vollständig* die Eigenschaft F besitzt, dann darf x gar nicht die Eigenschaft ¬F besitzen. Es ist aber möglich, dass z. B. $p[Fx] = 0{,}6$ und $p[\neg Fx] = 0{,}4$. $p[Fx] > 0$ bedeutet eben nur, dass x mindestens etwas die Eigenschaft F besitzt, und $p[Fx] < 1$ bedeutet nur, dass x nicht vollständig die Eigenschaft F besitzt.

Wie wird aber der Ausschluss von Fx und ¬Fx quantitativ gedeutet? Man verlagert den Ausschluss allein auf die *extensionale* Quantität: hier gilt (vgl. oben) für ein unbestimmtes Individuum: Fx: $p(Fx) > 0$ und ¬Fx: $p(Fx) = 0$ (kontradiktorisch) sowie für ein bestimmtes Individuum Fx_i: $p(Fx_i) = 1$ und $\neg Fx_i$: $p(Fx_i) = 0$ (konträr), was beides den Bedingungen genügt. „x ist F“ (ohne Zusätze wie „vollständig“) wäre dann nur Fx zu schreiben, „x ist nicht F“ nur ¬Fx.

Dagegen gibt es intensional-quantitativ keinen Ausschluss von Fx und ¬Fx; streng genommen sollte man zur Unterscheidung aber auch schon die prädikaten-logischen Ausdrücke in eckigen Klammern schreiben, also [Fx] und ¬[Fx].

Wenn man sich von den Vorgaben der letztlich (wie die Aussagen-Logik) *2-wertigen* Prädikaten-Logik, also Fx bzw. ¬Fx löst, ist es natürlich möglich, im Rahmen einer intensional-quantitativen Logik beliebig genaue Angaben für einen besonderen Fall zu machen, also z. B.: $p[Fx_i] = 0{,}78$; das könnte heißen: „John besitzt die Eigenschaft der Freundlichkeit zu 78 %“.

Die prädikaten-logische Darstellung ist wie gesagt für individuelle Relationen bzw. Sätze üblich, und so könnte man hier die *quantitative, intensionale Prädikaten-Logik* in den Vordergrund stellen und ggf. auf die quantitative, intensionale Aussagen-Logik ganz verzichten. Aber im Sine einer Verallgemeinerung bzw. Vereinheitlichung der Logik ist es doch berechtigt, eine intensionale Aussagen-Logik (genauer partiell intensionale Aussagen-Logik) zu betreiben.

1-4-5-4 NORMALE SPRACHE

Ich habe oben festgestellt, dass ein prädikaten-logischer Satz wie ‚Fx_i’ verschiedene Deutungen der *intensionalen* Quantität zulässt. Dies möchte ich anhand der normalen Sprache erläutern. Ich möchte dazu zunächst untersuchen, welche *implizite Quantität* ein Satz wie ‚Peter ist intelligent’ oder ‚Peter ist nicht intelligent’ in der normalen Sprache besitzt.

Dazu folgende Vorbemerkung: auch die Sprache kennt verschiedene Ebenen: *2-wertig*, *4-wertig* und *mehr-wertig*.

Eine Unterscheidung wie Peter ist intelligent' oder ‚Peter ist nicht intelligent' ist 2-wertig. Zwar könnte der Sprecher genauer differenzieren (‚Peter ist *sehr* intelligent' usw.), aber solange er das nicht tut, befindet man sich in einem 2-wertigen System. In einem 2-wertigen System sind die beiden Werte (wenn sie nicht äquivalent sind, was aber sinnlos wäre) immer kontradiktorisch. Wie schon beschrieben: 1 und 0 sind z. B. in einem 2-wertigen System *kontradiktorisch*, obwohl sie es sonst, in einem mehr-wertigen logischen System, nicht sind (dort sind sie nur *konträr*); diese systembedingte Kontradiktion gilt für alle hier diskutierten Möglichkeiten.

Dabei kommen konkret folgende Deutungen in Frage:

für: Fx_i $p = 1$, $p > 0$, $p > 0{,}5$, $p > 0{,}75$

$\neg Fx_i$ $p = 0$, $p < 1$, $p < 0{,}5$, $p < 0{,}25$

Ich verwende also grundsätzliche *relative* Werte p (wie Prozentwerte). Theoretisch könnte man natürlich auch von *absoluten* Werten ausgehen, m. E. wird das aber nicht der Sprache gerecht, eine Aussage wie „jemand ist intelligent" oder „jemand ist nicht intelligent" bezieht sich immer auf eine Vergleichsbasis, gilt relativ zu dieser Basis.

Allerdings liegen relativen Werten immer absolute Werte zugrunde. Doch würde ein Orientierung an absoluten Werten nur zu *Einzelaussagen* führen, z. B.: „jemand ist groß": er ist > 1,80 Meter; „jemand ist schwer": er ist > 80 Kilogramm; „jemand ist alt": er ist > 70 Jahre usw. So erhält man keinen *generellen* Wert, ab wann man jemandem eine Eigenschaft zuspricht.

Dies ist anders bei *relativen* Werten, z. B. Prozentwerten. Sie beziehen sich immer auf eine *Gesamtheit*: 50% sind 50 von 100 (= Gesamtheit); es könnten natürlich auch 60 von 120 sein usw. Diese *Gesamtheit* ist das *Maximale*. Sie hat den Wert $p = 1$ bzw. $p = 100\%$. Dabei gibt es zwei *Vergleichsbasen*:

– eine *theoretische*, *ideale* Gesamtheit: in diesem Fall geht man von der theoretisch maximal möglichen Größe aus, z. B. von der maximalen Intelligenz oder jedenfalls von der maximal möglichen Intelligenz für einen Menschen (ggf. auch nur von dem bisher größten gemessenen Wert). Was das konkret für ein I. Q. ist, wird damit nicht ausgesagt; es könnte z. B. 250 sein oder auch „nur" 180, wenn es ein realer Wert sein soll (natürlich muss es nicht 100 sein, ist normalerweise nicht mit der Prozentzahl identisch). Aber um konkrete Aussagen zu machen, muss man den Maximalwert, die Obergrenze festlegen. Die Gesamtheit ist hier die Gesamtheit der *Größen-Einheiten*, konkret der Intelligenz-Maßeinheiten.

– eine *empirische*, *statistische* Gesamtheit: hier ist die Gesamtheit die Menge aller Vergleichsobjekte, im Beispiel die Klasse der Menschen; aber die Berechnung verläuft in diesem Fall anders: Ein Mensch ist *maximal* intelligent, wenn er intelligenter ist als 100% der anderen Menschen. Der Intelligenz-Wert wird hier rein *vergleichend* bestimmt, wobei natürlich die Vergleichsgruppe von entscheidender Bedeutung ist.

Diese beiden Gesamtheiten bzw. Deutungen sind durchaus nicht gleichzusetzen, ihre Werte sind ganz *unabhängig*. Es kann sein, dass sehr viele Menschen einen hohen Wert auf der Intelligenz-Skala besitzen, es können aber auch nur sehr wenige sein. Angenommen, 60% der Menschen hätten nur einen I. Q. von 65, dann wäre jemand mit einem I. Q. von 70 bereits intelligent zu nennen, obwohl er weit entfernt ist von der Hälfte der möglichen Intelligenzeinheiten (z. B. 90, wenn 180 der höchste I. Q. eines Menschen ist). M. E. ist die *theoretische* Quantitäts-Deutung wichtiger, und vor allem auf sie werde ich mich im Folgenden beziehen. Übrigens, wie man konkret Intelligenz misst, z. B. durch welche Intelligenz-Tests, ist für unsere Fragestellung ohne Bedeutung.

Nach diesen Vorklärungen kann man *allgemein* angeben, ab welchem Wert p man davon ausgeht, dass jemand *eine Eigenschaft besitzt* oder *eine Eigenschaft nicht besitzt*, z. B. dass jemand intelligent ist oder nicht.

• Interpretation: $p = 1$, $p = 0$
Hier gilt im Beispiel:

- Peter ist intelligent ($p = 1$):
Peter hat einen I. Q. von $p = 1$, d. h. er besitzt *vollständige*, *maximale* Intelligenz.
Bzw. Peter ist intelligenter als 100 % der anderen Menschen, er ist der intelligenteste.
- Peter ist nicht intelligent ($p = 0$):
Peter hat einen I. Q. von $p = 0$, d. h. er besitzt *gar keine* Intelligenz.
Bzw. Peter besitzt weniger Intelligenz als 100% aller Menschen, er ist der dümmste.

Vorteil dieser quantitativen Interpretation ist: sie entspricht genau der Interpretation, die ich für die *extensionale* Quantität aussagen-logischer Relationen gewählt habe. Dort bestimmte ich: *alle*: $p = 1$, *alle nicht*: $p = 0$. Und „alle" (extensional) entspricht „vollständig" (intensional), „alle nicht" (extensional) entspricht „gar nicht" (intensional). Diese *Parallelität* wäre natürlich willkommen.

Aber die Deutung besitzt auch verschiedene Nachteile, jedenfalls wenn man von der *normalen Sprache* ausgeht.

Zunächst zum positiven Fall, zu ‚Peter ist intelligent': wie gesagt, $p = 1$ (bzw. $p = 100\%$, nämlich 100 von 100) ist der *Maximalwert*. Wenn wir von jemand sagen, er ist intelligent, meinen wir aber nicht gleich, dass er *maximal* intelligent ist, egal, auf welche der beiden Gesamtheiten wir uns beziehen. Er muss zwar einen relativ hohen Wert aufweisen, aber keineswegs $p = 1$ (welcher Wert da konkret in Frage kommt, werden die folgenden Ausführungen zeigen).

Zweitens, man gibt für eine Eigenschafts-Zuschreibung normalerweise nicht *einen* Wert wie bei $p = 1$ an, sondern ein *Intervall*, in Form einer Ungleichung. Bei $p = 1$ und $p = 0$ ist zwar diese genaue Bestimmung möglich, aber angenommen man würde bestimmen: positiv: $p = 0{,}75$. Dann würden alle anderen Werte (paradoxerweise auch die $> 0{,}75$) stehen für: ‚Peter ist nicht intelligent'. Daher würde man z. B. angeben: Intelligenz bedeutet $p > 0{,}75$ (vgl. unten).

Zu ‚Peter ist *nicht* intelligent': Auch die Deutung von „Peter ist nicht intelligent" als $p = 0$ überzeugt jedenfalls normalsprachlich nicht. Denn wenn wir von jemand sagen, er ist nicht intelligent, meinen wir ja nicht, dass er absolut dumm ist, z. B. einen I. Q. von 0 hat, sondern auch hier, dass er *relativ zu einer Basis* wenig intelligent ist.

Sieht man von der 2-Wertigkeit einmal ab, liegt zwischen $p = 1$ und $p = 0$ eine *konträre* Beziehung vor, d. h. jemand kann weder intelligent ($p = 1$) noch nicht intelligent ($p = 0$) sein, wenn er nämlich einen Wert $0 < p < 1$ hat. Eigentlich ist der konträre Gegensatz eher ein Vorteil, denn man kann dieses 2-wertige System dann erweitern, ohne dass man die bisherigen Einstufungen ändern muss. Z. B. kann man den Bereich $0 < p < 1$ als „mittel-intelligent" kennzeichnen. Die strikte Unterteilung in $p = 1$ und $p = 0$ zeigt somit auch einen weiteren Nachteil: Man erfasst hier nur 2 Werte von unendlich *vielen* (des Bereichs $0 < p < 1$), schon ein Wert wie 0,001 oder 0,999 wird nicht mehr erfasst.

• Interpretation $p = 1$, $p < 1$

- Peter ist intelligent ($p = 1$)
Für die Deutung $p = 1$ gilt das oben gesagte.
- Peter ist nicht intelligent ($p < 1$)
Das bedeutet hier: Peter ist nicht maximal intelligent, er besitzt nicht alle möglichen Intelligenz-Einheiten.

Hier besteht (anders als bei $p = 1$, $p = 0$) auch unabhängig von der Beschränkung auf ein 2-wertiges System ein *kontradiktorisches* Verhältnis, was unser sprachlichen Intuition mehr entspricht (auch wenn der *konträre* Gegensatz technische Vorteile hat, wie gerade aufgezeigt). Und $p < 1$ wirkt als Interpretation zunächst überzeugender als $p = 0$.

Andererseits: $p < 1$ umfasst jeden beliebigen Wert kleiner 1, also z. B. 0,99. Und dies wäre sicher keine angemessene Deutung für ‚Peter ist nicht intelligent': übertragen auf den üblichen Intelligenzquotienten von ca. maximal 180, gälte z. B. auch der Wert 170 noch als „nicht intelligent", während wir das normalerweise als äußerst intelligent auffassen. Außerdem ist hier eine Asymmetrie, dass p = 1 genau *einen* Wert umfasst, p < 1 aber für eine *Unendlichkeiten* von Werten steht; das entspricht kaum der Auffassung der normalen Sprache: die Erfassung unendlicher Werte ist – jedenfalls in der normalen Sprache – natürlich nur eine theoretische Möglichkeit, praktisch spielt das keine Rolle. (Nimmt man allerdings die Menge aller – anderen – Menschen zum Vergleich, dann kann man davon ausgehen, dass dies eine endliche Menge ist.)

• Interpretation p > 0, p = 0
  - Peter ist intelligent (p > 0)
  - Peter ist nicht intelligent (p = 0)

Die Interpretation p = 1 ist wie erläutert nicht überzeugend. Aber auch die Interpretation p > 0 überzeugt nicht. Diese Deutung geht ins andere Extrem: während p = 1 einen unrealistisch hohen Wert ansetzt, erlaubt p > 0 auch zu niedrige Werte. Denn p > 0 ist ja z. B. auch 0,01. Und zu sagen, jemand hat eine Intelligenz von 1% heißt sicher nicht, er sei intelligent.

Zu: ‚Peter ist nicht intelligent' (p = 0)

Hier besteht zwar wieder eine *Kontradiktion* (zu p > 0), was eher erwünscht ist. Aber oben wurde schon aufgezeigt, dass p = 0 nicht überzeugt.

• Interpretation p > 0,5, p < 0,5
  - Peter ist intelligent (p > 0,5)
  - Peter ist nicht intelligent (p < 0,5)

Diese Interpretation wirkt überzeugend. ‚Peter ist intelligent' wird hier so interpretiert: Peter ist *intelligenter als die Hälfte*. D. h. er besitzt von den maximalen Intelligenz-*Einheiten* mehr als 50%. Und ‚Peter ist nicht intelligent' wird interpretiert als: Peter ist weniger intelligent als zur Hälfte: er besitzt von den möglichen Intelligenz-*Einheiten* weniger als 50%.

In Bezug auf die Menge aller Menschen ergibt sich folgende Deutung: ‚Peter ist intelligent' wird dann so interpretiert: Peter ist *intelligenter als der Durchschnitt*. Der Durchschnitt sind 50%, d. h. Peter ist intelligenter als 50% der übrigen Menschen. Das hieße ebenfalls: p > 0,5.

‚Peter ist nicht intelligent' wird hier interpretiert als: Peter ist weniger intelligent als der Durchschnitt, also dümmer als 50% der (anderen) Menschen.

In diesem Fall dient als Vergleichsbasis also eine *statistische Verteilung*. Wichtig ist natürlich zu sagen, mit wem man Peter vergleicht. Wenn man seine Intelligenz mit der von Affen vergleichen würde, dann könnte er z. B. schon mit einem I. Q. von 30 als intelligent durchgehen.

Es handelt sich hier wieder um ein *konträres* Verhältnis, weil der Wert p = 0,5 nicht erfasst wird (sondern nur > 0,5 oder < 0,5). Aber es fällt hier nur dieser *eine* Wert 0,5 aus der Betrachtung raus. (Und dieser Wert entspricht der *Zufallserwartung*, wie an anderer Stelle erläutert wird.) Somit wird ein sehr großer Bereich an Werten abgedeckt.

Allerdings gibt es auch Einwände: Man kann in Frage stellen, ob diese Werte wirklich realistisch sind. Bei p > 0,5 gilt ja ein Wert von 51% schon als intelligent. Wenn man von jemand sagt, dass er intelligent ist, erwartet man doch einen höheren Wert. (Bei der negativen Einstufung, dass jemand unter 0,5 als „nicht intelligent" gilt, ist es überzeugender.)

• Interpretation p > 0,75, p < 0,25
  - Peter ist intelligent (p > 0,75)
  - Peter ist nicht intelligent (p < 0,25)

Man könnte auch modifizieren: p ≥ 0,75, p ≤ 0,25.

Dieses Modell ist m. E. am überzeugendsten. Ob es nun genau ein Verhältnis von 75:25 sein muss, sei dahin gestellt. Aber ungefähr das meint man, wenn man jemanden ‚intelligent' nennt, dass er einen Intelligengrad über 75% besitzt. Dass er mehr als 75 % der möglichen Intelligenz-Einheiten besitzt bzw. dass er intelligenter ist als 75% der anderen Menschen. Und wenn jemand ‚nicht intelligent' nennt, dass er dann einen I. Q. von unter 25% besitzt (d. h. natürlich nicht einen I. Q. von unter 25, hier liegen andere Messeinheiten vor.)

Allerdings gibt es auch hier Probleme: so liegt wieder ein *konträres* Verhältnis vor, und dabei wird ein großer Bereich 0,25 – 0,75 ausgespart. Wenn man sich allerdings von der strikten *2-Wertigkeit* trennt, wie dies in der Sprache ja durchaus gemacht wird, wenn man z. B. unterscheidet zwischen ‚intelligent' (> 0,75), ‚mittel intelligent' (0,25 – 0,75) und ‚nicht intelligent' (< 0,25), dann ist dieses Modell besonders überzeugend.

• Diskussion der Werte

Man könnte in diesem Zusammenhang auch fragen, ob *je nach Eigenschaft* eine andere quantitative Interpretation angemessen ist, ob also eine *ontische* (bzw. ontologische) Abhängigkeit besteht, die aus der Logik, sogar auch aus der Sprachanalyse herausführt.

Z. B. bei der Relation „Peter ist gesund". Bei „gesund" könnte man auch vertreten, dass ein Wert von p nahe 1 ($p \approx 1$) gemeint ist, denn wenn man jemanden als ‚gesund' bezeichnet, meint man doch, dass er *fast vollständig* gesund ist (sonst schränkt man die Aussage ein); mit „nicht gesund" könnte ein Wert < 1 gemeint sein. Bei diesem Beispiel käme also das Modell $p = 1$ versus $p < 1$ ungefähr hin.

Noch eindeutiger ist es wohl bei der Relation: „Petra ist schwanger". Hier muss man die intensionale Quantität offensichtlich mit $p = 1$ ansetzen. Denn wie der Volksmund sagt ‘ein bisschen schwanger geht nicht' (obwohl theoretisch auch hier eine Quantifizierung vorstellbar wäre); „nicht schwanger" besäße dann der Wert $p = 0$. Ähnlich bei einer Aussage wie „Petra ist sterblich".

Alle bisherigen Beispiele waren *Eigenschaften* im eigentlichen Sinn, sprachlich *Adjektive*. Aber in der modernen Logik werden auch *Artbegriffe* oder *Gattungsbegriffe* (sprachlich *Substantive*) wie Eigenschaften behandelt. Gerade hier gibt es nur die eine Alternative: die intensionale Quantität ist $p = 1$ oder $p = 0$ (wenn man nicht spitzfindig doch eine quantitative Abstufung einführt). Z. B. „Der Mensch ist ein Säugetier" versus „Der Mensch ist kein Säugetier". Der Mensch ist entweder *vollständig* ein Säugetier oder er ist es *vollständig nicht*. Hier hat die Unterscheidung $p = 1$ und $p = 0$, die oben kritisiert wurde, doch einige Argumente mehr für sich. Für diese Unterscheidung spricht auch, dass bei ihr der positive und der negative Wert sich genau entsprechen, beide sind eben genau *ein* Wert.

Allerdings wurde auch deutlich, dass man normalsprachlich nicht mit *einer* Unterteilung auskommt, sondern dass man – je nach Eigenschaft bzw. Adjektiv/Substantiv unterschiedliche intensionale Quantitäten benötigt.

1-4-5-5 ABSCHLUSS: ÜBERSICHT ÜBER INTENSIONALE QUANTITÄT

• Aussagen-Logik

Für die Aussagen-Logik schien es sinnvoll, die *intensionale* Quantität entsprechend zur *extensionalen* (impliziten) Quantität zu deuten, d. h. alle/immer versus alle nicht/niemals.

vollständig: $p = 1$, vollständig nicht bzw. gar nicht: $p = 0$.

Dies ist quantitativ gesehen zwar nur konträr, in einem 2-wertigen System aber kontradiktorisch.

• Prädikaten-Logik

Hier schien es angemessen, eine quantitative Deutung vorzunehmen, die für alle möglichen Konkretisierungen offen ist und gültig bleibt.

Für [Fx] ist das $p[Fx] > 0$, dies umfasst die möglichen Werte > 0,5, > 0,75 und 1.

Für ¬[Fx] ist das p[Fx] < 1, dies umfasst die Werte < 0,75, < 0,5 und 0.

• Sprache

Die Sprache, die eben nicht formal, sondern inhaltlich konkret ist, verlangt in besonderer Weise, alle möglichen quantitativen Verhältnisse darzustellen. Daher ist es wohl angemessen, für die qualitative Unterscheidung „ ... besitzt die Eigenschaft" versus „ ... besitzt die Eigenschaft *nicht*" gar kein generelles Zahlenpaar anzugeben, sondern je nach Einzelfall, je nach den realen Verhältnissen, zu interpretieren. Die bevorzugte Deutung ist aber:

Ja: bedeutet p > 0,75, nein/nicht: bedeutet p < 0,25.

Übersicht über intensionale Quantifizierung

Aussagen-Logik	[X → Y] p[X → Y] = 1 X ist (vollständig) Y	¬[X → Y] p[X → Y] = 0 X ist (vollständig) nicht Y
Prädikaten-Logik	[Fx] p[Fx] > 0 x ist (mindestens etwas) F	¬[Fx] p[Fx] < 1 x ist nicht (vollständig) F
Sprache z. B.	 Petra ist schwanger p = 1	 Petra ist nicht schwanger p = 0
	John ist gesund p = 1	John ist nicht gesund p < 1
	Frank hat Schulden p > 0	Frank hat keine Schulden p = 0
	Lisa ist intelligent p > 0,75	Lisa ist nicht intelligent p < 0,25
	Ralf ist zufrieden p > 0,5	Ralf ist nicht zufrieden p < 0,5

Sicherlich könnte man die sprachlichen Beispiele ggf. auch anders quantitativ einordnen.

1 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

1-5-0 Einführung

1-5-0-1 QUANTITATIVE DEFINITION
In der Quantoren-Logik werden, wie bereits ausführlich dargestellt, normalerweise 4 Werte unterschieden: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. *Quantitative* Quantoren-Logik bedeutet soviel wie *quantifizierte* Quantoren-Logik, d. h. diese o. g. 4 Werte sollen nun quantitativ-numerisch bestimmt werden.

Und zwar sind *„alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht"* primär *relative* Größen (p), aus denen sich in begrenztem Umfang *absolute* Größen (q) ableiten lassen (vgl. unten). Zur Darstellung relativer Größen bieten sich in erster Linie *Dezimalzahlen* an. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass hier prinzipiell gilt: $0 \leq p \leq 1$.

Man kann diese Werte aber auch *prozentual* oder durch einen *Bruch* bestimmen:

	Dezimal		Prozent	Bruch
1. alle	p = 1	(p = 1,0)	100%	n/n
2. alle nicht	p = 0	(p = 0,0)	0%	0/n
3. einige	p > 0	(p > 0,0)	> 0%	> 0/n
4. einige nicht	p < 1	(p < 1,0)	< 100%	< n/n

Damit bedeutet die (quantitative) *Quantoren-Logik* eine Erweiterung der (quantitativen) *Aussagen-Logik*, bei der nur zwischen „alle" und „alle nicht" unterschieden wird.

1-5-0-2 PRÄDIKATEN-LOGIK / ABSOLUTE VS. RELATIVE GRÖSSE
Ein Problem ist in diesem Fall die *Prädikaten-Logik*. Sie war als Modell eingeführt worden, das einerseits individuelle Aussagen erlaubt (z. B. Fx_i), die in der Quantoren-Logik nicht möglich sind, andererseits sollten sich *quantoren-logische* Relationen in *prädikaten-logische* übersetzen lassen, z. B. $\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$.

Nun ist „alle" eine *relative* Größe (p), welche über die *absolute* Größe (q) nur aussagt, dass q > 0. Also: $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) > 0$ bzw. $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) \geq 1$. p = 1 und q = 1 dürfen dabei auf keinen Fall verwechselt werden.

Komplizierter ist es noch bei molekularen Aussagen mit *Implikation*: z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $p(F \rightarrow G) = 1$, z. B. „alle Menschen sind sterblich". Bei Verwendung der *normalen Implikation* ist für die Wahrheit von $p(F \rightarrow G) = 1$ nicht einmal notwendig, dass es überhaupt *einen* Menschen gibt; es darf nur kein Individuum x geben, für das gilt: Es ist Mensch und es ist nicht sterblich. Denn $p(F) = 0 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$.

Bei dem Ausdruck $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ werden aber als *Indizes* absolute Größen (natürliche Zahlen) verwendet. Auch wenn nicht genau festgelegt wird, wie viele x die Eigenschaft

F haben, bei obiger Formalisierung sind es mindestens 3, wenn nämlich n = 3. Sinnvoller wäre daher anstatt der üblichen Aufzählung $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ wohl einfach: $\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_n$; d. h. man kann jede beliebige Zahl für n einsetzen, jedes beliebige x ist ein F, ggf. nur *eins*.

Anders ist es dagegen bei „alle nicht“: dieser Begriff umfasst zugleich präzise eine *absolute* wie eine *relative* Größe, prozentual also 0 oder 0%, was hier gleichbedeutend ist, denn: $q(F) = 0 \Leftrightarrow p(F) = 0\%$. Entsprechend gilt bei „einige“: auch dieser Begriff umfasst zugleich eine *absolute* wie eine *relative* Größe, $q > 0$ und $p > 0\%$.

1-5-0-3 EINFACHE RELATIONEN / DEZIMAL-DARSTELLUNG

Als *einfache* Relationen haben wir solche eingeführt, in denen nur *ein* Prädikat-Ausdruck vorkommt und in denen nur der Gesamt-Relation ein Wahrheitswert zugewiesen wird, also z. B. Fx (extensional-intensional) oder $x \in F$ (rein extensional).

Wie ich dargelegt habe, könnte man – im Sinne einer vereinheitlichten Logik – eine einfache Relation auch als $x \rightarrow F$ formalisieren, dabei den Wahrheitswert der Gesamt-Relation als *Funktion* der Wahrheitswerte von x und von F angeben; dann handelte es sich allerdings im Grunde - bereits um eine *komplexe* Relation (auf diese Problematik wurde schon eingegangen). Aus Gründen der Anpassung an die üblichen Formalisierungen wird dies hier aber nicht weiter verfolgt.

Wir sind bisher immer von 4 Werten in der (inklusiven) Quantoren-Logik ausgegangen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Nun kann man durch *zusätzliche Negationen* aus diesen 4 Werten 8 Werte machen. Z. B. wird so aus „alle nicht“ der Ausdruck „nicht alle nicht“. Geht man von 8 Werten aus und verwendet die Individuen-Variable x, so ergibt sich:

Alle x sind F	$\Lambda x(Fx)$	$p(F) = 1$
Alle x sind nicht F	$\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 1$
Nicht alle x sind F	$\neg\Lambda x(Fx)$	$p(F) < 1$
Nicht alle x sind nicht F	$\neg\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) < 1$
Einige x sind F	$Vx(Fx)$	$p(F) > 0$
Einige x sind nicht F	$Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) > 0$
Nicht einige x sind F	$\neg Vx(Fx)$	$p(F) = 0$
Nicht einige x sind nicht F	$\neg Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 0$

Es sei daran erinnert, man kann $\Lambda x(\neg Fx)$ oder $\Lambda x\neg(Fx)$ usw. schreiben, dies ist gleichbedeutend. Quantitativ kann man die *Individuenvariable* x einfügen oder weglassen: p(Fx) oder p(F); allgemeiner verwendet man statt des „F“ das „X“, also p(X). Wie im analytischen Teil genauer gezeigt werden wird, sind aber von den obigen 8 Relationen jeweils eine mit einer anderen *äquivalent*; von daher ist es doch berechtigt, nur von 4 Relationen auszugehen.

In einer *einfachen Formalisierung* kann man schreiben:

$\Lambda(X)$	$p(X) = 1$
$\Lambda(\neg X)$	$p(X) = 0$
$V(X)$	$p(X) > 0$
$V(\neg X)$	$p(X) < 1$

1-5-0-4 EINFACHE RELATIONEN / PROZENT

Anstelle der Dezimal-Darstellung kann man auch eine *Prozent-Darstellung* wählen, die näher an der normalen Sprache ist. Für „alle x sind F“ sagt man: „100% aller x sind F“:

Alle	100%
Alle nicht	0 %
Einige	mehr als 0% (> 0 %)
Einige nicht	weniger als 100 % (< 100%)

Den *Prozent-Wert* erhält man, wenn man den *Dezimal-Wert* mit 100 multipliziert.
Also z. B.: p = 1 x 100 = 100%, oder: p = 0,6 x 100 = 60%.

1-5-0-5 WAHRHEITSTAFEL

Hier beziehe ich mich auf den Punkt 1-2-1-4 über die Wahrheitstafel in der Quantoren-Logik. Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ hatte ich u. a. folgende Wahrheitstafel aufgestellt:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	
1.	Λ	Λ	Λ	$\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2.	Λ	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	$\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
3.	$\neg\Lambda$	Λ	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4.	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Wie oben erläutert, gilt:

quantoren-logisch	quantitativ
Λ	$p = 1$
$\neg\Lambda$	$p < 1$

Insofern werden auch in der Wahrheitstafel die Quantoren durch *Zahlenwerte* ersetzt. Dabei bleibe ich hier bei den Buchstaben ‚F' und ‚G' (statt ‚X' und ‚Y'), weil so die Beziehung zur Quantoren-Logik sofort anschaulich ist. Es geht also um die Relation: $p(F \rightarrow G) = 1$

So ergibt sich für die folgende quantitativ-quantoren-logische Wahrheitstafel:

	p(F)	p(G)	$p(F \rightarrow G)$	Deutung
1.	1	1	1	$p(F) = 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
2.	1	<1	<1	$p(F) = 1 \wedge p(G) < 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) < 1$
3.	<1	1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
4.	<1	<1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) < 1 \longrightarrow p(F \rightarrow G) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, ergibt sich:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	<1	< 1
3.	<1	1	1
4.	<1	<1	1

Diese Formel-Wahrheitstafel sei für die 2. Zeile erläutert:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \qquad \text{d. h.: } a + b > 0,\ c + d = 0$$

$\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1$ d. h. : b + d > 0

Daraus ergibt sich: b > 0 (weil d = 0). Somit folgt für die Konklusion:

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ (denn der Nenner n ist größer als der Zähler r)

Auch für die 4. Zeile sei die Wahrheitstafel erläutert:

$\frac{a+b}{a+b+c+d} < 1$ d. h.: c + d > 0 $\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1$ d. h. : b + d > 0

Daraus ergibt sich: es kann gelten b > 0 oder b = 0.

Aber nur wenn b = 0 ist die Konklusion $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ *streng* abzuleiten.

Daher gilt p(F) < 1 ∧ p(G) < 1 ⟶ p(F → G) = 1 nur *semi-analytisch*. Anders als bei der (quantitativen) aussagen-logischen *Wahrheitstafel* sind also bei der (quantitativen) quantoren-logischen Wahrheitstafel nur 3 Zeilen *strenge* Schlüsse, nicht alle 4.

Wenn man allerdings nicht von Λx(Fx → Gx) ausgeht, sondern von Λx(Fx) → Λx(Gx), das man als p(F) = 1 → p(G) = 1 *quantifiziert*, erhält man auch in der 4. Zeile einen gültigen Schluss: p(F) < 1 ∧ p(G) < 1 ⇒ p(F) = 1 → p(G) = 1. Denn p(F) = 1 → p(G) = 1 ist nur falsch, wenn p(F) = 1 ∧ p(G) < 1 (vgl. hierzu 1-2-1-4).

Selbstverständlich könnte man eine entsprechende Wahrheitstafel auch für Vx(Fx → Gx) bzw. p(F → G) > 0 aufstellen; dann stände p > 0 für V und p = 0 für ¬V. Dabei ergibt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel mit *drei* strengen Schlüssen und *einem* semi-analytischen.

Erläuterung zum Unterschied von quantitativer Aussagen- versus Quantoren-Logik

Hierzu noch eine Erläuterung (die auf den Punkt 1-4-0-5 zurückgreift).

– Aussagen-logisch gilt:

X → Y p(X → Y) = 1

¬(X → Y) p(X → Y) = 0

Es ist dies ein *2-wertiges* System, in dem es nur die Werte „ja“ (p = 1) und „nein (p = 0) gibt. Damit gibt es auch nur *eine* Negation, nämlich ¬(X → Y). Dagegen ist X → ¬Y (u. ä.) keine direkte Negation von X → Y, sondern eine andere Relation.

– Quantoren-logisch gilt:

Λ(X → Y) p(X → Y) = 1

Λ¬(X → Y) p(X → Y) = 0

¬Λ(X → Y) p(X → Y) < 1

¬Λ¬(X → Y) p(X → Y) > 0

Dies ist ein *4-wertiges* System, in dem es *zwei* Negationen gibt. Λ¬ und ¬Λ (bzw. noch die doppelte Negation ¬Λ¬ als dritte Negation). Die *primäre*, *kontradiktorische* Negation ist aber: ¬Λ (nicht alle). Daher muss dieser Wert bzw. p < 1 auch in der Wahrheitstafel stehen.

p(X → Y) = 1 sieht man natürlich nicht an, ob es zu einem *aussagen*-logischen oder einem *quantoren*-logischen System gehört. Je nachdem ist eine *andere Negation* zu wählen und ergibt sich eine *andere Wahrheitstafel*. Um möglichen Missverständnissen aus dem Weg zu gehen, kann man – in eindeutig quantoren-logischer Formalisierung – statt p(X → Y) = 1 besser p(Fx → Gx) = 1 schreiben, in Korrespondenz zu Λx(Fx → Gx).

Vergleich der Logik-Stufen

Abschließend bringe ich eine Übersicht über die Relationen bzw. Wahrheitsbedingungen der 5 vorgestellten Logik-Stufen. Zur besseren Vergleichbarkeit verwende ich immer F und G.

Dabei unterschiede ich immer zwischen

- *Gesamt-Ausdruck* (mit einfacher Quantifizierung), z. B. $p(F \rightarrow G) = r/n$
  - Beim Gesamt-Ausdruck ergibt sich, außer bei der Aussagen-Logik, keine vollständig gültige Wahrheitstafel. Ich gehe hier immer von der *konjunktiven* Wahrheitstafel aus.
  - Andererseits sind die Gesamt-Ausdrücke in der Logik wichtiger.
- *Einzel-Komponenten* (mit zweifacher Quantifizierung), z. B. $p(F) = r/n \rightarrow p(G) = s/n$
  - Bei den Einzel-Komponenten ergeben sich vollständig gültige Wahrheitstafeln.
  - Aber diese Quantifizierungen entsprechen nicht vollständig den qualitativen Strukturen.

1) Aussagen-Logik

• Gesamt-Ausdruck	$F \rightarrow G$
Wahrheitstafel (1.Zeile)	$F \wedge G \Rightarrow F \rightarrow G$
• Einzel-Komponenten	$F \rightarrow G$
Wahrheitstafel (1.Zeile)	$F \wedge G \Rightarrow F \rightarrow G$

(Hier kein Unterschied zwischen Gesamt-Ausdruck und Einzel-Komponenten)

2) Quantoren-Logik

(Beispiel für All-Sätze)

• Gesamt-Ausdruck:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4. Zeile: nicht gültig	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
• Einzel-Komponenten:	$\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$

3) Quantitative Logik

• Gesamt-Ausdruck	$p(F \rightarrow G) = r/n$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(F) = r/n \wedge p(G) = s/n \longrightarrow p(F \rightarrow G) = m/n$
(auch alle anderen Zeilen sind keine strengen Schlüsse)	
• Einzel-Komponenten	$p(F) = r/n \rightarrow p(G) = s/n$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(F) = r/n \wedge p(G) = s/n \Rightarrow p(F) = r/n \rightarrow p(G) = s/n$
Wahrheitstafel (4. Zeile)	$p(F) \neq r/n \wedge p(G) \neq s/n \Rightarrow p(F) = r/n \rightarrow p(G) = s/n$

4) Quantitative Aussagen-Logik

• Gesamt-Ausdruck	$p(F \rightarrow G) = n/n = 1$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(F) = 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
Wahrheitstafel (4. Zeile)	$p(F) = 0 \wedge p(G) = 0 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
• Einzel-Komponenten	$p(F) = 1 \rightarrow p(G) = 1$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(F) = 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F) = 1 \rightarrow p(G) = 1$

5) Quantitative Quantoren-Logik

(Beispiel für All-Sätze)

• Gesamt-Ausdruck	$p(Fx \rightarrow Gx) = n/n = 1$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(Fx) = 1 \wedge p(Gx) = 1 \Rightarrow p(Fx \rightarrow Gx) = 1$
4. Zeile: nicht gültig	$p(Fx) < 1 \wedge p(Gx) < 1 \longrightarrow p(Fx \rightarrow Gx) = 1$
• Einzel-Komponenten	$p(Fx) = 1 \rightarrow p(Gx) = 1$
Wahrheitstafel (1. Zeile)	$p(Fx) = 1 \wedge p(Gx) = 1 \Rightarrow p(Fx) = 1 \rightarrow p(Gx) = 1$

1-5-1 Implikation

Die paradoxe Asymmetrie der *Existenz-Behauptung* von *All-Relationen* und Partikulär-Relationen zeigt sich in der *quantitativen* Form besonders deutlich (vgl. genauer Kap. 2):

• *All-Relation* („alle X sind Y"): $p(X \rightarrow Y) = 1$ ist auch wahr, wenn $p(\neg X \wedge \neg Y) = 1$ oder $p(X) = 0$. Aus ihr folgt weder $p(X) > 0$ noch $p(Y) > 0$, also *keine Existenz-Behauptung*.

• *Partikulär-Relation* („einige X sind Y"): bei der häufigsten Formalisierung $p(X \wedge Y) > 0$ gilt: Aus ihr folgt $p(X) > 0$ und $p(Y) > 0$, somit wird hier die *Existenz* von X wie Y behauptet.

1-5-1-1 MODELLE DER IMPLIKATION

Es lassen sich *verschiedene Modelle* der Verwendung der Implikation für *All- und Partikulär*-Relationen angeben, die später (in 1-5-3) noch diskutiert werden sollen. Am ehesten der Einteilung: „*alle*, *alle nicht*, *einige* und *einige nicht*" entspricht aber das folgende Modell:

alle:	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$a + c + d > 0, b = 0$
alle nicht:	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	$a + c + d = 0, b > 0$
einige:	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$a + c + d > 0, \ b \geq 0$
einige nicht:	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$	$a + c + d < a + b + c + d$

1-5-1-2 ALTERNATIVEN

Die Werte der Implikation können auch durch den Gegen-Relator >– dargestellt werden:

$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(X >\!- Y) = 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} = 0$
$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(X >\!- Y) = 1$	$\frac{b}{a+b+c+d} = 1$
$p(X \rightarrow Y) > 0$	$p(X >\!- Y) < 1$	$\frac{b}{a+b+c+d} < 1$
$p(X \rightarrow Y) < 1$	$p(X >\!- Y) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-1-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

p(X → ¬Y) = 1 $\frac{b+c+d}{a+b+c+d}=1$

p(¬X → Y) = 1 $\frac{a+b+c}{a+b+c+d}=1$

p(¬X → ¬Y) = 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=1$

1-5-1-4 REPLIKATION

p(X ← Y) = 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=1$ a + b + d > 0, c = 0

p(X ←Y) = 0 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=0$ a + b + d = 0, c > 0

p(X ←Y) > 0 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}>0$ a + b + d > 0, c ≥ 0

p(X ←Y) < 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}<1$ a + b + d < a + b + c + d

1-5-1-5 ÄQUIVALENZ

p(X ↔ Y) = 1 $\frac{a+d}{a+b+c+d}=1$ a + d > 0, b + c = 0

p(X ↔Y) = 0 $\frac{a+d}{a+b+c+d}=0$ a + d = 0, b + c > 0

p(X ↔Y) > 0 $\frac{a+d}{a+b+c+d}>0$ a + d > 0, b + c ≥ 0

p(X ↔Y) < 1 $\frac{a+d}{a+b+c+d}<1$ a + d < a + b + c + d

1-5-2 Positiv-Implikation

Hier ergibt sich entsprechend:

Alle X sind Y	p(X *→ Y) = 1	Einige X sind Y	p(X *→ Y) > 0
Alle X sind nicht Y	p(X *→ Y) = 0	Einige X sind nicht Y	p(X *→ Y) < 1

1-5-2-1 BEVORZUGTES MODELL

1. alle X sind Y	p(X *→ Y) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$
2. alle X sind nicht Y	p(X *→ Y) = 0	$\frac{a}{a+b} = 0$
3. einige X sind Y	p(X *→ Y) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y	p(X *→ Y) < 1	$\frac{a}{a+b} < 1$

1-5-2-2 ALTERNATIVE

Bei der *Positiv-Implikation* gilt (bei der primären Interpretation) wie bereits dargestellt:

$$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$$

und entsprechend. So kann man auch anders schreiben:

1. alle X sind Y	p(X *→ Y) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$
2. alle X sind nicht Y	p(X *→ ¬Y) = 1	$\frac{b}{a+b} = 1$
3. einige X sind Y	p(X *→ Y) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y	p(X *→ ¬Y) > 0	$\frac{b}{a+b} > 0$

Die Gleichsetzung von $\frac{a}{a+b} = 0$ mit $\frac{b}{a+b} = 1$ (und entsprechend) setzt allerdings voraus, dass gilt:

$a + b > 0$. Oder anders gesagt: $a + b \geq 1$. Oder noch anders: $a = 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Die Frage muss gestellt werden, ob diese Voraussetzung berechtigt ist.

Bei den normalen Relatoren (z. B. →) steht in der Formel im *Nenner*: a + b + c + d, z. B.: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$ Wir hatten hier festgestellt, dass: a + b + c + d > 0. Dies muss gelten, weil damit *alle möglichen* Welten (bei 2 Variablen) erfasst sind. Technisch vermeidet man außerdem, dass durch 0 (null) dividiert wird, was mathematisch nicht zulässig ist.

Aber bei der Positiv-Implikation (*→), kann man für den Nenner a + b nicht ohne weiteres voraussetzen, dass gilt: a + b > 0 . Bzw.: $a > 0 \vee b > 0$. Denn theoretisch könnte es auch sein, dass a = 0 und b = 0, dafür aber c > 0 oder d > 0.

Allerdings hatten wir festgestellt: ein Satz ‘alle X sind Y’ wird normalsprachlich so verstanden, dass er die *Existenz* von einigen X (mindestens einem X) voraussetzt. Und die Positiv-Implikation soll ja gerade die normal-sprachliche Struktur repräsentieren. Es sei dabei daran erinnert: $a = q(X \wedge Y)$, $b = q(X \wedge \neg Y)$. Also nur wenn a + b > 0 gibt es überhaupt ein X. Außerdem, wenn zugelassen würde, dass a + b = 0, würde hier „verbotenerweise“ durch 0 dividiert. Diese sehr schwierige Problematik wird im analytischen Teil ausführlich diskutiert.

1-5-2-3 POSITIV-REPLIKATION

1. alle Y sind X	p(X ←* Y) = 1	$\dfrac{a}{a+c} = 1$
2. alle Y sind nicht X	p(X ←* Y) = 0	$\dfrac{a}{a+c} = 0$
3. einige Y sind X	p(X ←* Y) > 0	$\dfrac{a}{a+c} > 0$
4. einige Y sind nicht X	p(X ←* Y) < 1	$\dfrac{a}{a+c} < 1$

1-5-2-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

1. alle X sind Y alle Y sind X	p(X *↔ Y) = 1	$\dfrac{a}{a+b+c} = 1$
2. alle X sind nicht Y alle Y sind nicht X	p(X *↔ Y) = 0	$\dfrac{a}{a+b+c} = 0$
3. einige X sind Y einige Y sind X	p(X *↔ Y) > 0	$\dfrac{a}{a+b+c} > 0$
4. einige X sind nicht Y einige Y sind nicht X	p(X *↔ Y) < 1	$\dfrac{a}{a+b+c} < 1$

Man kann die Äquivalenz auch durch *Einzelformeln* darstellen:

1. *schwache Äquivalenz*
(alle X sind Y) ∧ (alle Y sind X)

$\dfrac{a}{a+b} = 1 \;\wedge\; \dfrac{a}{a+c} = 1$. Daraus ergibt sich: b = 0, c = 0. Und: a > 0

Die Konjunktion dieser beiden Gleichungen ist äquivalent der oben genannten Gleichung der Äquivalenz:

$$\frac{a}{a+b} = 1 \;\wedge\; \frac{a}{a+c} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{a+b+c} = 1$$

2. *starke Äquivalenz*
(alle X sind Y) ∧ (alle Y sind X) ∧
(alle nicht-X sind nicht-Y) ∧ (alle nicht-Y sind nicht-X)

$$\frac{a}{a+b} = 1 \;\wedge\; \frac{a}{a+c} = 1 \;\wedge\; \frac{d}{c+d} = 1 \;\wedge\; \frac{d}{b+d} = 1$$

Hier ergibt sich wiederum das schon bekannte Ergebnis:

a > 0, b = 0, c = 0. Aber zusätzlich ergibt sich: d > 0

1-5-2-5 VERGLEICH ZWISCHEN POSITIV-IMPLIKATION UND IMPLIKATION

	Implikation		*Positiv-Implikation*	
alle:	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$p(X *\!\rightarrow Y) = 1$	$\frac{a}{a+b} = 1$
alle nicht:	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	$p(X *\!\rightarrow Y) = 0$	$\frac{a}{a+b} = 0$
einige:	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$p(X *\!\rightarrow Y) > 0$	$\frac{a}{a+b} > 0$
einige nicht:	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$	$p(X *\!\rightarrow Y) < 1$	$\frac{a}{a+b} < 1$

1-5-3 Systematik

Hier will ich die 5 *Modelle*, die in 1-2-3 vorgestellt wurden, in ihrer quantitativen Form darstellen. Die Diskussion dieser Modelle wurde bereits dort geführt und wird im analytischen Teil noch einmal aufgegriffen. Ich schreibe die logischen Gleichungen hier mit der *Individuenvariable ,*x' (und mit den Prädikatvariablen ‚F' und ‚G') weil damit eine bessere Vergleichbarkeit mit den quantoren-logischen Relationen gegeben ist, also z. B. $p(Fx \rightarrow Gx) = 1$, entsprechend $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Bei Verwendung von ‚x' müsste man genau z. B. folgendermaßen übersetzen: ‚alle x, denen die Eigenschaft F zukommt, kommt auch die Eigenschaft G zu'. Vereinfachend schreibe ich aber wieder ‚alle F sind G' und entsprechend. Natürlich könnte man anstatt $p(Fx \rightarrow Gx) = 1$ auch einfacher $p(X \rightarrow Y) = 1$ u. ä. schreiben.

1-5-3-1 MODELL 1: IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow Gx) < 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$

1-5-3-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$

1-5-3-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$	$\frac{b}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-3-4 MODELL 4: (NEGATIVE) IMPLIKATION UND (NEGATIVE) KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-3-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx *→ Gx) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$
2. alle F sind nicht G	p(Fx *→ Gx) = 0	$\frac{a}{a+b} = 0$
3. einige F sind G	p(Fx *→ Gx) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige F sind nicht G	p(Fx *→ Gx) < 1	$\frac{a}{a+b} < 1$

Diese 5 Modelle wurden bereits mehrfach diskutiert, und sie werden im analytischen Teil erneut behandelt werden.

1-5-4 Inklusiv / Exklusiv

1-5-4-1 INKLUSIVES „EINIGE“

Inklusives „einige“ bedeutet grundsätzlich: *mindestens* einige (vielleicht alle).
Man kann unterscheiden:

- (mindestens) einige F sind G
- (mindestens) einige F sind nicht G
- (mindestens) nicht alle F sind G
- (mindestens) nicht alle F sind nicht G

Wie in 1-5-3 gezeigt, gibt es verschiedene Möglichkeiten „einige F sind Y“ auszudrücken:

p(Fx → Gx) > 0
p(Fx ∧ Gx) > 0
p(Fx *→ Gx) > 0

Man kann das „einige“ zwar in verschiedener Weise ausdrücken, aber letztlich wird immer der Wert p > 0 zugeschrieben. p > 0 bedeutet: p kann jeden beliebigen Wert annehmen, mit Ausnahme der 0. Dagegen gehört p = 1 (entsprechend „alle“) durchaus zu den möglichen Werten. Dass es nur um den *Wertebereich zwischen 0 und 1* geht (also 0 ≤ p ≤ 1), wurde generell festgelegt und braucht daher nicht immer wieder bestätigt zu werden.
Bezogen auf die *absolute* Häufigkeit q gilt: p > 0 steht für *mindestens einer*, d. h. q ≥ 1.
„Einige nicht“ wird dagegen normalerweise der Wert p < 1 zugeschrieben.
D. h. p kann jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 1 annehmen, eben mit Ausnahme von p = 1. Dagegen gehört p = 0 („alle nicht, keiner“) zu den erlaubten Werten.
Bezogen auf die *absolute* Häufigkeit q gilt: p < 1 steht für *mindestens einer nicht*.

1-5-4-2 EXKLUSIVES „EINIGE“

Auch „*genau* einige“ lässt sich entsprechend in verschiedener Weise ausdrücken, z. B. durch Verwendung von p(Fx ∧ Gx), p(Fx → Gx) oder p(Fx *→ Gx). Entscheidend ist die Zuschreibung des Wertes: 0 < p < 1.
Z. B. 0 < p(Fx → Gx) < 1. Hier sind alle Werte von 0 bis 1 erlaubt, außer eben 0 und 1.

Anders geschrieben: $p(Fx \rightarrow Gx) > 0 \wedge p(Fx \rightarrow Gx) < 1$.
Mit einem Wort: $0 < p < 1$ steht für: *mindestens einer* und *mindestens einer nicht*.
Wenn man schreibt $p(Fx \rightarrow Gx) = r/n$, dann gilt für „genau einige“: $0 < r < n$.

1-5-4-3 EXKLUSIVES „EINIGE NICHT“
Über „genau einige nicht“ ist im Grunde in 1-5-4-2 schon alles gesagt. Denn es gilt:
genau einige F sind G $\Leftrightarrow$ genau einige F sind nicht G
p(genau einige) = p(genau einige nicht).
Auch für „genau einige nicht“ gilt somit: $0 < p < 1$
Wenn man „genau einige F sind G“ als $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1$ schreibt, dann schreibt man „genau einige F sind nicht G“ ebenfalls als $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1$. Falls man nämlich stattdessen etwa $0 < p(Fx \rightarrow \neg Gx) < 1$ notierte, dann wären die beiden Ausdrücke nicht äquivalent. Wie sich bei Verwendung der Formeln leicht erkennen lässt:
Denn $0 < \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ ist nicht äquivalent mit $0 < \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} < 1$.

Bei Verwendung der *Positiv-Implikation* ergibt sich das Problem nicht.
Hier kann man schreiben: $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1 \Leftrightarrow 0 < p(Fx \rightarrow \neg Gx) < 1$
Denn es gilt in Formeln: $0 < \dfrac{a}{a+b} < 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{b}{a+b} < 1$
Denn beide Formeln sind bestimmt durch $a > 0 \wedge b > 0$ (vgl. 1-2-4-3)

1-5-4-4 EXKLUSIVES „NICHT EINIGE“
„Nicht genau einige F sind G“ oder „es ist nicht wahr, dass genau einige F auch G sind“.
D. h. $\neg[0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1]$, somit $p(Fx \rightarrow Gx) = 0 \vee p(Fx \rightarrow Gx) = 1$.

1-5-4-5 VERGLEICH
„Mindestens einige F sind (nicht) G“ und „Genau einige F sind (nicht) G“ unterscheiden sich in folgenden Eigenschaften (‚r’ gibt die absolute Häufigkeit q an):

Einige F sind G	Einige F sind nicht G	Genau einige F sind G	Genau einige F sind nicht G
$p > 0$ z. B. $p(Fx \rightarrow Gx) > 0$ $r > 0$	$p < 1$ $p(Fx \rightarrow Gx) < 1$ $r < n$	$0 < p < 1$ $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1$ $0 < r < n$	$0 < p < 1$ $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 1$ $0 < r < n$

1-5-5 Erweiterungen

1-5-5-1 SECHS-WERTIGE LOGIK
Ich hatte darauf hingewiesen, dass man die quantoren-logischen Unterscheidungen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht* ergänzen kann durch „die meisten“ und „die meisten nicht“. Wie sind diese quantitativ zu bestimmen?
Auch hier kann man unterscheiden zwischen *inklusiv* und *exklusiv*:

Inklusiv		*exklusiv*
die meisten	$p > 0,5$	genau die meisten: $0,5 < p < 1$
die meisten nicht	$p < 0,5$	genau die meisten nicht: $0 < p < 0,5$

Für die „meisten nicht“ kann man auch sagen: „die wenigsten“.
• inklusiv: „die meisten F sind G“ (genauer: „die meisten x, welche die Eigenschaft F haben, haben auch die Eigenschaft G“): $p(Fx \rightarrow Gx) > 0,5$.
• exklusiv: „genau die meisten F sind nicht G“: $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 0,5$
Zu beachten ist, dass es hier zu Überschneidungen kommt zwischen „genau einige“ und „genau die meisten“ (u. a.), aber das ist legitim.

1-5-5-2 ÜBERSICHT

Die folgende Übersicht legt grundsätzlich die *Implikation* zugrunde:
Sie geht aus von der Formel: $p(X \rightarrow Y) = r/n$.

Normale Sprache	Quantoren-Logik	Quantitativ	r
Alle X sind Y	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$r = n$
Alle X sind nicht Y	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$r = 0$
Einige X sind Y	$V(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$r > 0$
Einige X sind nicht Y	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$r < n$
Genau einige X sind Y	$\exists(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) =$ $> 0 \wedge < 1$	$0 < r < n$
Die meisten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) > 0,5$	$r > n/2$
Die wenigsten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) < 0,5$	$r < n/2$

„Alle X sind nicht Y“ und „einige X sind Y“ formalisiert man allerdings meistens anders. Ich habe die verschiedenen Modelle ja bereits diskutiert.

1-5-5-3 INTENSIONALE QUANTITÄT

Bei der *intensionalen* Quantität wurde quantoren-logisch unterschieden zwischen 4 Stufen. Diesen werden jetzt quantitative Werte zugewiesen:

Extensional	Intensional	Prozent	Beispiel
Alle	vollständig	zu 100%	vollständig glücklich
Alle nicht	gar nicht	zu 0%	gar nicht glücklich (ganz unglücklich)
Einige	etwas	zu > 0 %	etwas glücklich
Einige nicht	etwas nicht	zu < 100%	etwas nicht glücklich (etwas unglücklich)

Alternativen zu ‚vollständig’ sind: vollkommen, gänzlich, ganz, absolut
Alternativen zu ‚vollkommen nicht’ sind: gar nicht (oder Konstruktionen mit ‚un’)
Alternativen zu ‚etwas’ sind: partiell, teilweise

Man muss nicht *Prozentangaben* wählen, sondern kann auch Werte von 0 bis 1 angeben.

1-5-5-4 INTENSIONALE QUANTITÄT – 6-WERTIG

Hier werden jetzt 2 Werte hinzugefügt: *überwiegend* und *überwiegend nicht*.
Andere Begriffe wären: *überdurchschnittlich* und *unterdurchschnittlich*.

Extensional	Intensional	Prozente	Beispiel
Die meisten	Überwiegend	Zu > 50%	Überwiegend glücklich
Die meisten nicht	überwiegend nicht	Zu < 50%	Überwiegend nicht glücklich

1-5-5-5 INTENSIONALE QUANTITÄT – EXKLUSIV

Ich habe bisher nur *inklusive* Quantitäten berücksichtigt. Jetzt werden auch *exklusive* Werte berücksichtigt (100% ist invariant gegenüber inklusiv/exklusiv)

Genau partiell zu > 0%, < 100% genau partiell glücklich
Genau partiell nicht zu > 0%, < 100% genau partiell unglücklich

Bei dem *exklusiven* (genau) „einige“ gilt: wenn etwas für *genau einige* gilt, dann gilt es auch für *genau einige nicht*. So bei der *intensionalen* Entsprechung: wenn etwas *genau partiell* gilt, dann gilt es auch *genau partiell nicht*. Jemand, der genau partiell glücklich ist, der ist zu einem Prozentsatz zwischen 0% und 100% glücklich. Folglich ist er auch zwischen 0% und 100% nicht glücklich (unglücklich).

Wenn man den *6-wertigen* Ansatz nimmt, dann kommen noch hinzu:
Genau überdurchschnittlich: zu > 50%, < 100%
Genau unterdurchschnittlich zu > 0%, < 50%

Man erhält dann insgesamt folgende Werte:
- partiell: > 0, < 1
- partiell nicht: > 0, < 1
- unterdurchschnittlich: > 0, < 0,5
- durchschnittlich: 0,5
- überdurchschnittlich: > 0,5, < 1

INHALTSVERZEICHNIS VON KAP. 1 IM DETAIL

(Dieses detaillierte Inhaltsverzeichnis gilt auch für die Kapitel 2 bis 4, daher wird von den Kapiteln 2 – 4 kein detailliertes Inhaltsverzeichnis angegeben.)

ZUSAMMENFASSUNG: AUFBAU DER LOGIK

Nachdem jetzt wesentliche logische Erkenntnisse dargestellt worden sind, kann ein Überblick über den Aufbau der Logik aus Sicht der *Integralen Logik* – bzw. über den Aufbau der Integral-Logik – gegeben werden. Dies geschieht am Beispiel *Implikation* $\rightarrow$ bzw. der *Kopula*.

Beim Aufbau der Logik gibt es vor allem drei Prinzipien zu unterscheiden:

1. QUANTITÄTS-STUFE
2. STRUKTUR-EBENE
3. RELATOR

Ich werde diese drei Prinzipien im Folgenden darstellen, wobei ich mich auf eine *extensionale* Sprache beschränke. Im quantoren-logischen Bereich verwende ich die vereinfachte Formalisierung ohne Individuen-Variablen.

1. QUANTITÄTS-STUFE

Es sind *drei* Quantitäts-Stufen zu unterscheiden:

- 2-wertig
- mehr-wertig (z. B. 4-wertig oder 6-wertig)
- ∞-wertig

Und zwar handelt es sich bei diesen Werten – numerisch betrachtet – um *relative* Größen p (vor allem relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit), nicht um *absolute* Größen q.

• 2-wertig („Aussagen-Logik")

Hier wird nur zwischen 2 Werten unterschieden, gültig-ungültig, positiv-negativ, wahr-falsch. Diese Werte entsprechen aber den (relativen) *Quantitäts-Stufen* $p = 1$ (100%) und $p = 0$ (0%). Nur ist diese Quantität *implizit*, sie wird nicht ausgewiesen.

Der *positive* Wert 1 wird gar nicht ausgewiesen, z. B. $X \rightarrow Y$.

Der *negative* Wert wird durch die *Negation* dargestellt, z. B. $\neg(X \rightarrow Y)$.

Man kann diese Relationen aber *quantifizieren* bzw. die implizite Quantität explizit machen, dann ergibt sich (im Beispiel):

$p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$.

Bei $p(X \rightarrow Y) = 0$ u. ä. wird also der implizite konstante Wert von $X \rightarrow Y$ (nämlich $p = 1$) gelöscht, $X \rightarrow Y$ dient jetzt nur noch als *Variable*, die beliebige Werte annehmen kann.

• mehr-wertig („Quantoren-Logik")

Hier werden meistens 4 Werte unterschieden:

Alle / alle nicht / einige / einige nicht. Diese Werte sind quasi *halb-implizit*. Sie werden zwar durch 2 Quantoren „alle" = Λ und „einige" = V und die Negation = $\neg$ dargestellt, aber nicht numerisch ausgewiesen. Quantifiziert bedeuten sie:

alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
alle nicht	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p = 0$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
einige	$V(X \rightarrow Y)$	$p > 0$	$p(X \rightarrow Y) > 0$
einige nicht	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$p < 1$	$p(X \rightarrow Y) < 1$

• ∞-wertig (Quantitative Logik)
Hier sind *unendlich* viele Werte zugelassen, denn es geht um die Menge der *rationalen* Zahlen (eine Teilmenge der reellen Zahlen), aber nur im Bereich von 0 bis 1. Diese Werte werden explizit *numerisch* dargestellt, $p(X \to Y) = r/n$, wobei gilt: $n = 1, 2, 3 \ldots$ und $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. Es gilt also: $0 \leq p \leq 1$.

Die Begriffe ‚Aussagen-Logik' und ‚Quantoren-Logik' sind also sehr missverständlich, denn es geht dabei in erster Linie um unterschiedliche Quantitäts-Stufen.

2. STRUKTUR-EBENE

Es sind *drei* Struktur-Ebenen bzw. Relations-Typen zu unterscheiden:
• Individuen-Relationen
• Mengen-Relationen (oder Klassen-Relationen)
• Molekular-Relationen (bzw. Sachverhalts-Relationen)
Zwar gibt es auch, insbesondere zwischen Individuen und Klassen auch *quantitative* Unterschiede; diese sind aber nicht mit den *Quantitäts-Stufen* zu verwechseln. Und ich ziehe es vor, hier von Struktur-Unterschieden bzw. 3 Struktur-Ebenen zu sprechen.

Auf jede dieser Struktur-Ebenen lassen sich die oben angeführten *Quantitäts-Stufen* (2-wertig, 4-wertig, ∞-wertig) anwenden.

Man kann – für eine einheitliche Logik – als *Kopula-Relator* für alle 3 Struktur-Ebenen den *Implikator* $\to$ verwenden (vgl. dazu 3.)

• Individuen-Relationen
Eine Individuen-Relation bedeutet vorrangig die *Relation zwischen einem Individuum x und einer Klasse F*, also z. B. $x \to F$. Man mag einwenden, wenn $X \to Y$ implizit den Wert $p = 1$ besitzt (z. B. im Sinne von „alle X sind Y“) ist die Anwendung auf ein Individuum unzulässig, denn das Individuum – als *singuläres* Objekt – steht ja im Gegensatz zur *Klasse*, als Menge *aller* Individuen. Aber man kann auch bei einer Individuen-Relation grundsätzlich 3 *Quantitätsstufen* unterscheiden, indem sich man sich neutral auf „*Fälle*“ (oder auch *Zeitpunkte* usw.) bezieht. Dass quantoren-logisch andere Formalisierungen ebenfalls möglich sind, z. B. für „alle nicht“ der Ausdruck $X \to \neg Y$ anstatt $\neg(X \to Y)$, habe ich bereits ausführlich dargestellt, es ist hier zu vernachlässigen.

2-wertig	
$x \to F$	x ist in allen Fällen (immer) F
$\neg(x \to F)$	x ist in keinem Fall (= niemals) F
4-wertig	
$\Lambda(x \to F)$	x ist in allen Fällen (immer) F
$\Lambda\neg(x \to F)$	x ist in keinem Fall (= niemals) F
$V(x \to F)$	x ist in einigen Fällen (manchmal) F
$V\neg(x \to F)$	x ist nicht in allen Fällen (nicht immer) F
∞-wertig	
$p(x \to F) = r/n$	in r von n Fällen ist x ein F

• Mengen-Relationen

Bei *Mengen-Relationen* (oder Klassen-Relationen) gibt es quantoren-logisch wie beschrieben 3 Darstellungsformen zu unterscheiden, am Beispiel von „alle“:

ganzheitlich: $F \subset G$
kollektiv: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. vereinfacht $\Lambda(F \rightarrow G)$
individuell: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Ich verwende hier nur die kollektive Darstellungsweise.

2-wertig
$F \rightarrow G$ Alle F sind G
$\neg(F \rightarrow G)$ Alle F ist sind nicht G

4-wertig
$\Lambda(F \rightarrow G)$ Alle F sind G
$\Lambda\neg(F \rightarrow G)$ Alle F sind nicht G
$V(F \rightarrow G)$ Einige F sind G
$V\neg(F \rightarrow G)$ Einige F sind nicht G

∞-wertig
$p(F \rightarrow G) = r/n$ r von n F sind G

• Molekular-Relationen

2-wertig
$A \rightarrow B$ A impliziert in allen Fällen B
$\neg(A \rightarrow B)$ A impliziert in keinem Fall B

4-wertig
$\Lambda(A \rightarrow B)$ A impliziert in allen Fällen B
$\Lambda\neg(A \rightarrow B)$ A impliziert in allen Fällen nicht B
$V(A \rightarrow B)$ A impliziert in einigen Fällen B
$V\neg(A \rightarrow B)$ A impliziert in einigen Fällen nicht B

∞-wertig
$p(A \rightarrow B) = r/n$ A impliziert in r von n Fällen B

Diese Unterscheidung der 3 Struktur-Ebenen ist aber sekundär in der Logik. Für die primären logischen Funktionen kommt es auf die *Quantitäts-Stufe* an (und auf die Relatoren), nicht darauf, ob man es mit Individuen-Relationen, Mengen-Relationen oder Molekular-Relationen zu tun hat. Ich werde daher immer, wenn nicht der Bezug auf eine spezielle Struktur-Ebene erwünscht ist, die *allgemeinen Symbole* X und Y verwenden, so wie es auch beim 1. Punkt: Quantitäts-Stufen vorgenommen wurde. Somit kann z. B. $X \rightarrow Y$ kann dann stehen für:

$x \rightarrow Y$, $F \rightarrow G$, $A \rightarrow B$.

3. RELATOREN

Es sind *drei* Arten von Relatoren zu unterscheiden

- Individuen-Relatoren
- Mengen-Relatoren
- Molekular-Relatoren

Diese Relatoren stehen – wie schon die Namen zeigen – in Verbindung mit den *Struktur-Ebenen*.

- <u>Individuen-Relatoren</u>

Individuen-Relatoren sind (fast) ausschließlich auf die *Kopula*-Funktion bezogen.

Fx (hier wird der Relator nicht ausgewiesen)

$\in$ in $x \in F$

$\notin$ in $x \notin F$

- <u>Mengen-Relatoren</u>

$\subset$ in $F \subset G$ (bzw. $\subseteq$)

$\not\subset$ in $F \not\subset G$

Wie gezeigt wurde, lässt sich aber „einige F sind G" in der üblichen Mengenlehre nicht einfach darstellen.

Mengen-Relatoren sind nur Relatoren der *ganzheitlichen* Darstellung der Klassen-Logik, eben der Mengenlehre. Der Implikator $\rightarrow$ in der Kollektiv-Darstellung $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$ darf nicht als Mengen-Relator verstanden werden.

- <u>Molekular-Relatoren</u>

Hier wird für die *Kopula*-Funktion der Implikator $\rightarrow$ eingesetzt. Ich habe vorgeschlagen, als alternativen Implikator $*\!\!\rightarrow$ für die *Positiv-Implikation* zu verwenden. Aber es werden eben auch viele andere Junktoren bzw. Relatoren verwendet, $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$ usw.

Wie bei dem Punkt Struktur-Ebene, sage ich auch hier: Die Verwendung unterschiedlicher Relatoren je nach Objekt-Ebene ist nur indiziert, wenn man speziell darauf hinweisen will. Sonst bietet sich an, für die *Kopula*-Funktion *einheitlich* den Implikator $\rightarrow$ bzw. den Positiv-Implikator $*\!\!\rightarrow$ zu verwenden also z. B.

Individuen-Relationen:	$x \rightarrow F$ bzw. $x *\!\!\rightarrow F$
Klassen-Relationen:	$F \rightarrow G$ bzw. $F *\!\!\rightarrow G$
Molekular-Relationen:	$A \rightarrow B$ bzw. $A *\!\!\rightarrow B$

Wenn immer möglich, verwende ich aber generelle Objekt-Zeichen X, Y *und* die generellen Implikatoren $\rightarrow$ bzw $*\!\!\rightarrow$, so wie bei den Quantitäts-Stufen beschrieben.

Also:

2-wertig: $X \rightarrow Y$, $\neg(X \rightarrow Y)$

4-wertig : $\Lambda(X \rightarrow Y)$, $\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$, $V(X \rightarrow Y)$, $V\neg(X \rightarrow Y)$

∞-wertig: $p\,(X \rightarrow Y) = r/n$

EXKURS: REDUKTION VON QUANTOREN- AUF AUSSAGEN-LOGIK ?

1) These: Es gibt eine *Struktur-Übereinstimmung* von Aussagen- und Quantoren-Logik
2) These: Die *Quantoren-Logik* lässt sich nicht vollständig *aussagen-logisch* darstellen
3) These: „Alle X sind Y" lässt sich aussagen-logisch durch $X \rightarrow Y$ darstellen
4) These: „Einige X sind Y" lässt sich *nicht* aussagen-logisch darstellen
5) Übersicht

Abschließend zum Kapitel „Synthetische Relationen" sei noch einmal ausführlich auf die Frage eingegangen: Lässt sich die Quantoren-Logik auf Aussagen-Logik reduzieren? Nun ist es trivial, dass die Aussagen-Logik nicht über *Individuen-Variablen* und *Prädikat-Variablen* und *Quantoren* verfügt. Aber entscheidend ist vielmehr die Frage, ob alle logischen Strukturen der Quantoren-Logik schon aussagen-logisch darzustellen sind. Konkret geht es darum: Lassen sich – quantitativ betrachtet – die Größen $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$, $p > 0$ aussagen-logisch darstellen? Hierzu stelle ich vier Thesen auf:

1) These: Es gibt eine Struktur-Übereinstimmung von Aussagen- und Quantoren-Logik

Dabei sei zunächst auf das *logische Quadrat* vorgegriffen (vgl. 2-2-0-3):

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle$\neg$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$

Dieses Quadrat gibt die logischen Relationen an, die zwischen *alle*, *einige* usw. herrschen. Dies sind 6 Relationen (weil das Zeichen $^{+}{>}{<}^{+}$ in der Mitte für beide Diagonalen steht).

Die obere Zeile wäre z. B. zu lesen: (alle X sind Y) $^{+}|^{+}$ (alle X sind nicht Y)
Natürlich könnte man dieses Quadrat auch *formal* mit Quantoren darstellen (vgl. 2-2-3), aber aus Gründen der Vereinfachung verzichte ich hier darauf. Jedenfalls kann man das obige Quadrat als *quantoren-logisches* Quadrat auffassen.

Nun zeigt sich aber, dass die o. g. Relationen auch in einem *aussagen-logischen* Quadrat genau so aufzustellen sind:

$X \wedge Y$	$^{+}\vert^{+}$	$X \nabla Y$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$X \vee Y$	$^{+}\vee^{+}$	$X \vert Y$

Zur besseren Anschaulichkeit wäre einzusetzen:
Für $X | Y$: $\neg X \vee \neg Y$ Für $X \nabla Y$: $\neg X \wedge \neg Y$

Es gibt also eine *strukturelle Übereinstimmung* zwischen Quantoren- und Aussagen-Logik.

2) These: Die *Quantoren-Logik* lässt sich nicht vollständig *aussagen-logisch* darstellen

Man könnte argumentieren: wenn sich die *Relationen* in den beiden Quadrate zur Deckung bringen lassen, dass müssten sich auch die einzelnen *Aussagen* in den Quadraten entsprechen (ich spreche hier bei „$X \wedge Y$" usw. speziell von ‚Aussagen', weil sich sonst durch die doppelte Verwendung des Terminus ‚Relationen' Missverständnisse ergeben können).

Z. B. müsste gelten *quantoren-logisch*: alle X sind Y = aussagen-logisch: $X \wedge Y$
Die strukturelle Übereinstimmung ist aber grundsätzlich kein zwingender Beweis: Wenn zwischen zwei Netzen von Aussagen dieselben Relationen bestehen, so heißt das doch nicht, dass diese Aussagen bedeutungsgleich sind. Daher lässt sich auch die Quantoren-Logik nicht automatisch auf die (Verhältnisse der) Aussagen-Logik zurückführen. Meine These ist vielmehr, dass man die Quantoren-Logik nicht vollständig auf die Aussagen-Logik zurückführen kann. Zwar lässt sich „alle" ($p = 1$) und „alle nicht" ($p = 0$) weitgehend aussagen-logisch darstellen. Aber „einige" ($p > 0$) und „einige nicht" ($p < 1$) lässt sich nicht aussagen-logisch ausdrücken.

Ich werde Gründe aufzählen, die gegen diese These sprechen und versuchen, diese Gründe zu widerlegen. Dafür werden zwei Unterthesen aufgestellt.

3) These: „Alle X sind Y" lässt sich aussagen-logisch durch $X \rightarrow Y$ darstellen

Zu präzisieren ist: „Alle X sind Y" lässt sich aussagen-logisch darstellen, aber nicht durch die *Konjunktion* $X \wedge Y$, wie die obigen Quadrate nahe legen könnte, sondern durch die *Implikation* $X \rightarrow Y$.

Entsprechend lässt sich „Alle X sind nicht Y" durch $\neg(X \rightarrow Y)$ darstellen (ich verweise auf die ausführliche Diskussion anderer Möglichkeiten, wie z. B. $X \rightarrow \neg Y$, die aber in jedem Fall die Implikation nutzen).

Man könnte für *aussagen-logisch* $X \rightarrow Y$ *quantoren-logisch* $\Lambda(X \rightarrow Y)$ schreiben, als Vereinfachung von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Im Grunde macht schon die Übersetzung „X *und* Y" deutlich, dass hier nicht eine Aussage „X ist Y" ausgedrückt wird. Ich möchte daher darüber hinaus zunächst nur *ein* Argument gegen die Lösung $X \wedge Y$ anbringen. Für die Konjunktion gilt bekanntlich das *Vertauschungsgesetz*, also $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$. Demnach müsste gelten: „alle X sind Y" $\Leftrightarrow$ „alle Y sind X". Und dies ist ja offensichtlich falsch.

Dennoch ist es richtig, dass „alle" etwas mit der *Konjunktion* zu tun hat. Das zeigt sich schon formal, dass das verbreitetste Symbol für den *All-Quantor* Λ dem Symbol für die Konjunktion, dem *Konjunktor* $\wedge$ entspricht.

Inhaltlich zeigt sich diese Verwandtschaft vor allem, wenn man die *quantoren-logische* Aussage in eine *prädikaten-logische* umformt:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Die *Konjunktion formt* zwar die Ganzheit („Allheit"), aber die *Kopula*-Information „ist ein ..." wird eben durch die Implikation $\rightarrow$ ausgedrückt.

Bei *einfachen* Relationen wird nicht mit der Implikation gearbeitet, sondern die Relation zwischen x und F wird normalerweise gar nicht durch ein Zeichen gekennzeichnet, nur durch die Stellung von ‚x' und ‚F':

$$\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$$

Auch hier wird die „Allheit“ durch die Konjunktion $\wedge$ ausgedrückt, aber auch hier wird primäre die Information „x_1 hat die Eigenschaft F“ usw. eben nicht durch das $\wedge$ ausgedrückt.

Doch zurück zu den wichtigeren *komplexen* Relationen:

Nun könnte man ja den prädikaten-logischen Ausdruck

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

durch einen *vereinfachten* Ausdruck

$$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$$

ausdrücken. Man mag meinen, dies sei ein *aussagen-logischer* Ausdruck und damit sei die Reduktion doch geglückt.

Aber der *Index* 1, 2, ... , n, der die *natürlichen Zahlen* repräsentiert, steht eben gerade für „alle“, er entspricht dem *Quantor* – und gehört somit nicht mehr zur Aussagen-Logik.

Konkrete Einwände gegen die 3) These:

1. *Einwand*: $X \rightarrow Y$ ist neutral

Man könnte behaupten, $X \rightarrow Y$ in der Aussagen-Logik ist neutral gegenüber Λ oder V.

Antwort: Richtig ist, in der *Quantoren-Logik* wird $X \rightarrow Y$ (bzw. $Fx \rightarrow Gx$) neutral verwandt, es wird erst durch die Quantoren Λ oder V in seiner Quantität bestimmt. In der *Aussagen-Logik* wäre das aber nicht möglich, denn dann hätte $X \rightarrow Y$ ja gar keinen klaren Aussagewert. Bei einem Satz wie ‚wenn es regnet, wird die Strasse nass’ (formal $X \rightarrow Y$), meint man: „In *allen* Fällen (*immer*) wenn es regnet, wird die Straße nass“. Nur so erklärt sich auch die Wahrheitstafel. Dagegen steht die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ für: „In keinem Fall gilt: wenn X, dann Y“. Das ist auch bei den anderen Relatoren so, auch sie werden aussagen-logisch deterministisch verstanden, in der Quantität „alle“ ($p = 1$). So ist $X \wedge Y$ zu verstehen als: „In *allen* Fällen gilt X und Y“.

2. *Einwand*: $X \rightarrow Y$ ist singulär zu verstehen

Das lässt sich zunächst besser an einer Struktur wie $X \wedge Y$ erklären. Eine Aussage wie „Peter geht ins Kino und Hans geht ins Kino“ könnte man durch $X \wedge Y$ ausdrücken. Nun mag man einwenden: „Peter geht ins Kino und Hans geht ins Kino“ beschreibt ein *singuläres* Ereignis. Zwar mag es auch vorkommen, dass dieses Ereignis öfters auftritt, aber keinesfalls kann man von vorneherein behaupten, hier bestände eine *relative* Häufigkeit von $p = 1$, in dem Sinne: „Peter geht *immer* ins Kino und Hans geht *immer* ins Kino“.

Antwort: Grundsätzlich könnte man diskutieren, ob bestimmte Satzstrukturen in der Tat eine *absolute* Häufigkeit und ggf. auch *Einmaligkeit* ausdrücken, also $q(X \wedge Y) = 1$; jedenfalls kann man durch Anfügen von Adverbien das so festlegen: z. B. „Peter geht *1mal* (*einmal*) ins Kino und Hans geht 1mal (einmal) ins Kino.“

Aber wie ich schon oben erläutert habe: Bei einem *Wenn-dann-Satz* ist von vorneherein ein *All-Quantifizierung* gedacht (alle, immer, überall usw.). Zwar mag man das eingrenzen, z. B. *statistisch*: „Wenn X, dann mit 70% Wahrscheinlichkeit auch Y“. Aber es macht wenig Sinn zu sagen: ‚E*inmal* gilt: wenn – dann’, formal $q(X \rightarrow Y) = 1$.

Wenn überhaupt, dann wäre noch anzunehmen: $p(X \rightarrow Y) = r/n = 1/1$ (als nicht gekürzter Bruch zu verstehen). D. h.: „In *einem von einem* Fall gilt: Wenn X, dann Y“. Dies wäre dann eine Aussage über die *relative Quantität* p, mit $r = 1$ und $n = 1$. Jedenfalls geht es bei „wenn X, dann auch Y“ immer um die relative Quantität p.

3. *Einwand*: $X \rightarrow Y$ garantiert nicht die Existenz von X

Denn $\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$. $X \rightarrow Y$ ist auch wahr, wenn X falsch ist, anders gesagt, wenn gar kein X existiert. Somit kann man „alle X sind Y“ nicht durch „$X \rightarrow Y$“ wiedergeben, weil dies voraussetzt, dass X wahr ist. Bei $X \wedge Y$ ist dagegen gesichert, dass X wahr ist (und auch Y).

Antwort: Dieser Einwand hat eine gewisse Berechtigung, es geht hier um die *Existenz-Paradoxie* der Implikation, auf die schon vielfach eingegangen wurde. Daher entspricht die Implikation $X \rightarrow Y$ eben einer *negativen Konjunktion*, es gilt: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$, was entsprechend auch keine Wahrheit von X impliziert. Wenn man diese Paradoxie vermeiden will, ist die angemessene Lösung aber nicht die Konjunktion $X \wedge Y$, sondern die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$, die nur bei wahrem X definiert ist.

4. *Einwand*: $X \rightarrow Y$ ist nicht identisch mit $\Lambda(X \rightarrow Y)$
Wenn $X \rightarrow Y$ gleichbedeutend mit $\Lambda(X \rightarrow Y)$ ist, dann müssen die beiden Relationen auch dieselbe *Wahrheitstafel* haben. Zwar lässt sich für $\Lambda(X \rightarrow Y)$ nicht direkt eine Wahrheitstafel angeben, aber es wurde gezeigt, dass man für das quantoren-logische $\Lambda(X \rightarrow Y)$ die Relation $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \wedge ... \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$ einsetzen kann. $X \rightarrow Y$ hat in der Wahrheitstafel den 4-stelligen Verlauf + – + +. Es ist völlig offensichtlich, dass die Wahrheitstafeln von $X \rightarrow Y$ und $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \wedge ... \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$ nicht gleich sein können.

Antwort: In der Tat ist $X \rightarrow Y$ nur die *Grundstruktur* einer Relation $\Lambda(X \rightarrow Y)$. Der Quantitätsbegriff „alle“ ist primär *relativ* bestimmt (als 100 %), aber *absolut* quasi unbestimmt. „alle“ = n können z. B. 5 sein, 23, 1000 usw. Wenn man nun die genaue Wahrheitstafel für eine Relation „alle X sind Y“ angeben will, so fällt sie unterschiedlich aus, je nachdem, wie viel in diesem Fall „alle“ sind, also wie groß n ist. Bei n = 2 ergibt sich $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$, mit dem 16-stelligen Wahrheitsverlauf + – + + – – – – + – + + + – + +. Bei n = 3 ergibt sich die Formel $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \wedge (X_3 \rightarrow Y_3)$, mit einem 64-stelligen Wahrheitsverlauf.

So ist es also unmöglich, dass die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ gleichzeitig genau verschiedenen Wahrheitstafeln bei unterschiedlichem n entspricht. Die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ entspricht aber genau der Wahrheitstafel $X_1 \rightarrow Y_1$, also bei n = 1. Und „alle“ können im Extremfall auch nur *einer* sein, wenn die Klasse eben nur *ein* Element enthält: q(alle) ≥ 1. Entscheidend für alle ist eben, das gilt: p = 1, also n/n, 1/1, 2/2, 3/3 usw.

Fazit 3) These: „Alle X sind Y“ wird durch $X \rightarrow Y$ ausgedrückt, nicht durch $X \wedge Y$. $X \wedge Y$ steht für „in allen Fällen X und Y“, wie überhaupt die Relatoren so zu deuten sind, dass sie die betreffende Aussage für *alle* Fälle aussagen.

4) These: „Einige X sind Y” lässt sich nicht aussagen-logisch darstellen

Wenn sich „einige X sind Y“ nicht *aussagen-logisch* darstellen lässt, dann lässt sich ebenso „einige X sind *nicht* Y“ nicht aussagen-logisch darstellen und auch nicht die äquivalenten Aussagen „nicht alle X sind Y“ und „nicht alle X sind nicht Y“.

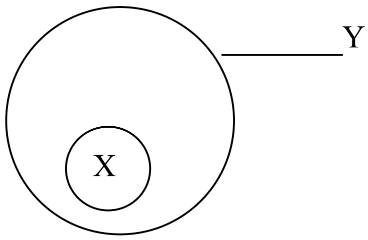
Ich will auch hier wieder verschiedene Einwände nennen und diese dann widerlegen:

1. *Einwand*: $X \vee Y$ bedeutet „einige X sind Y“
Dieser Einwand ist am gewichtigsten. Denn wie wir anfangs gesehen haben: Während im aussagen-logischen Quadrat $X \wedge Y$ anstatt von „alle“ steht, so steht $X \vee Y$ anstatt von „einige“. Und dort zeigt sich: $X \wedge Y$ und $X \vee Y$ stehen in derselben Relation zueinander wie „alle X sind Y“ und „einige X sind Y“. Außerdem entspricht *ein* Symbol für den *Partikulär-Quantor* (also den „einige“-Quantor), nämlich V, dem Symbol für das (inklusive) „oder“, nämlich $\vee$. Und schließlich verwendet man das $\vee$, wenn man die quantoren-logische Relation $V(X \rightarrow Y)$ in Prädikaten-Logik übersetzt: $(X_1 \rightarrow Y_1) \vee (X_2 \rightarrow Y_2) \vee ... \vee (X_n \rightarrow Y_n)$.

Antwort: Genau entsprechende Gründe lassen sich aber auch für die Gleichsetzung von „alle X sind Y“ mit $X \wedge Y$ anführen. Und ich habe anfangs gezeigt, dass man $X \wedge Y$ dennoch nicht mit „alle X sind Y“ identifizieren darf. Und genauso wenig darf man $X \vee Y$ mit „einige X sind Y“ gleichsetzen. Auch hier kann der Schluss „alle $\Rightarrow$ einige“ helfen. Da wir „alle X sind Y“ mit $X \rightarrow Y$ aussagen-logisch formalisiert haben, so müsste gelten: „$X \rightarrow Y \;\Rightarrow\; X \vee Y$“. Aber auch das ist kein *strenger* Schluss, sondern der Wahrheitsverlauf lautet: + + + –. Es gilt also nur der *partielle* Schluss: $X \rightarrow Y \longrightarrow X \vee Y$

2. *Einwand*: $X \rightarrow Y$ drückt auch „einige“ aus
Im normalsprachlichen Verständnis geht man davon aus:

„Wenn alle X auch Y sind, dann sind (wenigstens) einige Y auch X“



Wenn nun gilt: $X \rightarrow Y$ bedeutet „alle X sind Y“, dann müsste es zugleich bedeuten:
„Einige Y sind X“ (das hieße also: alle X sind Y $\Leftrightarrow$ einige Y sind X).
Folglich müsste das Umgekehrte für $Y \rightarrow X$ gelten. Fassen wir den Einwand zusammen. :
$X \rightarrow Y$ bedeutet:

alle X sind Y
einige Y sind X

$Y \rightarrow X$ bedeutet:

alle Y sind X
einige X sind Y

Antwort: Nun gilt in der Quantoren-Logik normalerweise: $\Lambda \Rightarrow V$, also: „Was für alle gilt, gilt auch notwendig für einige“. Dann müsste aber gelten:

$X \rightarrow Y$ (= alle X sind Y) $\Rightarrow$ $Y \rightarrow X$ (= einige X sind Y)

„$X \rightarrow Y \Rightarrow Y \rightarrow X$“ ist aber kein *strenger*, sondern nur ein *partieller* Schluss:

$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	$(Y \rightarrow X)$
+	+	+
–	+	+
+	–	–
+	+	+

(Auch bei Verwendung der *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ ergibt sich ein *partieller* Schluss.)
Außerdem, selbst wenn „$X \rightarrow Y \Rightarrow Y \rightarrow X$“ gelten würde, dann hieße das:

Erstens: alle X sind Y $\Rightarrow$ einige X sind Y
Aber auch zweitens: einige Y sind X $\Rightarrow$ alle Y sind X.

Dies ist aber wiederum kein *strenger*, sondern nur ein *semi-analytischer* Schluss.

3. *Einwand*: $\neg(X \rightarrow \neg Y)$ drückt „einige“ aus
Die Negation von „Alle X sind Y“ ist: „Nicht alle X sind nicht Y“. Daraus ergibt sich:
$X \rightarrow Y$: alle X sind Y
$\neg(X \rightarrow \neg Y)$: nicht alle X sind nicht Y = einige X sind Y
Antwort: $\neg(X \rightarrow \neg Y) \;\Leftrightarrow\; X \wedge Y$. Der obige Einwand hätte also zur Folge, dass „einige X sind Y“ gleich wäre mit „X und Y“. Das ist noch viel absurder, als dass – wie anfangs wider-

legt – „X und Y“ äquivalent mit „alle X sind Y“ sei. Es reicht *ein* Argument, um diesen Einwand zu widerlegen. $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$. Demnach müsste gelten: „einige X sind Y“ $\Rightarrow$ „alle X sind Y“ (da wir ja $X \rightarrow Y$ mit „alle X sind Y“ gleichgesetzt haben). Auch dieser Schluss gilt natürlich in Wirklichkeit nicht *streng*, sondern nur *partiell*.

Bei Verwendung der *Positiv-Implikation* ergibt sich: $(X *\!\!\rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X *\!\!\rightarrow \neg Y)$. Somit kann auch hier $\neg(X *\!\!\rightarrow \neg Y)$ nicht für „einige X sind Y“ stehen, denn dann wären „alle X sind Y und „einige X sind Y“ gleichbedeutend.

Fazit 4) These: „Einige X sind Y“ lässt sich aussagen-logisch nicht ausdrücken, es gibt keinen Relator, der „einige“ repräsentiert. Sondern man benötigt dafür Quantoren, Indizes oder numerische Angaben. Zwar werden in der Quantoren-Logik oft *unterschiedliche* Relatoren für All-Aussagen und Partikulär-Aussagen verwendet, aber eleganter ist, den gleichen Relator (z. B. $\rightarrow$) zu verwenden. Denn „einige X sind Y“ unterscheidet sich von „alle X sind Y“ nicht durch den *Relator*, sondern nur durch die *Quantität*. „Alle“ steht für $p = 1$, „einige“ steht für $p > 0$. Der Wert $p > 0$ ist aber aussagen-logisch nicht auszudrücken.

Kommen wir zurück zu 1) These: Die *Quantoren-Logik* lässt sich nicht vollständig *aussagen-logisch* darstellen. Auch diese These ist damit bestätigt.

Hintergrund ist der integrative Aufbau der Logik, wie er in der *Integralen Logik* dargelegt, präzisiert und erweitert wird:

- Aussagen-Logik: 2-wertig
- Quantoren-Logik 4-wertig (bzw. 6-wertig)
- Quantitäts-Logik: ∞-wertig

(Die Prädikaten-Logik lasse ich hier einmal beiseite, sie nimmt eine Zwischenposition ein.)

Dabei *enthält* jeweils die höhere Stufe die niedrigere in sich, *übersteigt* sie aber andererseits. So enthält die Quantoren-Logik die Aussagen-Logik, ist aber reicher als diese. Und die Quantitäts-Logik enthält die Quantoren-Logik, ist aber wiederum reicher als diese.

5) Überblick

Es folgen zwei *Übersichten*, für *einfache* Relationen und dann für *komplexe* Relationen:

Einfache Relationen

	Aussagen-Logik	Quantoren-Logik	Quantitäts-Logik
2-wertig			
1. alle	X	$\Lambda(X)$	$p(X) = 1$
2. alle nicht	$\neg X$	$\Lambda\neg(X)$	$p(X) = 0$
4-wertig			
1. alle	X	$\Lambda(X)$	$p(X) = 1$
2. alle nicht	$\neg X$	$\Lambda\neg(X)$	$p(X) = 0$
3. einige		$V(X)$	$p(X) > 0$
4. einige nicht		$V\neg(X)$	$p(X) < 1$
∞-wertig			$p(X) = r/n \quad 0 \leq r \leq n$

Oben, bei den *einfachen* Relationen, wird zwar die Grundproblematik „alle vs. einige“ deutlich. Aber hier sind gar keine *aussagen-logische Relatoren* beteiligt. Erst bei den *komplexen* Relationen, mit *Relatoren* wie dem Implikator →, stellt sich das Problem wirklich. Und es zeigt sich: Man kann die *Kopula-Relation* „ist“ immer mit der *Implikation* formalisieren, und tut das auch am besten so. Die Unterschiede zwischen „alle“ und „einige“ haben mit dem Relator nichts zu tun.

Komplexe Relationen

	Aussagen-Logik	Quantoren-Logik	Quantitäts-Logik
2-wertig			
1. alle	$X \rightarrow Y$	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
2. alle nicht	$\neg(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
4-wertig			
1. alle	$X \rightarrow Y$	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
2. alle nicht	$\neg(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
3. einige		$V(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) > 0$
4. einige nicht		$V\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) < 1$
∞-wertig			$p(X \rightarrow Y) = r/n \quad 0 \leq r \leq n$